

3. feladatsor – Műveletek és algebrák

3.1. Feladat. Művelet-e

- (a) a szokásos összeadás, illetve szorzás a $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ halmazon;
- (b) a szokásos összeadás, illetve szorzás a 3-jegyű pozitív egész számok halmazán;
- (c) az osztás a $\mathbb{Q}$ halmazon.

3.2. Feladat. Készítsük el az alábbi grupoidok művelettábláját, és ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik grupoid idempotens, kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

- (a) $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$;
- (b) $(\{-1, 0, 1\}; \max)$;
- (c) $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \rightarrow)$, ahol $\mathbf{i}$ az igaz, $\mathbf{h}$ a hamis logikai érték.

3.3. Feladat. Az alábbi művelettáblázatok alapján döntsük el, hogy idempotens-e, kommutatív-e a művelet, van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

	$\circ$	a	b	c	d		$*$	a	b	c	d
	a	a	a	a	a		a	a	b	c	d
(a)	b	a	b	c	d	(b)	b	b	c	a	a
	c	b	c	b	b		c	c	a	b	a
	d	d	d	a	a		d	d	d	d	d

3.4. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok asszociatív-e, kommutatív-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keressük meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze. Ez alapján döntsük el, hogy a grupoid, félcsoporthot, monoidot vagy csoportot alkot-e.

- (a) $(\mathbb{Q}; \circ)$, ahol $q \circ r = q$;
- (b) $(\mathbb{N}; *)$, ahol $m * n = mn - m + n$;
- (c) $(\mathbb{R}; \square)$, ahol $x \square y = 12 - 3x - 3y + xy$;
- (d) $(\mathbb{R}; \triangle)$, ahol $x \triangle y = xy - 2(x + y) + 6$;
- (e) $(\mathbb{R}; \sqcup)$, ahol $x \sqcup y = \max(x, y)$;
- (f) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}; \oplus)$, ahol $x \oplus y = |x - y|$.

3.5. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoporthot, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok. $(\text{GL}(\mathbb{R}, n))$ az általános lineáris csoportot jelöli.)

- (a) $(\mathbb{N}; +)$; (b) $(\mathbb{N}_0; +)$; (c) $(\mathbb{Z}; +)$; (d) $(\mathbb{Q}; +)$;
- (e) $(\mathbb{Z}_{12}; +)$; (f) $(\mathbb{Z}; \cdot)$; (g) $(\mathbb{Q}; \cdot)$; (h) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$;
- (i) $(\mathbb{R}^+; \cdot)$; (j) $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$; (k) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$; (l) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$;
- (m) $(\mathbb{Z}; -)$; (n) $(A^A; \cdot)$; (o) $\text{GL}(\mathbb{R}, n)$; (p) $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \rightarrow)$.

3.6. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek érvényesek tetszőleges csoport minden a, b, x, y elemére?

- (a) Ha $a^{-1} = b^{-1}$, akkor $a = b$.
- (b) Ha $xa = ay$, akkor $x = y$.
- (c) Ha $abx = 1$, akkor $x = a^{-1}b^{-1}$.
- (d) Ha $(ab)^2 = a^2b^2$, akkor $ab = ba$.

3.7. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebraikák közül?

- (a) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$; (b) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$; (c) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$; (d) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$
- (e) $(\mathbb{Z}_{12}; +; \cdot)$; (f) $(\mathbb{Z}_{13}; +; \cdot)$; (g) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \cdot)$ (h) $(\mathbb{Z}^{2 \times 2}; +; \cdot)$.

Szorgalmi feladatok

3.8. Feladat. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható az $A = \{a, b\}$ halmazon, amellyel A grupoidot, monoidot, csoportot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelet-táblázatuk nem egyezik meg.)

3.9. Feladat. Legyen az A halmaz n -elemű. Határozzuk meg, hány olyan művelet definiálható A -n, amellyel A grupoidot, kommutatív grupoidot, egységelemes grupoidot alkot. (Két művelet különböző az A halmazon, ha a művelet-táblázatuk nem egyezik meg.)

3.10. Feladat. Tekintsük az $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$ grupoidot, ahol $\circ$ a szokásos leképezésszorozás. Legyen $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto 2x$. Keressünk olyan $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ elemet, melyre $\varphi\psi = \text{id}$, illetve olyat is, melyre $\psi\varphi = \text{id}$.

3.11. Feladat. Igazoljuk, hogy minden véges félcsoporthban van olyan elem, melynek a négyzete önmaga. (A félcsoport művelete szorzás a feladatban.)

3.12. Feladat. Határozzuk meg, hogy hányféleképpen lehet definiálni a műveleteket az $A = \{a, b\}$ halmazon, hogy A a műveletekkel testet alkosson.