

MTN212E: Leképezések

(előadásvázlat, 2021. június 9.)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, és $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát.

Jelölje $\emptyset$ az üreshalmazt, azaz azt a halmazt, amelynek nincsen eleme.

1. Definíció. Tetszőleges a, b elemekre definiáljuk az (a, b) **rendezett elempárt**. Az (a, b) rendezett elempárnak a és b az **első**, illetve a **második koordinátája**. Két rendezett elempár akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlők.

2. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra definiáljuk a **Descartes-szorzatukat**:

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \wedge b \in B \}.$$

3. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ kételemű és $B = \{3, 4, 5\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ hatelemű halmaz.

Vegyük észre, hogy $\emptyset \times B = \emptyset$, ugyanis ha (a, b) eleme lenne a Descartes-szorzatnak, akkor $a \in \emptyset$ lenne, ami nem lehet.

4. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra az $A \times B$ halmaz részhalmazait A -ból B -be menő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Az A halmazt a megfeleltetés **indulási halmazának**, B -t pedig az **érkezési halmazának** nevezzük.

5. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ halmazból a $B = \{3, 4, 5\}$ halmazba menő megfeleltetések pontosan a $A \times B$ halmaz részhalmazai elemei, tehát $2^6 = 64$ van belőlük. Például az $\emptyset$ is megfeleltetés A -ból B -be, ebből látható, hogy a megfeleltetés megadásakor mindig meg kell adni az érkezési és indulási halmazokat is.

6. Példa. Tekintsük az $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon az abszolútérték függvényt, mint ϱ megfeleltetést. Ekkor $\varrho = \{(x, y) \in A \times A : |x| = y\} = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$.

7. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés **értelmezési tartománya** az $\{a \in A : (\exists b \in B)((a, b) \in \varrho)\}$, **értékkészlete** pedig a $\{b \in B : (\exists a \in A)((a, b) \in \varrho)\}$ halmazok.

8. Példa. A 6. példában szereplő abszolútérték függvény esetén az értelmezési tartomány megegyezik a kiindulási halmazzal, azaz $A = \{2, -1, 0, 1, 2\}$, az értékkészlet pedig a $\{0, 1, 2\}$ halmaz.

9. Példa. Vegyük a $\varrho = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$ megfeleltetést a valós számokon. Ekkor ϱ értelmezési tartománya $\mathbb{R}_0^+$, az értékkészlete pedig $\mathbb{R}$.

10. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés **parciális leképezés**, ha minden $a \in A$ elemre legfeljebb egy olyan $b \in B$ elem létezik, hogy $(a, b) \in \varrho$. Ilyenkor a $\varrho: A \rightarrow B$ jelölés használjuk, ami azt jelenti, hogy ϱ parciális leképezés A -ból B -be. Továbbá $(a, b) \in \varrho$ helyett azt mondjuk hogy az a **elem** ϱ melletti **képe** b , és azt írjuk, hogy $a\varrho = b$. Ekkor az a elemet a b elem **őseinek** nevezzük. A parciális leképezést **leképezésnek** nevezzük, ha minden $a \in A$ elemre pontosan egy vele megfeleltetett $b \in B$ elem létezik. Ha $A = B$, azaz az indulási és érkezési halmaz megegyezik, akkor a leképezést **transzformációnak** nevezzük.

11. Jelölés. Az A halmazból B -be menő összes leképezés halmazát B^A -val jelöljük.

12. Példa. A 6 példában szereplő megfeleltetés parciális leképezés, sőt leképezés is, mert minden A -beli elemnek pontosan egy képe létezik, hiszen a számok abszolútértéke egyértelműen meghatározott. Használható a $\varrho: A \rightarrow A$, $x\varrho = |x|$ jelölés.

13. Példa. A 9. példában megadott megfeleltetés nem parciális leképezés, mivel mind $(4, 2)$, mind $(4, -2)$ is eleme ϱ -nak. Viszont a $\varrho \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ megfeleltetés $\mathbb{R}$ -ből $\mathbb{R}_0^+$ -ba már parciális leképezés de még mindig nem leképezés, mivel például a -1 elemnek nincsen képe. A $\varrho \cap (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ megfeleltetés viszont már leképezés.

14. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ és a $\sigma \subseteq B \times C$ **leképezések szorzatán** azt a $\varrho\sigma \subseteq A \times C$ megfeleltetést értjük, amelynél tetszőleges $(a, c) \in A \times C$ -re pontosan akkor teljesül, hogy $(a, c) \in \varrho\sigma$, ha létezik $b \in B$, amelyre $(a, b) \in \varrho$ és $(b, c) \in \sigma$.

15. Tétel. Ha $\varrho: A \rightarrow B$ és $\sigma: B \rightarrow C$ leképezések, akkor $\varrho\sigma: A \rightarrow C$ is leképezés és tetszőleges $a \in A$ elemre $a(\varrho\sigma) = (a\varrho)\sigma$.

16. Példa. Tekintsük a $\varrho: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $x\varrho = 5|x| + 1$ és a $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\sigma = \frac{6}{x}$ leképezéseket. Ekkor a szorzatuk a $\varrho\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(\varrho\sigma) = (x\varrho)\sigma = (5|x| + 1)\sigma = \frac{6}{5|x| + 1}$ leképezés.

17. Definíció. Tetszőleges A halmazon definiáljuk az **identikus leképezést**:

$$\text{id}_A = \{ (a, b) \in A \times A : a = b \},$$

a másik jelölést használva:

$$\text{id}_A: A \rightarrow A, \quad a \text{id}_A = a$$

18. Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B$ leképezésre $\text{id}_A \varrho = \varrho$ és $\varrho \text{id}_B = \varrho$.

19. Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B$, $\sigma: B \rightarrow C$ és $\tau: C \rightarrow D$ leképezésekre $(\varrho\sigma)\tau = \varrho(\sigma\tau)$, azaz a szorzás asszociatív.

20. Példa. Vegyük az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ és $\sigma = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ leképezéseket. Ekkor $\varrho\sigma = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ és $\sigma\varrho = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, azaz a szorzás nem kommutatív.

21. Definíció. A $\varrho: A \rightarrow B$ leképezés **szürjektív**, ha minden elem előfordul képelemként, azaz ha

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varrho = b).$$

A $\varrho: A \rightarrow B$ leképezés **injektív**, ha különböző elemek képe különböző, azaz ha

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varrho = a_2\varrho \rightarrow a_1 = a_2).$$

A ϱ leképezés **bijektív**, ha szürjektív és injektív is.

22. Példa. A 6. példában szereplő leképezés nem szürjektív, mert például a -1 nem fordul elő képként, és nem is injektív, mert a -2 és a 2 képe megegyezik.

23. Házi feladat. (feb. 23.) Adjon példát olyan $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ leképezésre, amely injektív, de nem szürjektív. Igazolja is a tulajdonságokat.

24. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ **leképezés inverze** a következő megfeleltetés:

$$\varrho^{-1} = \{ (b, a) \in B \times A : (a, b) \in \varrho \}.$$

25. Tétel. A ϱ leképezés inverze akkor és csak akkor leképezés, ha ϱ bijektív.

26. Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B$ és $\sigma: B \rightarrow C$ leképezésekre

- (1) ha ϱ és σ szürjektív, akkor $\varrho\sigma$ is szürjektív;
- (2) ha ϱ és σ injektív, akkor $\varrho\sigma$ is injektív;
- (3) ha ϱ és σ bijektív, akkor $\varrho\sigma$ is bijektív;
- (4) ha $\varrho\sigma$ szürjektív, akkor σ szürjektív;
- (5) ha $\varrho\sigma$ injektív, akkor ϱ injektív;
- (6) ha $\varrho\sigma$ bijektív, akkor ϱ injektív és σ szürjektív;

27. Házi feladat. (feb. 23.) A (4) bizonyítása.

28. Házi feladat. (feb. 23.) Adjon példát olyan A, B, C halmazokra és $\rho: A \rightarrow B$, $\sigma: B \rightarrow C$ leképezésekre, melyekre σ szürjektív, de $\rho\sigma$ nem szürjektív.

29.* Tétel. Tetszőleges $\varrho: A \rightarrow B$, $\sigma: B \rightarrow C$ bijektív leképezésre

- (1) ϱ^{-1} is bijektív,
- (2) $\varrho\varrho^{-1} = \text{id}_A$,
- (3) $\varrho^{-1}\varrho = \text{id}_B$,
- (4) $(\varrho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\varrho^{-1}$.