

1. Feladatsor - Algebrai azonosságok

1.1. Feladat. Bizonyítsuk be teljes indukció segítségével, hogy bármely n természetes számra az $n^3 - n$ különbségnek a 6 mindig osztója.

1.2. Feladat. Bizonyítsuk be teljes indukció segítségével, hogy bármely n természetes számra

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

1.3. Feladat. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely $n \in \mathbb{N}$ -re $a^{n-1} = 1$, ahol a tetszőleges pozitív valós szám.

Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$.

Ha feltesszük, hogy a tétel igaz $n = 1, 2, \dots, k$ esetre, akkor $k+1$ -re a következőt kapjuk:

$$a^{(k+1)-1} = a^k = \frac{a^{k-1} \cdot a^{k-1}}{a^{k-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Tehát az állítás igaz $k+1$ -re is.

1.4. Feladat. Végezzük el a hatványozást.

- (a) $(3x + 4)^2$;
- (b) $(y^3 - 7)^2$;
- (c) $(2x^4 - 3y)^2$;
- (d) $(2x + 3)^3$;
- (e) $(y^2 - 2)^3$;
- (f) $(xy^2 + 2y^3)^3$;
- (g) $(x^k + 3y^{2k})^3$, ($k \in \mathbb{N}$).

1.5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványokat.

- (a) $(x + 2y)^4$;
- (b) $(2x - \frac{3}{x})^4$;
- (c) $(2x^2 + xy)^5$;
- (d) $(2x + 3y^2 - z)^2$;
- (e) $(x - y + z)^3$;
- (f) $(x + y - 2z + u)^2$.

1.6. Feladat. Adjuk meg az f kifejezésekben a t együtthatóját.

- (a) $f = (-x + 2)^6$, $t = x^4$;
- (b) $f = (y - 1)^8$, $t = y^6$;
- (c) $f = (2z - 3)^5$, $t = z^2$;
- (d) $f = (3x - 2y + 2u - 3v)^5$, $t = vy^4$;
- (e) $f = (-y + z - 2x - 3b)^7$, $t = z^6b$;
- (f) $f = (-x - 3c + u + 2y)^6$, $t = x^2uy^3$;
- (g) $f = (3u + v + 2a - b)^5$, $t = vab^3$.

1.7. Feladat. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

- (a) $12^{21} - 5^{27}$;
- (b) $x^6y^2 - u^4v^4$;
- (c) $x^8 - y^4$;

- (d) $x^3 + 8$;
- (e) $y^5 + 3^5$;
- (f) $x^{3k} - x^{2k}$, ($k \in \mathbb{N}$);
- (g) $a^6 + b^6$;
- (h) $2^{18} + 3^{18}$;
- (i) $x^{52} + y^{182}$;
- (j) $35 \cdot 5^{10} + 3^{10}$;
- (k) $37^n + 15 \cdot 21^n$;
- (l) $64 - 96a + 48a^2 - 8a^3$.

1.8. Feladat. Számítsuk ki a következő hatványok értékét.

- (a) $16^{\frac{3}{2}}$;
- (b) $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}}$;
- (c) $32^{1,2}$;
- (d) $27^{-\frac{4}{3}}$;
- (e) $0,0625^{-\frac{3}{4}}$.

1.9. Feladat. Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát. Írjuk fel racionális kitevőjű hatványként a kifejezéseket.

- (a) $\frac{\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{y}}{\sqrt{y}}$;
- (b) $\frac{\sqrt{u}\sqrt{u}}{\sqrt[4]{u^7}}$;
- (c) $\frac{\sqrt[3]{b^2}\sqrt[4]{b^5}}{\sqrt[4]{b^3}}$;
- (d) $\frac{\sqrt[4]{y^3}y^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{8}}}{\sqrt{\sqrt[4]{y}}\sqrt{y^{-3}}}$.
- (e) $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^2}}$;
- (f) $\sqrt[5]{x^2}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}$;
- (g) $\sqrt[3]{x^4}\sqrt[6]{x}\sqrt{x^7}$;
- (h) $\sqrt[5]{y^4}\sqrt[3]{y^4}\sqrt[7]{y^3}$;

Szorgalmi feladatok

1.10. Feladat. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely $n \in \mathbb{N}$ -re

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$.

Tegyük fel, hogy a tétel igaz $n = k$ esetre, ekkor $k + 1$ -re a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k-1) \cdot k} + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1}.$$

Tehát az állítás igaz $k + 1$ -re is.

1.11. Feladat. Mi a $(3x^2 + \frac{2}{x})^6$ kifejezésben a konstans tag a hatványozás elvégzése és a rendezés után?

1.12. Feladat. Mi lesz x^{18} együtthatója az $(1 + x^3 - x^4)^{12}$ polinomban a hatványozás elvégzése és a rendezés után?

1.13. Feladat. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést, ahol $x, a \in \mathbb{R}^+$, $x \neq a$

$$\left[(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a})^{-1} + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a})^{-1} \right]^{-2} \cdot \frac{4\sqrt{x} + 4\sqrt{a}}{x - a}.$$