

5. feladatsor – Polinomok

5.1. Feladat. Határozzuk meg a f és a g polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a megadott polinomgyűrűkben.

- (a) $f = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $g = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (b) $f = x^5 + x^4 + x^3 + \bar{1}$, $g = x^4 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_2[x]$;
- (c) $f = x^3 - x^2 - 5x - 3$, $g = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (d) $f = -x^4 - 4x^3 + 34x^2 + 76x - 105$, $g = x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 7$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (e) $f = x^5 + x + \bar{2}$, $g = x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_3[x]$;
- (f) $f = \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + x + \bar{2}$, $g = \bar{2}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_5[x]$.

5.2. Feladat. Határozzuk meg az f és a g racionális együtthatós polinomok közös gyökeit, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyökét.

- (a) $f = x^3 - x^2 - 5x - 3$, $g = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$;
- (b) $f = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$, $g = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 12$.

5.3. Feladat. Határozzuk meg az $f = (x + 1)^4(x - 4)^3(x - 3)$ és a $g = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 1)$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

5.4. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értékét úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság $\mathbb{R}[x]$ -ben.

- (a) $(x - 1)(x + 2) \mid ax^3 + x^2 + bx + 3$;
- (b) $(x - 2)(x + 1) \mid ax^3 - x^2 + bx + 4$;
- (c) $(x - 2)(x - 3) \mid ax^3 + bx^2 + x - 4$;
- (d) $(x + 1)(x + 2) \mid x^3 + ax^2 + bx - 1$.

5.5. Feladat. Határozzuk meg, hogy hány-szoros gyöke az f polinomnak a c szám a megadott polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.

- (a) $f = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 12x + 9$, $c = 3$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (b) $f = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54$, $c = 3$, $\mathbb{R}[x]$;
- (c) $f = x^5 - 3ix^4 - 5x^3 + 7ix^2 + 6x - 2i$, $c = i$, $\mathbb{C}[x]$;
- (d) $f = x^4 + \bar{2}x^3 + x + \bar{2}$, $c = \bar{2}$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

5.6. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok komplex gyökeit.

- (a) $x^4 + 16$;
- (b) $x^3 - 8$;
- (c) $x^4 - i$;
- (d) $x^6 - 64$;
- (e) $x^3 + 8i$;
- (f) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$.

5.7. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok irreducibilis felbontását az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

- (a) $x^5 + x^3 - 6x$;
- (b) $x^3 - 8$;
- (c) $x^5 + 8x^2$;
- (d) $x^4 - 25$;
- (e) $x^6 - 27$;
- (f) $x^6 - 2x^4 - 8x^2$.

5.8. Feladat. Adjunk meg minimális fokszámú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelynek

- (a) a 2 kétszeres, a -1 és a $2 + i$ egyszeres gyöke;
- (b) az i háromszoros, a $3 + i$ egyszeres gyöke;
- (c) az $1 + i$ háromszoros, a -2 kétszeres, az i egyszeres gyöke.

5.9. Feladat. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatók értékét úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság $\mathbb{R}[x]$ -ben.

- (a) $(x - 1)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + 2$;
- (b) $(x + 1)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 3$;
- (c) $(x + 2)^2 \mid x^4 + ax^3 + bx^2 + 4$.

5.10. Feladat. Keressük meg a következő polinomok többszörös gyökeit.

- (a) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;
- (b) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$.

5.11. Feladat. Határozzuk meg az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek összegét és szorzatát. (Minden gyököt a multiplicitásának megfelelő számban vegyünk figyelembe.)

- (a) $f = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x + 4$;
- (b) $f = x^4 + 2x^2 - 3x + 2$;
- (c) $f = x^{17} + 2x^{16} + 3x^5 - 4x^2 + 15x$;
- (d) $f = x^{2021} + x^4 + 3x^2 - x + 5$;
- (e) $f = 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 6x + 2$;
- (f) $f = 8x^7 + 6x^6 - 2x^3 + 7x - 2$.

5.12. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek a következő pontok:

- (a) $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$, $C(3, 9)$;
- (b) $A(1, 3)$, $B(2, 8)$, $C(4, 12)$;
- (c) $A(-2, -6)$, $B(1, 0)$, $C(3, 14)$;
- (d) $A(-1, 2)$, $B(0, 0)$, $C(1, 4)$, $D(4, 0)$.

Szorgalmi feladatok

5.13. Feladat. Adjuk meg azokat az $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomokat, amelyeknek legnagyobb közös osztója $x + \bar{1}$, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmus során 3 maradékos osztást végeztünk, és minden hányados x volt.

5.14. Feladat. Adjunk példát olyan $f, g \in \mathbb{R}[x]$ polinomokra, amelyre $\text{lko}(f, g) \sim x^2 + 1$, és a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmus során 4 maradékos osztást végeztünk, azaz a 3. osztásnál kaptuk a legutolsó nemnulla maradékot. Igazoljuk is!

5.15. Feladat. Adjuk meg az $a \in \mathbb{C}$ értékét úgy, hogy az $x^3 - (a + 1)x + 2$ és az $x^2 - ax + 1$ komplex együtthatós polinomoknak legyen közös gyöke.

5.16. Feladat. Határozzuk meg az $x^n - 1$ és az $x^m - 1$ komplex együtthatós polinomok legnagyobb közös osztóját tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén.

5.17. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + x + 1 \mid x^{3k} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$ teljesül $\mathbb{C}[x]$ -ben tetszőleges $k, m, n \in \mathbb{N}$ esetén.

5.18. Feladat. Adjuk meg az a, b együtthatókat úgy, hogy $(x - 1)^2 \mid ax^{n+1} + bx^n + 1$ teljesüljön.

5.19. Feladat. Adjuk meg az összes olyan $a \in \mathbb{C}$ együtthatót, amely esetén az $x^4 - 4x + a \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak van többszörös gyöke.

5.20. Feladat. Határozzuk meg az $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ n -ed fokú nem konstans polinom gyökeinek négyzetösszegét a polinom együtthatóinak segítségével.