GEOMETRIAI SZERKESZTHETŐSÉG

2.1. Feladat. Négy feladat geometriai szerkeszthetőségről (okt.21. 1.-4. gyak.H.F.):
`https://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/absztot_2025osz/index.html`

MEGOLDÁS.

2.2. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, testet az alábbiakban megadott algebrák közül?

(a) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$; (b) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$; (c) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$; (d) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$
(e) $(\mathbb{C}; +; \cdot)$; (f) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; +; \cdot)$; (g) $(\mathbb{C}^{3\times 3}; +; \cdot)$ (h) $(\mathbb{Z}^{2\times 2}; +; \cdot)$;
(i) $(\mathbb{Z}_4; +; \cdot)$; (j) $(\mathbb{Z}_{13}; +; \cdot)$; (k) $(\mathbb{R}[x]; +; \cdot)$; (l) $(\mathbb{Z}[i]; +; \cdot)$.

MEGOLDÁS.

(a) nem gyűrű; (b) gyűrű; (c) test;
(d) test; (e) test; (f) gyűrű;
(g) gyűrű; (h) gyűrű; (i) gyűrű;
(j) test; (k) gyűrű.

2.3. Feladat. Határozzuk meg a H halmaz által generált (rész)gyűrűt és (rész)testet.

(a) $H = \mathbb{Z} \cup \{\sqrt{2}\}$;

(b) $H = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$;

(c) $H = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt[3]{2}\}$.

MEGOLDÁS.

(a) gyűrűként: $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$, testként $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

(b) gyűrűként és testként is $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$;

(c) gyűrűként és testként is $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$.

2.4. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek-e a megadott T testek feletti polinomgyűrűkben.

(a) $f = x^3 - x^2 - x - 2, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

(b) $f = x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

(c) $f = x^4 + x^2 - 6, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

(d) $f = 2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

(e) $f = x^2 + 3x + 12, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

(f) $f = 2x^2 + 2x + 2, \quad T = \mathbb{Z}_3$;

(g) $f = x^3 + x^2 + 1, \quad T = \mathbb{Z}_2$;

(h) $f = x^4 + x^2 + 1, \quad T = \mathbb{Z}_2$.

MEGOLDÁS.

(a) Rac. gyök: 2, $(x-2)(x^2+x+1)$, nem irreducbilis egyik felett sem;

(b) Rac. gyök: $1, -2$, $(x+1)(x-2)(x^2+1)^2$, nem irreducibilis egyik felett sem;

(c) $(x^2+3)(x^2-2)$, nem irreducibilis egyik felett sem;

(d) Schönemann-Eisenstein tétel, $p=3$ $\mathbb{Q}$ felett irred, többi felett nem;

(e) diszkrimináns negatív, $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett irred, $\mathbb{C}$ felett nem;

(f) 1 gyöke, nem irred;

(g) nincs gyöke irred;

(h) nincs gyöke, de $f = x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)^2$, nem irred.

2.5. Feladat. Határozzuk meg az α minimálpolinomját a T testek felett. (Lásd még az 1. feladatsor **66. feladatát**.)

(a) $\alpha = -4i, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

(b) $\alpha = \sqrt{3}+2, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

(c) $\alpha = \sqrt{2}+i, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

(d) $\alpha = 2\pi+3, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

(e) $\alpha = \sqrt{3}+\sqrt{5}, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

MEGOLDÁS.

(a) $\mathbb{C}[x]\colon x+4i, \quad \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]\colon x^2+16$;

(b) $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]\colon x-(\sqrt{3}+2), \quad \mathbb{Q}[x]\colon x^2-4x+1$;

(c) $\mathbb{C}[x]\colon x-(\sqrt{2}+i), \quad \mathbb{R}[x]\colon x^2-2\sqrt{2}x+3, \quad \mathbb{Q}[x]\colon x^4-2x^2+9$;

(d) $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]\colon x-(2\pi+3), \quad \mathbb{Q}[x]\colon$ nincs;

(e) $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]\colon x-(\sqrt{3}+\sqrt{5}), \quad \mathbb{Q}[x]\colon x^4-16x^2+4$.

2.6. Feladat. Oldjuk meg az u, v ismeretlen polinomokra az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrűben.

(a) $(x^3+x^2+2)u+(x+2)v = 1, \quad \mathbb{Z}_3[x]$;

(b) $(x^2-2x-3)u+(x^2+2x-15)v = x^2-3x, \quad \mathbb{R}[x]$;

(c) $(x^5+x^4+x^3+1)u+(x^4+1)v = x^2+1, \quad \mathbb{Z}_2[x]$.

MEGOLDÁS.

(a) Egy megoldás: $u_0 = 1$, $v_0 = 2x^2+x+1$.

(b) Egy megoldás: $u_0 = -\frac{1}{4}x$, $v_0 = \frac{1}{4}x$,
általános: $u = -\frac{1}{4}x+(x+5)t$, $v = \frac{1}{4}x-(x+1)t$, $t \in \mathbb{R}[x]$;

(c) Egy megoldás: $u_0 = x$, $v_0 = x^2+x+1$,
általános: $u = x+(x^2+1)t$, $v = x^2+x+1+(x^3+x^2+1)t$, $t \in \mathbb{Z}_2[x]$.

2.7. Feladat. Határozzuk meg az elemek inverzét: 1. feladatsor **65. feladat**.

MEGOLDÁS.

(a) $-\frac{2+3\sqrt{2}}{14}$;

(b) $\sqrt[3]{2}-1$;

(c) nem tom.

2.8. Feladat. Számoljunk polinom szerinti maradékosztály-gyűrűkben:
1. feladatsor **63., 64. feladat**.

MEGOLDÁS. **63. feladat.**

(a) $\overline{x^2}$;

(b) $\overline{2x^2+x}$;

(c) $\overline{2x^2+x+1}$.

64. feladat.

(a) $\overline{x}^{-1}=\overline{x+1}$, $\overline{x^2}^{-1}=x^2+x+1$;

(b) $\overline{2x^2+1}^{-1}=\overline{x}$, $\overline{x}/\overline{x+1}=\overline{x^2+2x+1}$.

2.9. Feladat. Döntsük el, hogy testet alkotnak-e a megadott maradékosztály-gyűrűk, és határozzuk meg az elemeik számát: 1. feladatsor **62. feladat**.

MEGOLDÁS.

(a) test, 2^3 elemű;

(b) nem test, 5^2 elemű;

(c) nem test, 5^3 elemű;

(d) test, 3^2 elemű;

(e) nem test, 3^3 elemű.

2.10. Feladat.

(1) Adjuk meg az alábbi α elem minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett, határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\alpha) \mid \mathbb{Q}$ testbővítés fokszámát, és adjuk meg $\mathbb{Q}(\alpha)$ egy bázisát $\mathbb{Q}$ felett.

(2) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

(3) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\alpha) = [\mathbb{Q} \cup \{\beta, \gamma\}]_t$

(a) $\alpha = \sqrt[6]{2}$, $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt[3]{2}$;

(b) $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$;

(c) $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $\beta = \sqrt{3}$, $\gamma = i$.

MEGOLDÁS.

(a) (1): minimálpoinom: x^6-2, $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}):\mathbb{Q}]=6$, bázis: 1, $\alpha=\sqrt[6]{2}$, $\alpha^2=\sqrt[3]{2}$, $\alpha^3=\sqrt{2}$, $\alpha^4=\sqrt[3]{2^2}$, $\alpha^5=\sqrt[6]{2^5}$,
(2): $\sqrt{2}=\alpha^3$, $\sqrt[3]{2}=\alpha^2$,
(3): $\sqrt[6]{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$, így $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) \subseteq [\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{2},\sqrt[3]{2}\}]_t$, és (2) alapján $[\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{2},\sqrt[3]{2}\}]_t \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$;

(b) (1): minimálpoinom: x^4-10x^2+1, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=4$, bázis: 1, $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\alpha^2=5+2\sqrt{6}$, $\alpha^3=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$,
(2): $\sqrt{2}=-\frac{9}{2}\alpha+\frac{1}{2}\alpha^3=-\frac{9}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\frac{1}{2}(11\sqrt{2}+9\sqrt{3})$,
$\sqrt{3}=\frac{11}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha^3=\frac{11}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\frac{1}{2}(11\sqrt{2}+9\sqrt{3})$,
(3): $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in[\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}]_t$, tehát $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})\subseteq[\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}]_t$, és (2) alapján $[\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}]_t \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

(c) (1): minimálpoinom: $x^4 - x^2 + 1$, $\left[\mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) : \mathbb{Q}\right] = 4$, bázis: 1, $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $\alpha^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\alpha^3 = i$,
(2): $\sqrt{3} = 2\alpha - \alpha^3 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) - i$,
$i = \alpha^3$,
(3): $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in [\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{3}, i\}]_t$, tehát $\mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \subseteq [\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{3}, i\}]_t$, és (2) alapján $[\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{3}, i\}]_t \subseteq \mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$;

2.11. Feladat. Az alábbi α, β, γ esetén, fokszámtétel segítségével igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta, \gamma)$, és adjuk meg egy bázisát.

(a) $\alpha = \sqrt[6]{2}$, $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt[3]{2}$;

(b) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = \sqrt{3}$;

(c) $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $\beta = \sqrt{3}$, $\gamma = i$.

MEGOLDÁS. A feladatmegoldás menete:

(1) Meghatározzuk $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$-t a minimálpolionom fokszámából.

(2) Meghatározzuk $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]$-t a minimálpolinom fokszámából, majd igazoljuk, hogy $\beta \notin \mathbb{Q}(\gamma)$. (Természetesen β és γ szerepe rendre felcserélhető.) Meghatározzuk $[\mathbb{Q}(\beta, \gamma) : \mathbb{Q}(\gamma)]$-t. A fokszámtétel: $[\mathbb{Q}(\beta, \gamma) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta, \gamma) : \mathbb{Q}(\gamma)] \cdot [\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]$ segítségével megkapható, hogy $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta, \gamma) : \mathbb{Q}]$.

(3) Igazoljuk, hogy $\alpha \in \mathbb{Q}(\beta, \gamma)$, így $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\beta, \gamma)$, de a bővítés foka megegyzik, tehát $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta, \gamma)$.

(4) Ezeknél a példáknál egy bázis megkapható a $\mathbb{Q}(\gamma)$ és $\mathbb{Q}(\beta)$ testek $\mathbb{Q}$ feletti egy-egy bázisának szorzataként. (Általában egy bázis a $\mathbb{Q}(\gamma) \mid \mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}(\beta, \gamma) \mid \mathbb{Q}(\gamma)$ egy-egy bázisának szorzataként kapható meg.)

2.12. Feladat. Határozzuk meg véges testek egy elemének minimálpolinomját: 1. feladatsor **67. feladat**.

MEGOLDÁS.

(a) $x^2 + 1$;

(b) $x^3 + x + 1$;

(c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2.13. Feladat. Döntsük el, hogy szerkeszthető-e a az alábbi α valós szám. (A szerkesztés alaptese a racionális számtest.)

(a) $\alpha = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\sqrt{6} - (1 + \sqrt{7})} + \sqrt[3]{8}\right)$;

(b) $\alpha = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\sqrt{6} - (1 + \sqrt{7})} + \sqrt[3]{2}\right)$;

(c) $\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}\sqrt{6} - 1 + \sqrt[5]{32}} + \sqrt[3]{7}$;

(d) $\alpha = \sqrt[13]{\frac{\cos \pi}{17}}$.

MEGOLDÁS. Ha az α valós szám szerkeszthető, akkor eleme $\mathbb{Q}$ egy olyan bővítésének, amelynek fokszáma kettőhatvány.

(a) igen;

(b) nem;

(c) nem;

(d) nem.

2.14. Feladat. Létezik-e euklideszi szerkesztési eljárás, amellyel

(a) tetszőleges adott kocka esetén ötször akkora térfogatú kockát lehet szerkeszteni?

(b) tetszőleges körhöz vele azonos területű háromszöget lehet szerkeszteni?

(c) 1 fokos szög szerkeszthető?

(d) 2 fokos szög szerkeszthető?

(e) 3 fokos szög szerkeszthető?

MEGOLDÁS.

(a) Ha az α valós szám szerkeszthető, akkor eleme $\mathbb{Q}$ egy olyan bővítésének, amelynek fokszáma kettőhatvány, de $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}):\mathbb{Q}] = 3$, így nem szerkeszthető.

(b) A háromszög területe: $\frac{a\cdot m_a}{2}$ algebrai, mert a, m_a algebrai $\mathbb{Q}$ felett, és az algebrai számok résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben. Az egységnyi sugarú kör területe π, ami transzcendens, így nem szerkeszthető ilyen területű háromszög.

(c)–(e) Ha $\alpha(< 180)$ osztója 360-nak, akkor α fokos szög pontosan akkor szerkeszthető, ha $\frac{360}{\alpha}$-oldalú szabályos sokszög szerkeszthető. Alkalmazható a Gauss–Wantzel tétel.

(c) Nem szerkeszthető 1 fokos szög, mert $3^2 \mid 360$, így szabályos 360-oldalú sokszög nem szerkeszthető (ld. Gauss–Wantzel tétel).

(d) Nem szerkeszthető 2 fokos szög, mert $3^2 \mid 180$, így szabályos 180-oldalú sokszög nem szerkeszthető (ld. Gauss–Wantzel tétel).

(e) Szerkeszthető 3 fokos szög, mert $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, így szabályos 120-oldalú sokszög szerkeszthető (ld. Gauss–Wantzel tétel).