

MTN212: Harmad- és negyedfokú egyenletek (előadásvázlat, 2021. május 13.)

Waldhauser Tamás, Kátai-Urbán Kamilla

1. Történet. A harmad- és negyedfokú egyenletek megoldóképletének története:

- Scipione del Ferro megoldja a harmadfokú egyenlet bizonyos típusait, de módszerét titokban tartja.
- 1526: del Ferro a halálos ágyán elárulja a titkot tanítványának, Fiorinak, a jegyzetfüzetét pedig vejére bízta.
- 1535: Fior és Niccolo Fontana Tartaglia versenye. Tartaglia megoldja Fior összes feladványát, Fior viszont egyet sem old meg teljesen.
- 1539: Girolamo Cardano (nagy nehezen) kiszedi Tartagliából a módszert.
„Esküszöm Önnek az Úr Szent Evangéliumára, és nem csak egy igaz ember szavát adom Önnek, hogy soha nem publikálom az Ön felfedezését, ha rám bízta, de ígérem azt is, és legyen igaz keresztény lelkiismeretem az Ön biztosítéka, hogy oly módon titkosítom, hogy halálom után senki sem tudja majd elolvasni a feljegyzetteket. Ha Ön úgy gondolja, hogy megérdemlem a bizalmat, akkor tegye meg nekem ezt a szívességet, ha pedig nem, akkor fejezzük be ezt a beszélgetést.”
- 1539: Cardano tovább vizsgálja a harmadfokú egyenleteket, felfedezi a casus irreducibilist.
- 1540: Lodovico Ferrari megoldja a negyedfokú egyenletet, de nem publikálhatja Cardano fogadalma miatt.
- 1543: Cardano és Ferrari Bolognába utazik, és del Ferro veje megmutatja nekik a jegyzetfüzetet.
- 1545: Cardano kiadja Ars Magna című művét, benne a harmadfokú egyenlet megoldásával, hivatkozva del Ferro és Tartaglia munkájára. Tartaglia esküszegéssel vádolja Cardanot.
- 1548: Tartaglia nem akar Ferrarival megküzdeni, Cardano pedig Tartagliával nem akar. Tartaglia egy jó állás reményében mégis elfogadja Ferrari kihívását, de alulmarad, és az éj leple alatt megszökik.

2. Állítás. Az $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$ $a \neq 0$) harmadfokú egyenletből az $x = y + \frac{b}{3a}$ új ismeretlenre való áttéréssel eltűnik a másodfokú tag, tehát a főegyütthatóval való leosztás után

$$x^3 + px + q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{C})$$

alakú egyenletet kapunk.

3. Tétel. Az $x^3 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{C}$) harmadfokú egyenlet minden megoldása megkapható a **Cardano-képlet** segítségével:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

A képlet kilenc számot is adhat, de ezek közül legfeljebb három lehet megoldása az egyenletnek, nevezetesen azok, ahol a két köbgyök szorzata $-\frac{p}{3}$.

Ha u és v a két köbgyök egy-egy ilyen értéke, akkor az $x^3 + px + q$ polinom három gyöke (multiplicitással):

$$u + v, \quad u\varepsilon + v\bar{\varepsilon}, \quad u\bar{\varepsilon} + v\varepsilon,$$

ahol ε primitív harmadik egységgyök.

4. Példa. Megoldjuk az $x^3 + 6x = 20$ egyenletet. Behelyettesítve a Cardano-képletbe ($p = 6$, $q = -20$), ezt kapjuk:

$$\underbrace{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}_u + \underbrace{\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}}_v$$

Tehát ebben az esetben pozitív szám van a négyzetgyök alatt. A két köbgyök három-három értéke (figyelni kell a párbaállításra: $u_i v_i = -2$):

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} & u_2 &= \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \varepsilon & u_3 &= \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \bar{\varepsilon} \\ v_1 &= \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} & v_2 &= \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} \cdot \bar{\varepsilon} & v_3 &= \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = 2 \\ \alpha_2 &= -1 + 3i \\ \alpha_3 &= -1 - 3i \end{aligned}$$

5. Példa. Megoldjuk az $x^3 = 15x + 4$ egyenletet. Behelyettesítve a Cardano-képletbe ($p = -15$, $q = -4$), ezt kapjuk:

$$\underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}}_u + \underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}}_v = \underbrace{\sqrt[3]{2+11i}}_u + \underbrace{\sqrt[3]{2-11i}}_v.$$

Tehát ebben az esetben a négyzetgyök alatt negatív szám van (casus irreducibilis).

A $\sqrt[3]{2+11i}$ köbgyökvonást elvégezni nem könnyű. Vegyük észre, hogy $(2+i)^3 = 2+11i$. Tehát az egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (2+i) + (2-i) = 4 \\ \alpha_2 &= (2+i)\varepsilon + (2-i)\bar{\varepsilon} = -2 - \sqrt{3} \\ \alpha_3 &= (2+i)\bar{\varepsilon} + (2-i)\varepsilon = -2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

6.* Tétel. A valós együtthatós $x^3 + px + q$ harmadfokú polinom valós, illetve nemvalós gyökeinek száma a $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ szám előjelétől függ az alábbi módon:

- ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, akkor egy valós és két nemvalós konjugált komplex gyök van;
- ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, akkor minden gyök valós, és közülük (legalább) kettő egybeesik;
- ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, akkor három különböző valós gyök van, ezt az esetet nevezzük **casus irreducibilisnek**.

7. Definíció. Az $x^3 + px + q$ polinom **diszkriminánsának** a $D = -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$ számot nevezzük.

8. Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a diszkrimináns nem más, mint

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cdot (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \cdot (\alpha_3 - \alpha_1)^2,$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a polinom komplex gyökei (valójában ez a diszkrimináns definíciója).

Hasonlóan lehet definiálni tetszőleges fokszámú polinom diszkriminánsát is. Az $f = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ polinom diszkriminánsa:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

9. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket.

- (1) $x^3 + 3x + 76 = 0$,
- (2) $x^3 = 15x + 22$,
- (3) $-y^3 + 9y^2 - 33y + 65 = 0$.

10. Házi feladat. (máj. 11.) Adjon példát olyan harmadfokú polinomra, amelynek egy valós és két nemvalós konjugált komplex gyöke van, és keresse meg a gyököket a Cardano-képlet segítségével.

Tekintsük az $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ negyedfokú polinomot, és vegyük a $g = x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha$ polinomot, ahol α komplex paraméter. Ekkor $g^2 = x^4 + ax^3 + \left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha\right)x^2 + a\alpha x + \alpha^2$, és képezzük a $k = g^2 - f = \left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b\right)x^2 + (a\alpha - c)x + (\alpha^2 - d)$ különbséget. Ha az α paramétert úgy választjuk meg, hogy k teljes négyzet legyen, azaz ha találunk olyan h legfeljebb elsőfokú polinomot, amelyre $k = h^2$, akkor $f = g^2 - h^2 = (g+h)(g-h)$ teljesül. Így az f negyedfokú polinomot két másodfokú polinom szorzatára bontjuk, amelyeknek a komplex gyökeit meg tudjuk határozni. A k

legfeljebb másodfokú polinom akkor lesz teljes négyzet, ha a $k = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0, innen adódik a következő definícióban szereplő kubikus rezolvens.

11. Definíció. Az $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ negyedfokú egyenlet **kubikus rezolvensének** az

$$(a\alpha - c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b\right)(\alpha^2 - d) = 0$$

egyenletet nevezzük (ami az α ismeretlenre nézve harmadfokú egyenlet).

12. Tétel (Ferrari módszere). Legyen $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$, és legyen α megoldása az $f(x) = 0$ negyedfokú egyenlet kubikus rezolvensének. Ekkor az

$$(1) \quad \left(\frac{a^2}{4} + 2\alpha - b\right)x^2 + (a\alpha - c)x + (\alpha^2 - d)$$

másodfokú polinom teljes négyzet, azaz valamely $h \in \mathbb{C}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinom négyzete. A $g = x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha$ jelölést használva

$$f = g^2 - h^2 = (g + h)(g - h),$$

vagyis f két másodfokú polinom szorzatára bomlik, és így gyökei a másodfokú egyenlet megoldóképletével meghatározhatók.

13. Megjegyzés. A 11. Definícióban megadott kubikus rezolvenst α hatványaiként átírva a

$$(2) \quad -8\alpha^3 + 4b\alpha^2 + (8d - 2ac)\alpha + a^2d - 4bd + c^2 = 0$$

egyenletet kapjuk.

14. Példa. Megkeressük az $f = x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2$ polinom gyökeit. A (2) formula alapján a kubikus rezolvens α hatványaiként felírva:

$$-8\alpha^3 - 24\alpha^2 - 48\alpha - 64 = 0.$$

A 2. Állításban szereplő helyettesítés most $\beta = \alpha + 1$ alakú. A főegyütthatóval, -8 -cal, történő leosztás után a

$$\beta^3 + 3\beta + 4 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelynek $\beta = -1$ egy megoldása, így $\alpha = -2$ megoldása a kubikus rezolvensnek. Ekkor az (1) polinom

$$6x^2 - 12x + 6 = (\sqrt{6}x - \sqrt{6})^2$$

alakú, tehát Ferrari módszerénél $h = \sqrt{6}x - \sqrt{6}$, továbbá $g = x^2 + 2x - 2$. Ekkor

$$f = (g + h)(g - h) = \left(x^2 + (2 + \sqrt{6})x - 2 - \sqrt{6}\right) \left(x^2 + (2 - \sqrt{6})x - 2 + \sqrt{6}\right).$$

A másodfokú egyenletek megoldásával megkapjuk a gyököket:

$$\frac{-2 - \sqrt{6} \pm \sqrt{18 + 8\sqrt{6}}}{2}, \quad \frac{-2 + \sqrt{6} \pm \sqrt{18 - 8\sqrt{6}}}{2}.$$

15. Feladat. Oldjuk meg az $x^4 - 4x^3 + 8x - 14 = 0$ egyenletet.