
ABSZTRAKT ALGEBRA

MTNM514G

2. FELADATSOR

GEOMETRIAI SZERKESZTHETŐSÉG, GYŰRŰK

2.1. Feladat. Négy feladat geometriai szerkeszthetőségről (okt.21. 1.-4. gyak.H.F.):

https://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/absztot_2025oszf/index.html

2.2. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, testet az alábbiakban megadott algebrák közül?

- (a) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$; (b) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$; (c) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$; (d) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$
(e) $(\mathbb{C}; +; \cdot)$; (f) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \cdot)$; (g) $(\mathbb{C}^{3 \times 3}; +; \cdot)$ (h) $(\mathbb{Z}^{2 \times 2}; +; \cdot)$;
(i) $(\mathbb{Z}_4; +; \cdot)$; (j) $(\mathbb{Z}_{13}; +; \cdot)$; (k) $(\mathbb{R}[x]; +; \cdot)$; (l) $(\mathbb{Z}[i]; +; \cdot)$.

2.3. Feladat. Határozzuk meg a H halmaz által generált (rész)gyűrűt és (rész)testet.

(a) $H = \mathbb{Z} \cup \{\sqrt{2}\};$

(b) $H = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\};$

(c) $H = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt[3]{2}\}.$

2.4. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek-e a megadott T testek feletti polinomgyűrűben.

(a) $f = x^3 - x^2 - x - 2, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C};$

(b) $f = x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C};$

(c) $f = x^4 + x^2 - 6, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C};$

(d) $f = 2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C};$

(e) $f = x^2 + 3x + 12, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C};$

(f) $f = 2x^2 + 2x + 2, \quad T = \mathbb{Z}_3;$

(g) $f = x^3 + x^2 + 1, \quad T = \mathbb{Z}_2;$

(h) $f = x^4 + x^2 + 1, \quad T = \mathbb{Z}_2.$

2.5. Feladat. Határozzuk meg az α minimálpolinomját a T testek felett. (Lásd még az 1. feladatsor 66. feladatát.)

(a) $\alpha = -4i, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C};$

(b) $\alpha = \sqrt{3} + 2, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C};$

(c) $\alpha = \sqrt{2} + i, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C};$

(d) $\alpha = 2\pi + 3, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C};$

(e) $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}, \quad T = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}.$

2.6. Feladat. Oldjuk meg az u, v ismeretlen polinomokra az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrűben.

(a) $(x^3 + x^2 + 2)u + (x + 2)v = 1, \quad \mathbb{Z}_3[x];$

(b) $(x^2 - 2x - 3)u + (x^2 + 2x - 15)v = x^2 - 3x, \quad \mathbb{R}[x];$

(c) $(x^5 + x^4 + x^3 + 1)u + (x^4 + 1)v = x^2 + 1, \quad \mathbb{Z}_2[x].$

2.7. Feladat. Határozzuk meg az elemek inverzét: 1. feladatsor **65. feladat.**

2.8. Feladat. Számoljunk polinom szerinti maradékosztály-gyűrűkben:

1. feladatsor **63., 64. feladat.**

2.9. Feladat. Döntsük el, hogy testet alkotnak-e a megadott maradékosztály-gyűrűk, és határozzuk meg az elemeik számát: 1. feladatsor **62. feladat.**

2.10. Feladat.

- (1) Adjuk meg az alábbi α elem minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett, határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\alpha) \mid \mathbb{Q}$ testbővítés fokszámát, és adjuk meg $\mathbb{Q}(\alpha)$ egy bázisát $\mathbb{Q}$ felett.
- (2) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi $\beta, \gamma \in \mathbb{Q}(\alpha)$.
- (3) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\alpha) = [\mathbb{Q} \cup \{\beta, \gamma\}]_t$
- (a) $\alpha = \sqrt[6]{2}, \beta = \sqrt{2}, \gamma = \sqrt[3]{2};$
- (b) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \beta = \sqrt{2}, \gamma = \sqrt{3};$
- (c) $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \beta = \sqrt{3}, \gamma = i.$

2.11. Feladat. Az alábbi α, β, γ esetén, fokszámtétel segítségével igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta, \gamma)$.

- (a) $\alpha = \sqrt[6]{2}, \beta = \sqrt{2}, \gamma = \sqrt[3]{2};$
- (b) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \beta = \sqrt{2}, \gamma = \sqrt{3};$
- (c) $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \beta = \sqrt{3}, \gamma = i.$

2.12. Feladat. Határozzuk meg véges testek egy elemének minimálpolinomját: 1. feladatsor **67. feladat.**