

1. feladatsor – Logika

1.1. Ítéletkalkulus

1.1. Feladat. Formalizáljuk az alábbi állításokat a megadott primitívek felhasználásával:

A : „Süt a nap.” B : „Kimegyek az uszodába.” C : „Hamburgert ebédelek.”

- (a) Kimegyek az uszodába, vagy hamburgert ebédelek.
- (b) Kimegyek az uszodába, de nem ebédelek hamburgert.
- (c) Nem süt a nap.
- (d) Ha kimegyek az uszodába, hamburgert ebédelek.
- (e) Pontosan akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

1.2. Feladat. Adjuk meg az alábbi formula összes részformuláját.

$$(A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \rightarrow B)$$

1.3. Feladat. Döntsük el, hogy az

$$\begin{array}{ll} (a) & (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C) \\ (c) & A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C)) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (b) & (A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \rightarrow C) \\ (d) & A \rightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C)) \end{array}$$

formulák közül — a primitívek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgépet, vagy ha nem bírja el a repülőgépet, de indul hajó Afrikába.

1.4. Feladat. A primitívek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket.

- (a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok egy piros pontot, és örülhetek.*
- (b) *Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.*
- (c) *Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk.*
- (d) *Pontosan akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*
- (e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánnal, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*
- (f) *Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld, vagy az asztal lekváros lesz.*
- (g) *Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.*
- (h) *Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.*
- (i) *Ki kell találnom még formalizálandó mondatokat, vagy kirúgnak az állásomból, és mehetek utcát söpörni.*
- (j) *Szeretek utcát söpörni, de mondatokat formalizálni csak akkor szeretek, ha nincs más választásom.*

1.5. Feladat. Formalizáljuk a következő ítéleteket, és döntsük el, hogy a primitívek megadott értéke mellett az ítélet igaz vagy hamis. (A primitívek ne tartalmazzanak tagadást, és a mondatban való előfordulásuk szerint jelöljük $A, B, C, \dots$ betűkkel.)

- (a) *Ha nem fáj a lábam és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el sörözni, ha a haverom is velem jön.* $A : h, B : h, C : i, D : h.$
- (b) *Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerzés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára.*
 $A : i, B : h, C : i, D : h, E : i.$
- (c) *Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot.* $A : i, B : i, C : i, D : h, E : h.$

1.6. Feladat. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat:

- (a) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C);$
- (b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A;$
- (c) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow C;$
- (d) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)) \equiv A \rightarrow (A \vee B);$
- (e) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \rightarrow A;$
- (f) $((A \wedge B) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(C \wedge A)).$

1.7. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik tautológia, és melyik nem:

- (a) $(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow (\neg A)));$
- (b) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B);$
- (c) $A \rightarrow (A \wedge B);$
- (d) $A \vee (B \rightarrow (\neg A));$
- (e) $(A \vee B) \rightarrow ((A \vee (\neg B)) \rightarrow A);$
- (f) $(B \vee (\neg A)) \rightarrow (B \vee (\neg A));$
- (g) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \leftrightarrow ((A \leftrightarrow C) \wedge A).$

1.8. Feladat. A primitívek alkalmas megválasztásával formalizáljuk a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását úgy, hogy negáció csak ítéletváltozóra vonatkozzon.

- (a) *A 3 felbonthatatlan szám, ha a 3 prímszám.*
- (b) *Ha 2 osztója 4-nek, és 4 osztója 1-nek, akkor 2 osztója 1-nek.*
- (c) *A 4 és a -4 osztói egymásnak.*
- (d) *A 2-t pontosan akkor nem nevezzük egységnek, ha a 2 minden egész számnak osztója.*

1.9. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyik az A, B, C változókból felépített teljes diszjunktív normálforma:

$$\begin{aligned} F_1 &= (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (\neg B)), & F_2 &= (A \vee B \vee (\neg C)) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C), \\ F_3 &= (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)), & F_4 &= (\neg A) \wedge B \wedge C. \end{aligned}$$

1.10. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C változókból felépített alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját:

- (a) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C);$
- (b) $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C;$
- (c) $(A \vee B) \rightarrow (\neg(C \rightarrow B));$
- (d) $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow B);$
- (e) $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \vee (A \wedge B));$
- (f) $(\neg(A \rightarrow B)) \wedge (((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B).$

1.2. Predikátumkalkulus

1.11. Feladat. Legyen az individuumtartomány az egész számok halmaza. Vezessük be a következő jelöléseket:

- egyváltozós predikátumok:
 - $M(x)$: „ x négyzetszám”,
 - $P(x)$: „ x páros szám”,
 - $N(x)$: „ x negatív szám”.
- kétváltozós predikátum:
 - $O(x, y)$: „ x osztója y -nak”,
- kétváltozós függvény(jel)ek
 - $o(a, b) = a + b$, azaz a és b szokásos összege
 - $s(a, b) = a \cdot b$, azaz a és b szokásos szorzata

Fordítsuk köznapi nyelvre az alábbi formulákat.

- (a) $P(7)$
- (b) $M(4) \wedge \neg N(o(9, 3))$
- (c) $(\forall x)(O(2, s(4, x)))$
- (d) $(\exists x)(P(x) \wedge O(x, 6))$
- (e) $(\forall x)(O(4, x) \rightarrow P(x))$
- (f) $(\forall x)(\forall y)(P(o(x, y)) \leftrightarrow P(s(x, y)))$
- (g) $(\forall x)\left(M(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge O(x, y))\right)$
- (h) $(\forall x)(\forall y)(\neg P(s(x, y)) \leftrightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$
- (i) $(\exists x)\left(P(x) \wedge (\forall y)\left((P(y) \wedge N(y)) \rightarrow (\neg O(y, x))\right)\right)$

1.12. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz és legyen f az az egyváltozós függvényjel A -n, melyre

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 2, \quad f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(x, y) : x + y = 5; \quad Q(x) : x \text{ páros}; \quad E(x, y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

- (a) $(\forall x)(\exists y)(E(f(x), y))$,
- (b) $(\forall x)(\exists y)(E(f(y), x))$,
- (c) $(\exists x)(\forall y)(E(f(x), y))$,
- (d) $(\exists x)(\forall y)(E(f(y), x))$,
- (e) $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x)))$,
- (f) $(\forall x)(\forall y)(\neg E(x, y) \rightarrow \neg E(f(x), f(y)))$,
- (g) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$

- (h) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow \neg E(x, y))$
- (i) $(\forall x)(\forall y)((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow E(x, y))$
- (j) $(\exists x)(\forall y)(\neg E(f(y), x))$,
- (k) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y)))$,
- (l) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$.

1.13. Feladat. A szokásos módon, jelöljenek az ABC nagybetűi predikátumokat; a kisbetűi közül x, y és z változókat; a, b, c individuumkonstansokat; egyéb kisbetűi függvényjeleket. Az alábbi formulákban melyek a változók kötött illetve szabad előfordulásai?

- (a) $(\forall x)(K(x, y) \vee L(x))$
- (b) $(\exists y)(I(s(x, y)) \leftrightarrow (\forall x)(O(x, y)))$
- (c) $M(k(x, b), x) \wedge (\exists z)(M(y, k(z, a)))$
- (d) $(\forall x)P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x))$.

1.14. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „ x hallgató”, $V(x)$: „ x felkészült a vizsgára”,
 $B(x, y)$: „ x az y barátja”, $C(x, y)$: „ x csoporttársa y -nak”,
 $T(x, y)$: „ x házastársa y -nak”, $F(x)$: „ x férfi”,
 $A(x)$: „ x anya”, p : „Péter”,
 $a(x)$: „ x anyja”, $S(x)$: „ x szeret főzni”.

- (a) Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.
- (b) Minden hallgató felkészült a vizsgára.
- (c) Néhány hallgatónak nincs barátja.
- (d) Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal házasodnak össze.
- (e) Vannak nőtlen férfiak.
- (f) Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.
- (g) Péter összes barátja hallgató.
- (h) Néhány hallgató anyja nem szeret főzni.
- (i) Péter anyja szeret főzni.

1.15. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven. Adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak predikátumjelre vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

- (a) Minden egész szám osztója a 0-nak.
- (b) Ha a osztója b -nek, és b osztója c -nek, akkor a osztója c -nek.
- (c) Minden egész szám és ellentettje osztói egymásnak.
- (d) Egy egész szám felbonthatatlan szám, ha prímszám.
- (e) Egy egész számot pontosan akkor nevezünk egységnek, ha minden egész számnak osztója.
- (f) Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.
- (g) Minden egész számnál létezik kisebb.
- (h) Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.
- (i) Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.

(j) Minden szám pozitív vagy negatív.

1.16. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban a következő ítéleteket. Adjuk meg a formulák tagadását is úgy, hogy kvantort nem tagadunk, és fogalmazzuk meg a megfelelő ítéletet köznapin nyelven. (Individuumtartomány az emberek halmaza.)

- (a) Minden informatikus éhes.
- (b) Ha egy szakács éhes, főz magának.
- (c) Az éhes informatikusok kedvelik a szakácsokat.
- (d) Van olyan szakács, aki csak informatikusnak főz.
- (e) Minden informatikus kedveli a neki főző szakácsokat.
- (f) Mészga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.
- (g) Ha Mészga Géza szakács, és senki sem éhes, akkor mindenki szerencsés.

Szorgalmi feladatok

1.17. Feladat. Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

A	B	$?$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

1.18. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy n logikai műveletet tartalmazó ítéletkalkulusbeli formulának legfeljebb $2n + 1$ részformulája van.

1.19. Feladat. Egy teniszmagazin a következő szlogennel hirdeti magát: „Ha nem teniszezem, akkor teniszt nézek. És ha nem nézek teniszt, akkor teniszről olvasok.” Feltehetjük, hogy az elbeszélő nem tud a felsoroltak közül több dolgot végezni egyszerre. Ha az állítás igaz, mit csinálhat?

1.20. Feladat. Megfelelően megválasztott elsőrendű nyelven formalizálja a következő ítéletet:

Nem minden szarka farka tarka, csak a tarka farkú szarka farka tarka.

1.21. Feladat. Legyen $E(x, y) : x = y$, az f 2-változós függvényjel, e pedig individuum konstans. Tekintsük az F és G predikátumkalkulusbeli formulákat

$$F = (\forall x)(\exists y)E(f(x, y), e), \quad G = (\exists y)(\forall x)E(f(x, y), e).$$

Igazoljuk, hogy az F és G formulák nem ekvivalensek.

1.22. Feladat. Legyen az individuumtartomány $\mathbb{R}^3 \cup \mathbb{R}$ formalizáljunk predikátumkalkulusban egy szabadon választott vektorterekre vonatkozó igaz ítéletet (tehát ne legyen szabad változó).