

ABSZTRAKT ALGEBRA

feladatok az osztatlan tanárképzéshez

1. feladat. Döntsük el, hogy az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz alábbi részhalmazai előállnak-e $A \times B$ alakban alkalmasan megválasztott A és B halmazokkal.

- (a) $\{(x, y) : 2 \leq x < 3, -1 < y < 2\}$,
- (b) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$,
- (c) $\{(x, y) : x = 2 \text{ és } y \text{ tetszőleges}\}$,
- (d) $\{(x, y) : x - y \in \mathbb{Z}\}$.

2. feladat. Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

- (a) $\{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,
- (b) $\{(1, 5), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (3, 2), (4, 2), (4, 6)\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,
- (c) $\{(a, b) : |a| = |b|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon,
- (d) $\{(a, b) : a^2 + b^2 = 1\}$ a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán,
- (e) $\{((a, b), (c, d)) : a + d = b + c\}$ az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon,
- (f) $\{(a, b) : |a - b| > 1\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon,
- (g) $\{(a, b) : a/b \leq b/a\}$ az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon,
- (h) $\{(e, f) : e \text{ és } f\text{-nek van közös pontja}\}$ a sík egyeneseinek halmazán.

3. feladat. Adjon meg olyan relációt, mely

- (a) reflexív és szimmetrikus, de nem tranzitív,
- (b) reflexív és tranzitív, de nem szimmetrikus,
- (c) szimmetrikus és tranzitív, de nem reflexív.

4. feladat. Adja meg az A halmazon értelmezett ρ ekvivalenciához tartozó osztályozást.

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}$,
- (b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$,
- (c) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x, y) : xy > 0 \text{ vagy } x = y = 0\}$,
- (d) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x, y) : (\exists a \in \mathbb{Z})(3a \leq x, y < 3a + 3)\}$,
- (e) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $\rho = \{(a, b) : 3 \mid b - a\}$,
- (f) $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\rho = \{(H, G) : |H| = |G|\}$,
- (g) $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$, $\rho = \{(x, y) : x\text{-nek és } y\text{-nak van közös prímosztója}\}$,
- (h) $A = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$, $\rho = \{(x, y) : x \text{ és } y \text{ számjegyeinek összege egyenlő}\}$,
- (i) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x, y) : x^2 + y^2 \text{ páros}\}$.

5. feladat. Adjunk meg olyan osztályozást az $\{1, 2, \dots, 8\}$ halmazon, melynek 3 osztálya van, és melyhez tartozó ρ ekvivalenciára teljesülnek a következő feltételek:

- (a) $(1, 3), (2, 6) \in \rho$,
- (b) $(1, 2), (3, 4) \in \rho$,
- (c) $(1, 2) \in \rho$, és $(1, 3), (2, 4), (3, 5) \notin \rho$,
- (d) $(1, 3) \in \rho$, és $(3, 5), (2, 7), (3, 4) \notin \rho$.

6. feladat. Hány olyan ekvivalenciája van az $\{1, 2, \dots, 8\}$ halmaznak, melyhez tartozó osztályozásnak

- (a) 3 osztálya van, melyek elemszáma 1, 2 és 5,
- (b) 3 osztálya van.

7. feladat. Hány eleme van azon $\rho \subseteq \{1, 2, \dots, 7\}^2$ ekvivalenciának, melynek

- (a) 2 osztálya van, melyek elemszáma 3 és 4,
- (b) 3 osztálya van, melyek elemszáma 1, 2, 4,

8. feladat. Hány eleme lehet egy A halmazon megadott $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációnak, ha $|A| = 1, 2$ vagy 4.

9. feladat. Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek alkotnak részbenrendezést, és melyek rendezést a megadott halmazon:

- (a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\} \subseteq \{1, 2, \dots, 6\}^2$,
- (b) $\{(x, x) : x \in \{1, 2, \dots, 8\}\} \cup \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\} \subseteq \{1, 2, \dots, 8\}^2$,
- (c) $(\mathbb{Z}; \mid) = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \mid b\}$,
- (d) $\{(A, B) \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \times \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) : |A| \leq |B|\}$,

- (e) $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a < b\}$,
 (f) $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^- : a \mid b\}$

10. feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek? Melyek rendezések? A feladatban D_n az n pozitív osztóinak halmazát jelöli.

- (a) $(D_{30}; \leq)$,
 (b) $(D_{30}; \mid)$,
 (c) $(D_{48} \cap D_{120}; \mid)$,
 (d) $(C; \mid)$, ahol $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$,
 (e) $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$,
 (f) $(B; \subseteq)$, ahol $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
 (g) $(H; \subseteq)$, ahol $H = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$, és $a \subseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye.
 (h) $(E; \triangleleft)$, ahol $E = \{121, 123, 222, 145, 346, 743, 777, 325, 220\}$, és

$$\overline{abc} \triangleleft \overline{def} \iff (a < d) \vee ((a = d) \wedge (b < e)) \vee ((a = d) \wedge (b = e) \wedge (c \leq f)).$$

11. feladat. Adjunk meg olyan Hasse-diagramot, amelyben

- (a) 3 minimális elem van, nincs legnagyobb elem, és összesen 4 eleme van,
 (b) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 5 eleme van,
 (c) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 3 eleme van,
 (d) bármely két elem összehasonlítható, és összesen 5 eleme van,
 (e) bármely két elem összehasonlítható, és nincs benne legkisebb elem,
 (f) egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

12. feladat. Adjuk meg azon részbenrendezés elemeit, melynek a fedési relációja $\{(a, b) \in \{1, 2, \dots, 8\}^2 : b = 2a\}$. Rajzoljuk fel a Hasse-diagramját.

13. feladat. Legyen $U = \{a, b, c, d\}$. Adjuk meg azon $\varrho \subseteq \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$ részbenrendezés elemeit, melynek fedési relációja az

$$\{(A, B) \in \mathcal{P}(U)^2 : ((A = B \cup \{a\}) \vee (A = B \cup \{b\})) \wedge (A \neq B)\} \subseteq \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$$

reláció. Rajzoljuk fel a Hasse-diagramját.

14. feladat. Hány részbenrendezése van egy négyelemű halmaznak? És hány rendezése?

15. feladat. Művelet-e...

- (a) az összeadás a hárommal osztható egész számok halmazán?
 (b) az összeadás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?
 (c) az osztás a pozitív egész számok halmazán?
 (d) az összeadás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?
 (e) $x * y = \sqrt{xy}$ a valós számok halmazán?
 (f) $x * y = \sqrt{xy}$ a komplex számok halmazán?
 (g) a metszés az $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ halmazon?

16. feladat. Művelet-e...

- (a) a szorzás a hárommal osztható egész számok halmazán?
 (b) a szorzás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?
 (c) az összeadás a $[0, 1]$ intervallumon?
 (d) a szorzás a $[0, 1]$ intervallumon?
 (e) a szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?
 (f) az egyesítés az $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ halmazon?

17. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $*$ műveletet.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

18. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $\circ$ műveletet.

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

19. feladat. Írjuk fel a $\mathbb{Z}_5$ halmazon a szorzás művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

20. feladat. Írjuk fel a $\mathcal{P}(\{u, v\})$ halmazon az egyesítés művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

21. feladat. Írjuk fel az $\{1, -1, i, -i\}$ halmazon a szorzás művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

22. feladat. Írjuk fel az $\{\text{igaz}, \text{hamis}\}$ halmazon az implikáció művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

23. feladat. Írjuk fel az $\{1, 2, 3\}$ halmazon az $x \sqcap y = \min\{x, y\}$ művelet művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

24. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az $A = \{u, v, w\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $\diamond$ műveletet.

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

25. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \bullet b = a + b + 23$ műveletet.

26. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \otimes b = b + 2$ műveletet.

27. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$ műveletet.

28. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \oplus b = a$ műveletet.

29. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a komplex számok halmazán a kivonás műveletét.

30. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$ műveletet. Ennek a feladatnak egy kidolgozott megoldása: <https://bit.ly/muvtul>

31. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

- | | |
|---|---|
| (a) $(\mathbb{N}; +)$ | (g) $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$ |
| (b) $(\mathbb{Z}; +)$ | (h) $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}; +)$ |
| (c) $(\mathbb{Z}; \cdot)$ | (i) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$ |
| (d) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}; \cdot)$ | (j) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$ |
| (e) $(\mathbb{Z}_5; +)$ | (k) $(\mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus \{\mathbf{0}\}; \cdot)$ |
| (f) $(\mathbb{Z}_5; \cdot)$ | (l) $\text{GL}_2(\mathbb{R}) := (\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(A) \neq 0\}; \cdot)$ |

32. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

- | | |
|---|---|
| (a) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; +)$ | (e) $(\mathbb{Z}^-; +)$ |
| (b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ | (f) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$ |
| (c) $(\mathbb{Q}^+; +)$ | (g) $(\mathbb{N}; \cdot)$ |
| (d) $(\mathbb{Q}^+; \cdot)$ | |

33. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

(a) $(\{u, v, w\}; \diamond)$

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

(b) $(\{a, b, c, d\}; \circ)$

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

(c) $(\{a, b, c, d\}; *)$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

(d) $(\mathcal{P}(\{u, v\}); \cup)$

(e) $(\{\text{igaz}, \text{hamis}\}; \rightarrow)$

(f) $(\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$

34. feladat.

- (a) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \diamond)$, ahol $a \diamond b = a - b$?
- (b) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \bullet)$, ahol $a \bullet b = a + b + 23$?
- (c) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \otimes)$, ahol $a \otimes b = b + 2$?
- (d) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \oplus)$, ahol $a \oplus b = a$?
- (e) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Q}; \star)$, ahol $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$?
- (f) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Q} \setminus \{3\}; \star)$, ahol $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$?

35. feladat. Részcsoportot alkot-e a H halmaz a G csoportban?

- (a) $G = \mathbb{Z}, H = \mathbb{N}_0$
- (b) $G = \mathbb{Z}, H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \mid a\}$
- (c) $G = \mathbb{Z}, H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \nmid a\}$
- (d) $G = \mathbb{Q}, H = \mathbb{Q}^+$
- (e) $G = \mathbb{Q}^*, H = \mathbb{Q}^+$
- (f) $G = \mathbb{Q}^*, H = \mathbb{Q}^-$
- (g) $G = \mathbb{C}, H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- (h) $G = \mathbb{C}^*, H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- (i) $G = \mathbb{C}, H = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$
- (j) $G = \mathbb{C}^*, H = \{ib : b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$
- (k) $G = \mathbb{Z}_{10}, H = \mathbb{Z}_{10} \setminus \{\bar{0}\}$
- (l) $G = \mathbb{Z}_{10}, H = \mathbb{Z}_{10}^*$
- (m) $G = \mathbb{Z}_{15}, H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}$
- (n) $G = \mathbb{Z}_{15}, H = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{11}, \bar{14}\}$
- (o) $G = \mathbb{Z}_{15}^*, H = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{11}, \bar{14}\}$
- (p) $G = \mathbb{R}^+, H = \{\text{véges tizedes törtek}\}$

Feladat. (Azért számozatlan, hogy 2025-ben ne csússzon meg a számozás, de jövőre beilleszteni a számozásba!) Adjuk meg az alábbi diéderscsoportok elemeit a szokásos alakban.

- (a) D_4 -ben ta ,
- (b) D_3 -ban $t^5 a^7 t$,
- (c) D_7 -ben $(tatata)^{36}$
- (d) D_{10} -ben $((t^{-721} a^{2025})^{-57} ta^{-37})^{-3}$

36. feladat. Határozza meg a G csoportban a T részhalmaz által generált részcsoportot.

- (a) $G = \mathbb{Z}, T = \{30, 42, 105\}$
- (b) $G = \mathbb{Z}_{12}, T = \{\bar{9}\}$
- (c) $G = \mathbb{Z}_{12}, T = \{\bar{10}\}$
- (d) $G = \mathbb{Z}_{30}, T = \{\bar{6}, \bar{10}\}$
- (e) $G = \mathbb{Z}_{31}, T = \{\bar{6}, \bar{10}\}$
- (f) $G = \mathbb{Z}_8, T = \{\bar{5}\}$
- (g) $G = \mathbb{Z}_8^*, T = \{\bar{5}\}$
- (h) $G = D_{24}, T = \{a^9\}$
- (i) $G = D_{24}, T = \{ta^9\}$
- (j) $G = D_{12}, T = \{a^3, a^2 t\}$
- (k) $G = D_{12}, T = \{a^5, a^2 t\}$
- (l) $G = D_{10}, T = \{a^4, a^5 t\}$
- (m) $G = S_9, T = \{(12453)(34)\}$
- (n) $G = S_4, T = \{(1234), (13)\}$
- (o) $G = \mathbb{C}, T = \{1, \sqrt{2}\}$
- (p) $G = \mathbb{C}^*, T = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$
- (q) $G = \mathbb{C}^*, T = \left\{\cos \frac{10\pi}{7} + i \sin \frac{10\pi}{7}\right\}$
- (r) $G = \mathbb{C}^*, T = \left\{i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
- (s) $G = \mathbb{Q}, T = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$
- (t) $G = \mathbb{Q}^*, T = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

37. feladat. Határozza meg a G csoportban a B halmaz által generált részcsoportot.

- (a) $G = \mathbb{Z}, B = \{2, 9\}$ (n) $G = \mathbb{Z}_{15}, B = \{\overline{25}, \overline{65}\}$
 (b) $G = \mathbb{Z}, B = \{6, 10\}$ (o) $G = \mathbb{Z}_{16}, B = \{\overline{25}, \overline{65}\}$
 (c) $G = \mathbb{Z}, B = \{6, 10, 15\}$ (p) $G = \mathbb{Z}_{14}, B = \{\overline{6}, \overline{10}, \overline{15}\}$
 (d) $G = \mathbb{Z}, B = \{5, 17\}$ (q) $G = \mathbb{Z}_{21}, B = \{\overline{30}, \overline{42}, \overline{105}\}$
 (e) $G = \mathbb{Z}, B = \{25, 65\}$ (r) $G = \mathbb{C}, B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$
 (f) $G = \mathbb{Z}, B = \{30, 42, 105\}$ (s) $G = \mathbb{C}^*, B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$
 (g) $G = \mathbb{Z}_{14}, B = \{\overline{2}\}$ (t) $G = \mathbb{C}, B = \{1, i\}$
 (h) $G = \mathbb{Z}_{15}, B = \{\overline{2}\}$ (u) $G = \mathbb{C}^*, B = \{1, i\}$
 (i) $G = \mathbb{Z}_{15}, B = \{\overline{5}\}$ (v) $G = \mathbb{Z}_7^*, B = \{\overline{2}\}$
 (j) $G = \mathbb{Z}_{16}, B = \{\overline{5}\}$ (w) $G = \mathbb{Z}_7^*, B = \{\overline{3}\}$
 (k) $G = \mathbb{Z}_{21}, B = \{\overline{3}\}$ (x) $G = \mathbb{Z}_{15}^*, B = \{\overline{2}\}$
 (l) $G = \mathbb{Z}_{14}, B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$ (y) $G = \mathbb{Z}_{15}^*, B = \{\overline{4}\}$
 (m) $G = \mathbb{Z}_{15}, B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$ (z) $G = \mathbb{Z}_{21}^*, B = \{\overline{8}, \overline{13}\}$

38. feladat. Határozza meg a G csoportban a g elem rendjét.

- (a) $G = \mathbb{Z}_{30}, g = \overline{18}$ (j) $G = \mathbb{C}, g = i$ (s) $G = S_7, g = (1\ 2\ 3\ 4)(7\ 6\ 5)$
 (b) $G = \mathbb{Z}_{30}, g = \overline{19}$ (k) $G = \mathbb{C}^*, g = i$ (t) $G = S_7, g = (1\ 2\ 3\ 4)(7\ 6\ 5\ 4)$
 (c) $G = \mathbb{Z}_{30}, g = \overline{20}$ (l) $G = \mathbb{Z}_7, g = \overline{2}$ (u) $G = D_{18}, g = a^4$
 (d) $G = \mathbb{Z}_{30}, g = \overline{21}$ (m) $G = \mathbb{Z}_7, g = \overline{3}$ (v) $G = D_{18}, g = a^5$
 (e) $G = \mathbb{Z}_{30}, g = \overline{22}$ (n) $G = \mathbb{Z}_{15}^*, g = \overline{2}$ (w) $G = D_{18}, g = ta^7tata^{-2}$
 (f) $G = \mathbb{R}, g = -1$ (o) $G = \mathbb{Z}_{15}^*, g = \overline{11}$ (x) $G = \mathbb{C}^*, g = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 (g) $G = \mathbb{R}^*, g = -1$ (p) $G = \mathbb{Z}_{21}^*, g = \overline{4}$ (y) $G = \mathbb{C}^*, g = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 (h) $G = \mathbb{R}, g = 2$ (q) $G = S_7, g = (1\ 2\ 3\ 4)$ (z) $G = \text{GL}_2(\mathbb{R}), g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 (i) $G = \mathbb{R}^*, g = 2$ (r) $G = S_7, g = (1\ 2\ 3\ 4)(7\ 6)$

39. feladat. Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoport-háló Hasse-diagramját.

$$\mathbb{Z}_{18}, \mathbb{Z}_{42}, \mathbb{Z}_{15}^*, \mathbb{Z}_{49}^*, \mathbb{Z}_{54}^*, D_3, S_3, V, Q$$

40. feladat. Csoport-homomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

- (a) $\varphi: (\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +), x \mapsto \log x$
 (b) $\varphi: (\mathbb{C}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; \cdot), z \mapsto \text{Re } z$
 (c) $\varphi: (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{R}; +), x \mapsto x^2$

41. feladat. Döntse el, hogy normálosztója-e a H részcsoport a G csoportnak, és ha igen, határozza meg a G/H faktorcsoportot. Ha H nem normálosztó, akkor számítsa ki az általa generált N normálosztót, és határozza meg a G/N faktorcsoportot.

- (a) $G = \mathbb{Z}_{12}, H = [\overline{3}]$ (h) $G = D_4, H = [a^2]$
 (b) $G = \mathbb{Z}_{12}, H = [\overline{4}]$ (i) $G = D_4, H = [a^2, at]$
 (c) $G = \mathbb{Z}_{21}^*, H = \{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\}$ (j) $G = D_4, H = [a^2t]$
 (d) $G = \mathbb{Z}_{21}^*, H = [\overline{4}]$ (k) $G = D_5, H = [a^2t]$
 (e) $G = \mathbb{C}, H = \mathbb{R}$ (l) $G = S_3, H = [(12)]$
 (f) $G = \mathbb{R}^*, H = \mathbb{R}^+$ (m) $G = S_4, H = V$
 (g) $G = Q, H = [-1]$ (n) $G = S_4, H = [(1234), (13)]$

42. feladat. Adjon meg minél több olyan $\pi \in S_5$ permutációt, amelyre $\pi^{-1}(123)\pi = (345)$.

43. feladat. Igazolja, hogy A_n -ben bármely két 4 hosszúságú ciklus konjugált (minden $n \geq 4$ esetén).

44. feladat. Bizonyítsa be, hogy A_6 -ban (12345) és (21345) nem konjugáltak.

45. feladat. Igazolja, hogy egy G csoport H részcsoportja akkor és csak akkor normálosztó, ha minden $a, b \in G$ esetén $ab \in H \implies ba \in H$.

46. feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $N = \{1, n\}$ egy kételemű normálosztó a G csoportban, akkor n felcserélhető G minden elemével.

47. feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}_{15}^*/[4]$ faktorcsoport összes részcsoportját.

48. feladat. Határozza meg (izomorfia erejéig) a $(\mathbb{Z}; +)$ csoport összes homomorf képét.

49. feladat. Csoporthomomorfizmusok-e az alábbi leképezések? Amelyik igen, annak határozza meg a magját és az értékkészletét, majd írja fel a homomorfizmusból adódó izomorfizmust a mag szerinti faktorcsoport és a homomorf kép között.

- | | |
|--|---|
| (a) $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad z \mapsto z $ | (h) $\mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}, \quad \bar{k} \mapsto \overline{k+2}$ |
| (b) $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \operatorname{Im} z$ | (i) $\mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}, \quad \bar{k} \mapsto \overline{4k}$ |
| (c) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad k \mapsto \cos \frac{2k\pi}{13} + i \sin \frac{2k\pi}{13}$ | (j) $\mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_{15}, \quad \bar{k} \mapsto \overline{6k}$ |
| (d) $\mathbb{Z} \rightarrow D_3, \quad k \mapsto a^k$ | (k) $\mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_8, \quad \bar{k} \mapsto \overline{3k}$ |
| (e) $\mathbb{Z}_{12} \rightarrow D_8, \quad \bar{k} \mapsto a^{6k}$ | (l) $\mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_{16}^*, \quad \bar{k} \mapsto \overline{3^k}$ |
| (f) $D_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad a^k t^\ell \mapsto \overline{k+\ell}$ | (m) $\mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_{16}^*, \quad \bar{k} \mapsto \overline{k^3}$ |
| (g) $Q \rightarrow Q, \quad x \mapsto x^2$ | (n) $\mathbb{Z}_{20}^* \rightarrow \mathbb{Z}_{20}^*, \quad x \mapsto x^2$ |

50. feladat. Létezik-e injektív/szürjektív/nemtriviális homomorfizmus a megadott csoportok között? Ha létezik, akkor adja is meg az összetételt.

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_8$ | (e) $D_4 \rightarrow S_4$ | (i) $S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ |
| (b) $\mathbb{Z}_9 \rightarrow D_6$ | (f) $D_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ | (j) $S_{100} \rightarrow D_{100}$ |
| (c) $\mathbb{Z}_9 \rightarrow Q$ | (g) $\mathbb{Z}_{19}^* \rightarrow \mathbb{Z}_{11}^*$ | (k) $\mathbb{Z} \rightarrow S_3$ |
| (d) $\mathbb{Z}_4 \rightarrow Q$ | (h) $Q \rightarrow D_6$ | (l) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ |

51. feladat. Döntse el, hogy gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkotnak-e az alábbi számhalmazok a szokásos összeadás és szorzás műveletével.

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ | (b) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ páros}\}$ | (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ |
| (d) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } a \text{ is és } b \text{ is páros}\}$ | (e) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } b \text{ páros}\}$ | (f) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ |

52. feladat. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e a $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz (a szokásos összeadással és szorzással), ahol $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$?

53. feladat. Határozza meg az alábbi gyűrűk egységscsoportját, és döntse el, hogy (az egységscsoportok) testet alkotnak-e. (Azt nem kell ellenőrizni, hogy a kiindulási struktúrák valóban gyűrűk.)

- $\mathbb{Z}_{24}$ a maradékosztályok szokásos összeadásával és szorzásával
- $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ a mátrixok szokásos összeadásával és szorzásával
- $\mathbb{R}^2$ a komponensenkénti összeadással és szorzással
- $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadással és szorzással
- $U = \{a, b\}$ összes részhalmazainak halmaza a szimmetrikus különbség (összeadás) és a metszés (szorzás) műveletével

54. feladat. Jelölje $\mathcal{P}(U)$ az U halmaz hatványhalmazát, azaz U összes részhalmazainak halmazát. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e $\mathcal{P}(U)$ a szimmetrikus különbség és metszés műveletével? (A válasz függ U elemszámától!)

55. feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd a 52. feladatot).

56. feladat. Bizonyítsa be, hogy az $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alakú valós mátrixok testet alkotnak a szokásos mátrixműveletekkel.

57. feladat. Adjon meg olyan összeadást és szorzást a $T = \{0, 1, a, b\}$ halmazon, amellyel $(T; +, \cdot)$ test.

58. feladat. Döntse el, hogy a B részhalmaz részgyűrűt alkot-e az $\mathbb{A}$ gyűrűben.

- $\mathbb{A} = (\mathbb{C}[x]; +, \cdot), B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$
- $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}[x]; +, \cdot), B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid f(0)\}$
- $\mathbb{A} = (\mathbb{R}[x]; +, \cdot), B = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) \geq 0\}$

- (d) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_{12}; +, \cdot), B = \mathbb{Z}_{12}^* \cup \{\bar{0}\}$
- (e) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}[i]; +, \cdot), B = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 2 \mid a + b\}$
- (f) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}[i]; +, \cdot), B = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] : 2 \mid ab\}$

59. feladat. Határozza meg az R egységelemes gyűrű T részhalmaza által generált részgyűrűjét, valamint egységelemes részgyűrűjét.

- | | |
|--|---|
| (a) $R = \mathbb{R}[x], T = \{x\}$ | (f) $R = \mathbb{C}, T = \{i\}$ |
| (b) $R = \mathbb{R}[x], T = \{x^2\}$ | (g) $R = \mathbb{C}, T = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ |
| (c) $R = \mathbb{Z}[x], T = \{x^2, x^3\}$ | (h) $R = \mathbb{R}, T = \{\sqrt{2}\}$ |
| (d) $R = \mathbb{Z}[x], T = \{x - 1\}$ | (i) $R = \mathbb{Q}, T = \{\frac{1}{2}\}$ |
| (e) $R = \mathbb{R}^{2 \times 2}, T = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ | (j) $R = \mathbb{Q}, T = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ |

60. feladat. Igazolja, hogy ha egy integritástartomány nemtriviális részgyűrűjének van egységeleme, az megegyezik az integritástartomány egységelemével. Mutasson példát arra, hogy ez nem marad igaz, ha elhagyjuk a zérusosztómentesség feltételét.

61. feladat. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (a választ indokolni is kell).

- (a) Létezik olyan gyűrű, amely egységelemes, de nem kommutatív és nem zérusosztómentes.
- (b) Létezik olyan integritástartomány, amelyben pontosan tizenhat egység van.
- (c) Az egységek minden gyűrűben csoportot alkotnak az összeadás műveletével.
- (d) Létezik olyan gyűrű, amely kommutatív és egységelemes, de nem integritástartomány.
- (e) Létezik olyan integritástartomány, amelyben csak véges sok egység van.
- (f) Kommutatív gyűrű minden részgyűrűje is kommutatív.
- (g) Nemkommutatív gyűrű egyetlen részgyűrűje sem kommutatív.
- (h) Végtelen gyűrű minden részgyűrűje végtelen.

62. feladat. Döntse el, hogy testek-e a megadott maradékosztály-gyűrűk, és határozza meg elemeik számát.

- (a) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + \bar{1})$
- (b) $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + \bar{1})$
- (c) $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + \bar{2})$
- (d) $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + \bar{1})$
- (e) $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 + \bar{1})$

63. feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 + \bar{2})$ test alábbi elemeit:

- (a) $\overline{x + \bar{2} + x^2 + \bar{2}x + \bar{1}}$;
- (b) $\overline{x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \cdot x + \bar{2}}$;
- (c) $\overline{x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \cdot x^2 + \bar{2}}$;
- (d) $\overline{x + \bar{2}}^{-1}$.

64. feladat. Számítsa ki a véges testek megadott elemeit.

- (a) $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + \bar{1})$ -ben $\overline{x}^{-1} = ?$, $\overline{x^2}^{-1} = ?$
- (b) $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + \bar{2}x + \bar{1})$ -ben $\overline{2x^2 + \bar{1}}^{-1} = ?$, $\overline{x/x + \bar{1}} = ?$
- (c) $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + \bar{3}x + \bar{2})$ -ben $\overline{x^2 + \bar{3}}^{-1} = ?$, $\overline{2x + \bar{3}/x^2} = ?$
- (d) $\mathbb{Z}_7[x]/(x^3 + x + \bar{1})$ -ben $\overline{2x}^{-1} = ?$, $\overline{x/2x + \bar{2}} = ?$
- (e) $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + x^2 + \bar{2})$ -ben $\overline{x + \bar{1}}^{-1} = ?$, $\overline{x^2/\bar{3}x + \bar{4}} = ?$

65. feladat. Határozza meg a K testben a x elem inverzét.

- (a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), x = 2 - 3\sqrt{2}$
- (b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$,
- (c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), x = 1 + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$

66. feladat. Határozza meg az x minimálpolinomját és konjugáltjait a K test felett.

- (a) $K = \mathbb{R}, \quad x = 1 - 2i,$
- (b) $K = \mathbb{Q}; \quad x = 1 + \sqrt{3}.$
- (c) $K = \mathbb{Q}; \quad x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4},$
- (d) $K = \mathbb{Q}; \quad x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$

67. feladat. Határozzuk meg az $\alpha \in L$ elem minimálpolinomját a megfelelő $\mathbb{Z}_p$ test felett.

- (a) $L = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle, \quad \alpha = \overline{x + 1};$
- (b) $L = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + 1 \rangle, \quad \alpha = \overline{x + 1};$
- (c) $L = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + 1 \rangle, \quad \alpha = \overline{x^2 + 1}.$