

2. feladatsor – Leképezések

2.1. Feladat. Határozzuk meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Döntsük el, hogy melyik parciális leképezés, leképezés.

- (a) $\alpha = \{(x, y) : y = |x|\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- (b) $\beta = \{(x, y) : x = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- (c) $\gamma = \{(x, y) : x = 2^y\} \subseteq \mathbb{R}^2$

2.2. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3x + 1$
- (b) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 2^x - 1, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3^{x-1}$
- (c) $\alpha: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}, \quad \beta: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^2, x \mapsto (x, x-1)$

2.3. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatokban $\mathbb{H}$ jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát, és $\mathbb{E}$ jelöli az emberek halmazát.)

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2$
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, x\beta = x^2$
- (c) $\gamma = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$
- (d) $\delta = \{(x, y) : \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$
- (e) $\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x\varepsilon = \frac{4}{x}$
- (f) $\zeta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n\zeta = |n-3| + 1$
- (g) $\eta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n \text{ pozitív osztóinak száma}$
- (h) $\theta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$
- (i) $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x-1, 1)$
- (j) $\kappa: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x-1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

2.4. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

- (a) nem szürjektív,
- (b) szürjektív, de nem bijektív,
- (c) injektív, de nem bijektív,
- (d) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat!

2.5. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések valóban bijektívek, és adjuk meg az inverzüket.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 3x - 1$
- (b) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta = (x+2)^2 - 4$
- (c) $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\gamma = (2x+1)^2 - 1$

2.6. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között.

- | | |
|---------------------------|------------------------------------|
| (a) $(0; 1)$ és $(-2; 3)$ | (c) $(0; 1)$ és $\mathbb{R}$ |
| (b) $(1; 6)$ és $(4; 7)$ | (d) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$ |

Szorgalmi feladatok

2.7. Feladat. Keressünk olyan ϱ megfeleltetést az $U = \{1, 2, 3\}$ halmazból az U halmazba, amelyre az $F = (\forall x)(\exists y)((x, y) \in \varrho \rightarrow (y, x) \in \varrho)$ formula teljesül, de a $G = (\exists x)(\forall y)((x, y) \in \varrho)$ formula nem. Igazoljuk is! (Lehetséges azt is, hogy nincs ilyen megfeleltetés.)

2.8. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Határozzuk meg, hogy hány A -ból B -be menő megfeleltetés, parciális leképezés, leképezés, injektív leképezés, szürjektív leképezés és bijektív leképezés van.

2.9. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Határozzuk meg, hogy hány A -ból B -be menő szürjektív leképezés van.

2.10. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\alpha : A \rightarrow B$ leképezés injektív, akkor valahányszor $\beta : C \rightarrow A$ és $\beta' : C \rightarrow A$ olyan leképezések, hogy $\beta\alpha = \beta'\alpha$, mindannyiszor $\beta = \beta'$.