

## 2. Feladatsor - Számelmélet

**2.1. Feladat.** Határozzuk meg, hogy a következő számok közül melyik osztója melyiknek. Ábrázoljuk is!

- (a) 2, 3, 4, 5, 6, 12;
- (b) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14;
- (c) 0, 1, 2, 3, 6, 11;
- (d) 2, 3, 5, 6, 10, 15, 18, 60, 180;
- (e) 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 32, 128, 256, 342;

**2.2. Feladat.** Mutassuk meg, hogy ha  $a$  és  $b$  egész számok és  $2a + 9b$  osztható 17-tel, akkor  $33a + 89b$  is osztható 17-tel.

**2.3. Feladat.** Igaz-e, hogy ha egy négyjegyű szám számjegyeit fordított sorrendben felírjuk, és az eredeti számmal összeadjuk, akkor az összeg osztható 11-gyel.

**2.4. Feladat.** Igaz-e, hogy bármely 3-mal nem osztható egész szám négyzetéből 1-et levonva 3-mal osztható számot kapunk?

**2.5. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám nem osztható 5-tel, akkor a négyzetéhez 1-et hozzáadva vagy levonva 5-tel osztható számot kapunk.

**2.6. Feladat.** Legyen  $a$  természetes szám. Teljesül-e, hogy ha egy szám osztója  $a^2$ -nek, akkor  $a$ -nak is osztója?

**2.7. Feladat.** Adjuk meg azt a 3 legkisebb egymás után következő természetes számot, amelynek összege négyzetszám és egyben köbszám.

**2.8. Feladat.** Teljesülnek-e a következő oszthatóságok?

- (a)  $15 \mid 2^{16} - 1$ ;
- (b)  $17 \mid 2^{16} - 1$ ;
- (c)  $6 \mid 17^n - 11^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ );
- (d)  $30 \mid n^5 - n$  ( $n \in \mathbb{N}$ );
- (e)  $3 \mid 2 \cdot 7^n - 2$  ( $n \in \mathbb{N}$ );
- (f)  $9 \mid 7^n + 3n - 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**2.9. Feladat.** Miért nem lehet egyszerre egész  $\frac{n+1}{15}$  és  $\frac{n+8}{21}$ , ahol  $n \in \mathbb{N}$ ?

**2.10. Feladat.** Milyen  $n$  egész számra lesz a  $\frac{3n^2+6n+10}{n+2}$  egész szám?

**2.11. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy  $1 + 2 + 3 \mid 1^n + 2^n + 3^n$  teljesül bármely páratlan  $n$  természetes szám esetén.

**2.12. Feladat.** Teljesül-e, hogy tetszőlegesen megadott nyolc darab különböző háromjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő különböző úgy, hogy ezeket egymás mellé írva, a kapott szám 7-tel osztható?

**2.13. Feladat.** Igaz-e, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul.

**2.14. Feladat.** Van-e olyan négyzetszám, amely

- (a) 7-tel osztva 3-at ad maradékul;

- (b) 8-cal osztva 3-at ad maradékul;
- (c) 6-tal osztva 3-at ad maradékul.

**2.15. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy bármely egész szám négyzetét 16-tal osztva, maradékul négyzetszámot kapunk.

**2.16. Feladat.** Osszuk el az  $a$  egész számot maradékosan  $b$ -vel.

- (a)  $a = 4683$ ,  $b = 243$ ;
- (b)  $a = -15370$ ,  $b = 495$ ;
- (c)  $a = 20967$ ,  $b = -58$ ;
- (d)  $a = -3588$ ,  $b = -256$ .

**2.17. Feladat.** Osszuk el maradékosan az  $f$  polinomot a  $g$  polinommal.

- (a)  $f = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 5$ ,  $g = x + 1$ ;
- (b)  $f = x^4 + x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ ,  $g = x^2 + 3x - 1$ ;
- (c)  $f = x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 3x - 2$ ,  $g = x^2 + 2x + 1$ ;
- (d)  $f = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 9x + 3$ ,  $g = 2x^2 - 4x + 2$ .

**2.18. Feladat.** Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi  $a$ ,  $b$  egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket.

- (a)  $a = 78$ ,  $b = 30$ ;
- (b)  $a = 368$ ,  $b = 161$ ;
- (c)  $a = 539$ ,  $b = 1001$ ;
- (d)  $a = -1253$ ,  $b = -3241$ ;
- (e)  $a = -1183$ ,  $b = 1573$ .

**2.19. Feladat.** Megadhatók-e  $b$  és  $c$  egész számok úgy, hogy tetszőleges  $a$  egészre  $\text{l.n.k.o}(a, b) \sim 1$  és  $\text{l.n.k.o}(a, c) \sim a$  teljesüljön?

**2.20. Feladat.** Legyen  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Határozzuk meg az alábbi legnagyobb közös osztókat.

- (a)  $\text{l.n.k.o}(a, 2a + 1)$ ;
- (b)  $\text{l.n.k.o}(3a + 5, 7a + 12)$
- (c)  $\text{l.n.k.o}(11a + 5b, 13a + 6b)$ ;
- (d)  $\text{l.n.k.o}(3a^2 + 1, 4a^2 + 3)$ .

**2.21. Feladat.** Legyen  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Ha  $b \mid a$ , akkor határozzuk meg a következő legnagyobb közös osztók lehetséges értékeit.

- (a)  $\text{l.n.k.o}(b, a - b)$ ;
- (b)  $\text{l.n.k.o}(b, 2a + 3b)$ ;
- (c)  $\text{l.n.k.o}(11a + 5b, 29a + 13b)$ .

**2.22. Feladat.** Legyen  $a, b \in \mathbb{Z}$  és  $\text{l.n.k.o}(a, b) \sim 5$ , adjuk meg az alábbi legnagyobb közös osztók lehetséges értékeit.

- (a)  $\text{l.n.k.o}(a + b, a - b)$ ;
- (b)  $\text{l.n.k.o}(a + 2b, 4a - b)$ .

**2.23. Feladat.** Mutassuk meg, hogy a következő számok összetett számok.

- (a)  $10^6 - 5^7$ ;
- (b)  $10^{100} - 7$ ;
- (c)  $4^{20} - 1$ ;
- (d)  $1000027$ ;

- (e)  $1000 \dots 001$  (2012 darab 0);  
 (f)  $1! + 2! + 3! + \dots + 100!$ .

**2.24. Feladat.** Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből állítsunk össze öt különböző prímszámot, hogy minden számjegyet pontosan egyszer használjunk fel.

**2.25. Feladat.** Az  $a$  természetes szám értékét adjuk meg úgy, hogy  $a$ ,  $a + 4$  és  $a + 14$  számok prímszámok legyenek. Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy  $a$  egész szám, és a megfelelő prímelemeket keressük.

**2.26. Feladat.** Adjuk meg az összes olyan  $a$  természetes számot, amelyre  $a$ ,  $a + 10$  és  $a + 14$  is prímszám. Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy  $a$  egész szám, és a megfelelő prímelemeket keressük.

**2.27. Feladat.** Adjuk meg az összes olyan  $p$  prímszámot, amelyre  $8p^2 + 1$  is prímszám.

**2.28. Feladat.** Teljesül-e, hogy bármely 3-nál nagyobb prímszám négyzete 24-gyel osztva 1-et ad maradékul.

**2.29. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha  $2^n - 1$  prímszám valamely  $n \in \mathbb{N}$ -re, akkor  $n$  is prímszám.

**2.30. Feladat.** Teljesül-e, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímszámok összege osztható 12-vel?

**2.31. Feladat.** Határozzuk meg azokat a  $p$  prímszámokat, melyekre  $2p - 1$  és  $2p + 1$  ikerprímszám.

### Szorgalmi feladatok

**2.32. Feladat. Extra** (A gyakorlatvezető osztja szét a hallgatók között.) Adjunk szabályt a 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31 és 37 számokkal való oszthatóság eldöntésére. Bizonyítsuk is!

**2.33. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy  $64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$  teljesül bármely  $n \in \mathbb{N}$ -re.

**2.34. Feladat.** Van-e olyan 2013-ra végződő egész szám, amely osztható 53-mal?

**2.35. Feladat.** Adjuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, ami osztható 999-cel, de nem tartalmaz 9-es számjegyet.

**2.36. Feladat.** Melyik az az ötjegyű szám, mely egyenlő számjegyei szorzatának 45-szörösével?

**2.37. Feladat.** (A 2.11. feladat általánosítása.) Teljesül-e a tetszőleges páratlan  $n$  természetes szám esetén a következő:

$$1 + 2 + \dots + m \mid 1^n + 2^n + \dots + m^n \quad (m \in \mathbb{N}).$$

**2.38. Feladat.** Tudjuk, hogy 10 (nem feltétlenül különböző) természetes szám összege 1001. Határozzuk meg ezen számok legnagyobb közös osztójának lehetséges legnagyobb értékét.

**2.39. Feladat.** Melyik az a két természetes szám, amelyek legnagyobb közös osztója 6, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmusban 3 maradékos osztást végeztünk, ahol a hányadosok egymás utáni természetes számok voltak (növekvő sorrendben), és a hányadosok összege 9.

**2.40. Feladat.** Adjunk meg végtelen sok  $a, b \in \mathbb{N}$  számpárt úgy, hogy a rajtuk végrehajtott euklideszi algoritmus 3 lépésből álljon (azaz a 2. osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot), és  $\text{l.n.k.o}(a, b) = 1$  teljesüljön.

**2.41. Feladat.** Keressük meg azokat a legkisebb  $a$  és  $b$  ( $a > b$ ) természetes számokat, melyekhez tartozó euklideszi algoritmus 6 lépésből áll (azaz az 5. osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot). Általánosítsuk  $n$  lépésre.

**2.42. Feladat.** Igaz-e, hogy bármely természetes szám egy számjegyének megváltoztatásával prímszámmá alakítható?

**2.43. Feladat.** Az  $a^2 + a + 41$  kifejezés prímszám, ha  $a = 1, 2, 3, \dots, 30$ . Igaz-e, hogy  $a^2 + a + 41$  minden  $a$  természetes számra prímszám?

**2.44. Feladat.** Két prímszám különbsége 100. Egymás után írva őket újabb prímszámot kapunk. Melyek ezek a számok?

**2.45. Feladat.** Legyen  $p$  prímszám, és jelölje  $A$  azt a halmazt, ami  $p$  darab egymás után következő természetes számot tartalmaz. Fel lehet-e bontani az  $A$  halmazt két diszjunkt részhalmazra, amelynek egyesítése kiadja  $A$ -t, és a két halmazban lévő számok szorzata egyenlő.

**2.46. Feladat.** Határozzuk meg, hogy a  $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \dots \cdot 200$  szorzat prímtényezői felbontásában a 2 hanyadik hatványon szerepel.