

4. Feladatsor - Vektorok

4.1. Feladat. Döntsük el, hogy igazak-e a következő állítások. Ha igaz, indokoljuk, ha nem igaz, adjunk ellenpéldát.

- (a) Az egyelemű vektorrendszer mindig lineárisan független.
- (b) Ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor minden vektor előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
- (c) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor nincs olyan vektor, ami előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
- (d) Ha $\mathbb{R}^3$ -ben három vektor lineárisan függő vektorrendszert alkot, akkor egy egyenesbe esik.
- (e) Ha $\mathbb{R}^3$ -ben három vektor egy egyenesbe esik, akkor lineárisan függő vektorrendszert alkot.
- (f) $\mathbb{R}^3$ -ben bármely 4-elemű vektorrendszer lineárisan függő.

4.2. Feladat. Előáll-e a v_1 és a v_2 vektorok lineáris kombinációjaként a v_3 vektor?

- (a) $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (-4, 7, -10)$, $v_3 = (3, -4, 5)$;
- (b) $v_1 = (2, 0, 4)$, $v_2 = (-1, 2, -4)$, $v_3 = (4, -3, 12)$;
- (c) $v_1 = (1, 0, 1, -2)$, $v_2 = (-4, 2, -2, 2)$, $v_3 = (3, -1, 3, -3)$;
- (d) $v_1 = (-1, 1, 0, -3)$, $v_2 = (4, -5, -2, 13)$, $v_3 = (2, 0, 4, 4)$.

4.3. Feladat. Döntsük el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben.

- (a) $V = \mathbb{R}^2$; $v_1 = (-2, 4)$, $v_2 = (1, -2)$;
- (b) $V = \mathbb{R}^3$; $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$;
- (c) $V = \mathbb{R}^3$; $v_1 = (1, -2, 4)$, $v_2 = (2, -3, 1)$, $v_3 = (-4, 5, 5)$;
- (d) $V = \mathbb{R}^4$; $v_1 = (1, -2, 3, 4)$, $v_2 = (0, -3, 1, 2)$, $v_3 = (2, -4, 5, 9)$;
- (e) $V = \mathbb{R}^5$; $v_1 = (1, -2, 0, 3, 1)$, $v_2 = (0, 0, 2, 4, -2)$, $v_3 = (3, 0, 0, -3, -3)$, $v_4 = (-1, -1, 0, 3, 2)$.

4.4. Feladat. Legyenek u, v és w lineárisan független vektorok valamely valós vektortérben. Mit mondhatunk az alábbi vektorok lineáris függetlenségéről?

- (a) $u + v$, $u - v$, $u - 2v + w$;
- (b) $u + 2v$, $u + 2w$, $-2v + w$;
- (c) $u + 3v + 2w$, $2u + w$, $u + v + w$.

4.5. Feladat. Adjunk meg maximális lineárisan független részrendszert a következő vektorrendszerekben.

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, -1, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, -2, 1)$;
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, -1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, -3, -1)$;
- (c) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, 2, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$;
- (d) $V = \mathbb{R}^4$, $(1, -1, 1, 1)$, $(0, 1, 2, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(-1, 2, 1, 0)$.

4.6. Feladat. Határozzuk meg a v_1 és v_2 vektorok által bezárt szöget.

- (a) $v_1 = (1, \sqrt{3})$, $v_2 = (\sqrt{3}, 1)$;
- (b) $v_1 = (1, -1, 3)$, $v_2 = (5, 2, -1)$;
- (c) $v_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $v_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$;
- (d) $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

4.7. Feladat. Ortogonálisak-e a következő mátrixok?

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \\ \text{(b)} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{(c)} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.8. Feladat. Határozzuk meg az u vektor v vektorra vett merőleges vetületét a megadott $v, u \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén.

- (a) $n = 2, v = (11, 0), u = (4, 3);$
- (b) $n = 3, v = (5, 2, -1), u = (1, -1, 3);$
- (c) $n = 3, v = (2, 3, -1), u = (-4, 14, 6);$
- (d) $n = 4, v = (2, 1, 1, 1), u = (1, 2, 3, 0).$

4.9. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Schmidt-ortogonalizációt az alábbi lineárisan független $\mathbb{R}^n$ -beli vektorrendszereken!

- (a) $u_1 = (4, 4), u_2 = (0, 4);$
- (b) $u_1 = (2, 3, -1), u_2 = (-4, 14, 6);$
- (c) $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (2, 3, 0), u_3 = (1, 6, 1);$
- (d) $u_1 = (1, 1, -1, 1), u_2 = (2, 1, -1, 0), u_3 = (3, -1, 3, 1).$

Szorgalmi feladatok

4.10. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak az $\mathbb{R}^4$ vektortérben a $v_1 = (1, -4, 3, 2), v_2 = (-1, 4, -2, -4), v_3 = (3 - 12, x, 10)$ vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert.

4.11. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak az $\mathbb{R}^4$ vektortérben a $v_1 = (1, -1, 2, 1), v_2 = (1, 1, x, 2), v_3 = (-2, 0, x, -3)$ vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert.

4.12. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak az $\mathbb{R}^4$ vektortérben a $v_1 = (1, x, -1, 2), v_2 = (2, -1, x, 5), v_3 = (1, 10 - 6, 1)$ vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert.

4.13. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_k$ olyan vektorrendszer, amelyben pontosan egy olyan vektor van, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként. Igazoljuk, hogy ez a vektor a nullvektor.

4.14. Feladat. Adjuk meg a $v_1 = (4, -1, 3, -2), v_2 = (8, -2, 6, -4), v_3 = (3, -1, 4, -2), v_4 = (6, -2, 8, -4)$ vektorrendszer összes maximális lineárisan független részrendszerét.

4.15. Feladat. Adjunk meg $\mathbb{R}^3$ -ben olyan 3 hosszú vektort, amely merőleges a v vektorra.

- (a) $v = (-1, 1, 0);$
- (b) $v = (1, 4, 2).$