

MTN212: Komplex számok

(előadásvázlat, 2021. május 13.)

Maróti Miklós

1. Definíció. A valós számokból álló számpárokat **komplex számoknak** nevezzük. A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli, azaz $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Definíció. Az (a, b) és (c, d) komplex számok **összege** és **szorzata**:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

3. Példa. Az $(1, 2)$ és $(3, 4)$ komplex számok összege és szorzata:

$$\begin{aligned}(1, 2) + (3, 4) &= (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6), \text{ és} \\ (1, 2) \cdot (3, 4) &= (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4, 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = (3 - 8, 4 + 6) = (-5, 10).\end{aligned}$$

4. Tétel. $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ test.

5. Házi feladat. (márc. 16.) Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{C}$ halmazon a 2. Definícióban megadott szorzás asszociatív.

6. Példa.

$$\frac{(1, 2)}{(3, 4)} = (1, 2) \cdot (3, 4)^{-1} = (1, 2) \cdot \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25} \right) = \left(\frac{3 - (-8)}{25}, \frac{-4 + 6}{25} \right) = \left(\frac{11}{25}, \frac{2}{25} \right).$$

7. Tétel. Minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0), & -(a, 0) &= (-a, 0), \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (a \cdot b, 0), & (a, 0)^{-1} &= (a^{-1}, 0).\end{aligned}$$

8. Definíció. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén az $(a, 0)$ komplex szám helyett egyszerűen a -t írunk, és nem is különböztetjük meg az a valós számtól. Úgy tekintjük, hogy $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Továbbá a $(0, 1)$ komplex számot i -vel jelöljük.

9. Tétel. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $(a, b) = a + bi$, azaz minden komplex szám egyértelmű módon előáll $a + bi$ alakban. Továbbá $i^2 = -1$.

10. Definíció. A $z \in \mathbb{C}$ komplex szám $a + bi$ alakban való felírását z **kanonikus alakjának** nevezzük. Az $a \in \mathbb{R}$ számot z **valós részének**, míg a $b \in \mathbb{R}$ számot z **képzetes részének** hívjuk, és $a = \operatorname{Re} z$, illetve $b = \operatorname{Im} z$ -vel jelöljük. Az i komplex szám neve **képzetes egység**.

11. Példa. A következő számolásban csak azt használtuk ki, hogy $\mathbb{C}$ test (azaz érvényesek a szokásos számolási szabályok) és $i^2 = -1$:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Vessük össze a kapott eredményt a komplex számok szorzására megadott 2. Definícióval. A multiplikatív inverz kiszámolásánál azt a jól ismert azonosságot alkalmazzuk, hogy $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 - (bi)^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i.$$

12. Definíció. Legyen adott a síkban egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer, és feleltessük meg az $a + bi$ komplex számnak az (a, b) koordinátájú pontot. Így kapjuk a **komplex számsíkot**, más néven a **Gauss-féle számsíkot**. Az első tengelyt (abszcissza) **valós tengelynek**, a második tengelyt (ordináta) pedig **képzetes tengelynek** hívjuk. A valós tengelyen találhatók a valós számok, a képzetes tengelyen pedig a **tiszta képzetes számok**.

13. Definíció. A $z = a + bi$ komplex szám **konjugáltján** a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot, és **abszolút értékén** a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ valós számot értjük.

14. Megjegyzés. A komplex számsíkon a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés, az abszolút érték az origótól (nullától) mért távolság, a komplex számok összeadása pedig (hely)vektorok összeadása.

15. Tétel. Tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számra

- (1) $\overline{\overline{u}} = u$,
- (2) $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$,
- (3) $\overline{u - v} = \overline{u} - \overline{v}$,
- (4) $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$
- (5) $\overline{u/v} = \overline{u}/\overline{v}$, ha $v \neq 0$,
- (6) $\overline{u} = u \iff u \in \mathbb{R}$,
- (7) $u + \overline{u} = 2 \operatorname{Re} u$,
- (8) $u \cdot \overline{u} = |u|^2$.

16. Házi feladat. (márc. 23.) Bizonyítsa be az előző tétel (4) és (6) részét.

17. Tétel. Tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számra

- (1) $|u| = 0 \iff u = 0$,
- (2) $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$,
- (3) $|u/v| = |u|/|v|$, ha $v \neq 0$,
- (4) $|u + v| \leq |u| + |v|$,
- (5) $|\overline{u}| = |u|$,
- (6) $1/u = \overline{u}/|u|^2$, ha $u \neq 0$.

18. Házi feladat. (márc. 23.) Bizonyítsa be az előző tétel (3) és (6) részét.

19.* Tétel. Legyenek $z_1, z_2, \dots, z_n$ komplex számok úgy, hogy a komplex számsíkon az általuk meghatározott poligon konvex, és a $z_1, \dots, z_n$ csúcsok az óramutató járásával ellentétes irányban helyezkednek el. Ekkor a poligon területe a következő képlettel számolható:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z_1} z_2 + \overline{z_2} z_3 + \dots + \overline{z_{n-1}} z_n + \overline{z_n} z_1).$$

20. Definíció. Egy nemnulla z komplex szám **argumentuma** az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül, hogy átmenjen a z -nek megfelelő ponton, amit **arg z** -vel jelöljük. (Ez 2π egész számú többszöröseinek erejéig egyértelműen meghatározott.) A nulla számnak nincsen argumentuma.

21. Tétel. Tetszőleges $0 \neq z \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $\varphi \in \mathbb{R}$ számok esetén

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \iff r = |z| \text{ és } \varphi = \arg z.$$

22. Definíció. A nemnulla komplex számok

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

alakban való felírását **trigonometrikus alaknak** nevezzük. A nulla komplex számnak nincsen trigonometrikus alakja.

23. Megjegyzés. A nullától különböző komplex számok argumentuma csak 2π egész számú többszöröseitől eltekintve meghatározott. Ezért a komplex számok trigonometrikus alakja sem egyértelmű: például mind $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, mind a $\cos \frac{-3\pi}{2} + i \sin \frac{-3\pi}{2}$ az i komplex szám trigonometrikus alakja. Viszont ha egy konkrét komplex szám trigonometrikus alakját kell meghatároznunk, akkor az argumentumot mindig a $[0, 2\pi[$ intervallumban adjuk meg.

24. Tétel. Tetszőleges nullától különböző $u = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $v = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ komplex számokra

- (1) $\overline{u} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$,
- (2) $u \cdot v = rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$,
- (3) $u^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$,
- (4) $u/v = r/s \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$.

25. Megjegyzés. A komplex számok kanonikus alakját felhasználva láthattunk, hogy rögzített $v \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén a $z \mapsto z + v$ leképezés nem más, mint a v -hez tartozó vektorral való eltolás a komplex számsíkon. A komplex számok trigonometrikus alakját felhasználva pedig látható, hogy rögzített $v = \cos \psi + i \sin \psi$ esetén a $z \mapsto z \cdot v$ leképezés nem más, mint az origó körüli ψ szögű forgatás a komplex számsíkon.

26. Példa. Az ismert szinusz és koszinusz összegzési képleteket könnyen megkaphatjuk komplex számok segítségével. Tekintsük a

$$u = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad v = \cos \psi + i \sin \psi$$

komplex számokat. A trigonometrikus alakokkal számolva a szorzatuk

$$u \cdot v = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi).$$

De ha a kanonikus alakot használjuk a szorzat kiszámolására, akkor

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= \cos \varphi \cdot \cos \psi + \cos \varphi \cdot i \sin \psi + i \sin \varphi \cdot \cos \psi + i \sin \varphi \cdot i \sin \psi \\ &= (\cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi) + i(\cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \cos \psi). \end{aligned}$$

Mivel az $u \cdot v$ komplex szám egyértelműen írható fel kanonikus alakban, ezért

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi, \quad \text{és} \\ \sin(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \cos \psi. \end{aligned}$$

Hasonlóan számítható ki a $\cos(\varphi - \psi)$ és $\sin(\varphi - \psi)$ képlete is, de ekkor az u és v komplex számok hányadosát kell vennünk.

27. Tétel (Moivre-képlet). Bármely nem zéró $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám és $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

28. Házi feladat. (márc. 30.) Bizonyítsa be az előző tételt teljes indukció segítségével $n \in \mathbb{N}$ esetén.

29. Példa. Tudjuk, hogy $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ és $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Megmutatjuk, hogy $\cos 3\alpha$ és $\sin 3\alpha$ hogyan számítható ki egyszerűen. Vegyük a $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ komplex számot és számoljuk ki a harmadik hatványát a trigonometrikus alakja

$$z^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha,$$

és a kanonikus alakjai segítségével (felhasználva azt, hogy $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$)

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 \\ &= \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha \\ &= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha) + i(3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha, \quad \text{és} \\ \sin 3\alpha &= 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

30. Definíció. Tetszőleges n pozitív egész szám és $z \in \mathbb{C}$ esetén azt mondjuk, hogy az u komplex szám **n -edik gyöke** z -nek, ha $u^n = z$.

31. Tétel. Minden nemnulla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex számnak pontosan n különböző n -edik gyöke van, mégpedig

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

32. Definíció. Az ε komplex számot **n -edik egységgyöknek** nevezzük ($n \in \mathbb{N}^+$), ha $\varepsilon^n = 1$. Az ε komplex szám **egységgyök**, ha n -edik egységgyök valamely $n \in \mathbb{N}^+$ -re.

33. Tétel. Az n -edik egységgyökök a következők:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

Ezzel a jelöléssel $\varepsilon_0 = 1$ és $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ minden $k = 0, \dots, n-1$ esetén.

34. Megjegyzés. Az n -edik egységgyökök egy szabályos n -szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek a körülírt köre az origó középpontú egységkör, és egyik csúcsa 1. (Ez a két információ egyértelműen meg is határozza az n -szöget.)

35. Példa. Az első egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^1 = 1\} = \{1\}.$$

A második egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^2 = 1\} = \{1, -1\}.$$

A harmadik egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^3 = 1\} = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

A negyedik egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\} = \{1, i, -1, -i\}.$$

A hatodik egységgyökök halmaza a

$$\{z \in \mathbb{C} : z^6 = 1\} = \left\{1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

36. Tétel. Egy nemnulla komplex szám összes n -edik gyökét megkaphatjuk, ha egy rögzített n -edik gyökét megszorozzuk sorra az n -edik egységgyökökkel. Tehát ha $u^n = z \neq 0$, akkor a z komplex szám n -edik gyökei: $u \cdot \varepsilon_k$ ahol $k = 0, \dots, n-1$.

37. Példa. Számoljuk ki a $\sqrt[3]{8i}$ értékeit.

Könnyen leellenőrizhető, hogy $-2i$ gyök, mivel $(-2i)^3 = -8i^3 = 8i$. Tehát ha alkalmazzuk az előző tételt, és tudjuk a harmadik egységgyököket, akkor megkapjuk a három gyököt:

$$\begin{aligned} -2i \cdot 1 &= -2i, \\ -2i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= \sqrt{3} + i, \\ -2i \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= -\sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

38. Definíció. Azt mondjuk, hogy a ε komplex szám **primitív n -edik egységgyök**, ha n -edik egységgyök, de nem m -edik egységgyök semmilyen $0 < m < n$ egészre.

39. Példa. Az 1 primitív első egységgyök. A -1 primitív második egységgyök. A $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív harmadik egységgyökök. Az i és $-i$ primitív negyedik egységgyökök. Az $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív hatodik egységgyökök.

40. Tétel. Az $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ egységgyök akkor és csak akkor primitív n -edik egységgyök, ha k relatív prím n -hez.

41. Házi feladat. (márc. 30.) Fejezze be az előző tétel bizonyítását.