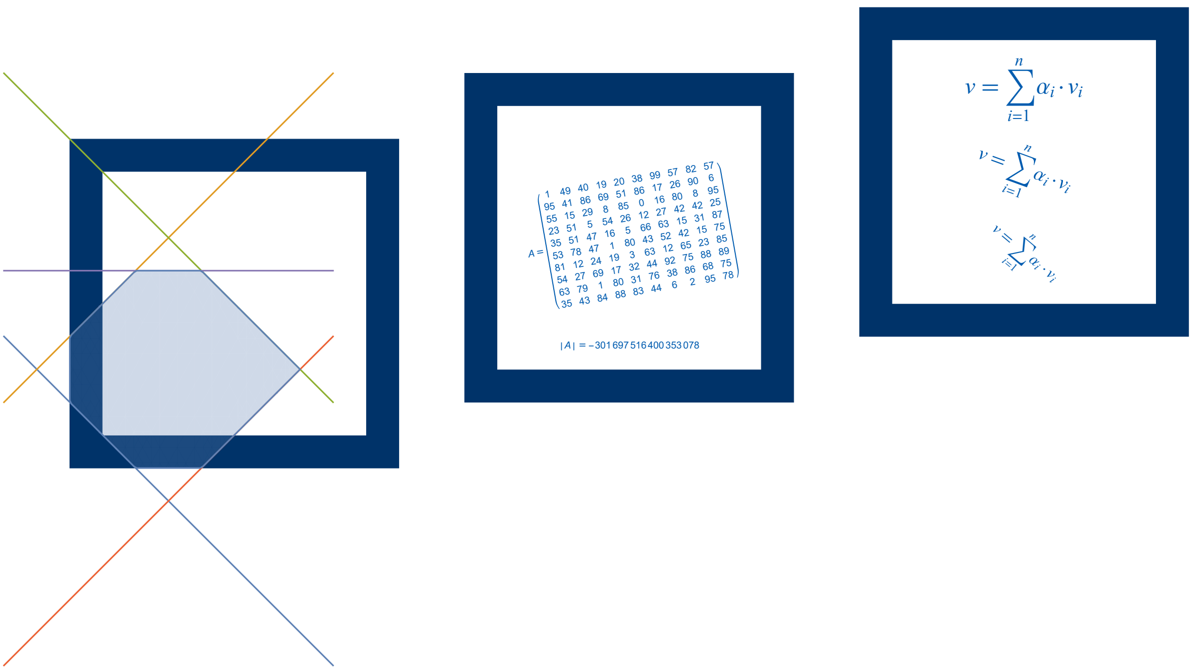
Feladatgyűjtemény

a

LINEÁRIS ALGEBRA
(Közgazdászoknak)

gyakorlathoz

Dormán Miklós & **Kátai-Urbán Kamilla**



2024

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A feladatgyűjtemény elkészítésében végzett áldozatos munkáért, beleértve a megoldások megértését segítő videók és pdf-fájlok elkészítését, az alábbiakat illeti köszönet:

Boldog Péter Tamás,	Dormán Miklós,	Gévay Gábor,
Gyenizse Gergő,	Kardos Gergely,	Kátai-Urbán Kamilla,
Kulin Júlia,	Kunos Ádám,	Locskai Béla,
Torma Bence,	Torma Gábor,	Tóth Endre.

A feladatgyűjtemény a *Lineáris algebra (közgazdászoknak)* tárgyhoz készült. A feladatsorok az előadáson szereplő fogalmak gyakorlására szolgálnak. A szükséges definíciók, tételek megtalálhatók az előadásvázlatban ➦.

Az 1. fejezetben a tárgy gyakorlatához tartozó feladatok találhatók (mátrixok, determinánsok, lineáris egyenletrendszerek, mátrixegyenletek, mátrixok inverze, valós vektorterek, mátrixok sajátértékei és sajátvektorai), a 2. fejezetben pedig a feladatok eredményei/megoldásai vannak. Bizonyos feladatok esetén a teljes megoldást tartalmazó videó (youtube-videó/interaktív videó (☞)) vagy kidolgozott megoldás (pdf-fájl (✍)) is elérhető. A feladatok számozása „1.x.y. feladat” alakú, ahol „x.y. feladat” a gyakorlatokon használt feladatsorok számozását követi, a megfelelő megoldások sorszáma: „2.x.y. feladat”.

1. FELADATOK

1.1. Mátrixok

Mintafeladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek):

(a) $(AB)^2 + 3C^\top$,

(b) $A^2B^2 + 3C^\top$.

Megoldás. Elsőként azt vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a kifejezések. A skalárral való szorzás és a transzponálás mindig definiált, de csak azonos méretű mátrixok összege, valamint $(m \times n)$-es és $(n \times p)$-s mátrixok szorzata létezik.

(a) Az AB szorzat létezik, melynek mérete (2×2), így $(AB)^2 = AB \cdot AB$ is létezik és $(AB)^2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Mivel $3C^\top$ is (2×2)-es, ezért az $(AB)^2 + 3C^\top$ mátrix létezik. Végezzük el a részletszámításokat: $AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$, $(AB)^2 = \begin{pmatrix} -12 & -130 \\ 10 & 68 \end{pmatrix}$, $C^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ és $3C^\top = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, végül

$$(AB)^2 + 3C^\top = \begin{pmatrix} -12 & -130 \\ 10 & 68 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -121 \\ 16 & 77 \end{pmatrix}.$$

(b) Az $A^2 = AA$ mátrix nem létezik, ezért $A^2B^2 + 3C^\top$ sem létezik.

1.1.1. Feladat. Legyen

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \sqrt{2}\\ 0.3 & 0.4\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}\sqrt{10}/2 & 0.6\\ 0 & 0.4\end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek):

(a) $A+B$, $A+F$, $2B$, B^T, D^T;

(b) AB, BA, CB, BC, DC, CD;

(c) BF, E^2, GH, EB^T, E^TA, D^TC^T;

(d) $(A+B)C$, $(A+B^T)D$, $AD+B^TD$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.1

1.1.2. Feladat. Számítsuk ki az $f=x^2+3x-4$ polinom helyettesítési értékét az $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & -2 & 6\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ helyen.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.2

1.1.3. Feladat. Legyen $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amely felcserélhető A-val, azaz amelyre $AB=BA$ teljesül.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.3

Mintafeladat. Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet az

$$A=\begin{pmatrix}0.95 & 0.6\\ 0.05 & 0.4\end{pmatrix}$$

mátrix írja le (1 éves időtávon). A mátrix oszlopai a jelenlegi dolgozóknak / munkanélkülieknek felelnek meg, a sorok pedig a változásnak. Tehát a fenti mátrix azt jelenti, hogy egy év alatt a dolgozók 95%-a dolgozó marad, 5%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 60%-a talál munkát és 40%-a marad munkanélküli. Jelenleg 4 687 000 dolgozó és 180 000 munkanélküli van. Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta 1, 2, 3, illetve 4 év múlva? Van-e egyensúlyi helyzete a munkanélküliségi rátának (vagyis olyan ráta, amely változatlan marad)?

Megoldás. Legyen $x_0=4\,687\,000$ és $y_0=180\,000$. Egy év múlva a dolgozók létszáma: $x_1=0,95x_0+0,6y_0$, a munkanélküliek létszáma pedig $y_1=0,05x_0+0,4y_0$. Az új és a régi adatok közötti kapcsolatot az A mátrix segítségével is kifejezhetjük: $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$. Ha x_k, illetve y_k jelöli a dolgozók, illetve a munkanélküliek számát k év múlva ($k\in\mathbb{N}$), akkor $\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=A(A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix})=A^2\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}x_4\\ y_4\end{pmatrix}=A^4\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$. A kapott értékeket az alábbi táblázat tartalmazza.

	0. év	1. év	2. év	3. év	4. év
Dolgozók száma (x_k):	4 687 000	4 560 650	≈ 4 516 428	≈ 4 500 950	≈ 4 495 532
Munkanélküliek száma (y_k):	180 000	306 350	≈ 350 572	≈ 366 050	≈ 371 468
Munkanélk. ráta:	≈ 3.7%	≈ 6.3%	≈ 7.2%	≈ 7.5%	≈ 7.6%

Ha a kezdőadatok x_0' (dolg. száma) és y_0' (munkanélk. száma), akkor a munkanélküliségi ráta $\frac{y_0'}{4\,867\,000}$. Egy év múlva a munkanélküliek száma $y_1'=0,05x_0'+0,4y_0'$, így a munkanélküliségi ráta: $\frac{y_1'}{4\,867\,000}$. Egyensúlyi helyzetben a régi és az új ráta megegyezik, aminek következtében $y_1'=y_0'$. Van egyensúlyi helyzete a munkanélküliségi rátának: $\frac{100}{13}\%\approx 7.69\%$.

1.1.4. Feladat. Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet a következő mátrix írja le (1 éves időtávon):

$$\begin{pmatrix}0.9 & 0.3\\ 0.1 & 0.7\end{pmatrix}.$$

A mátrix oszlopai a jelenlegi dolgozóknak / munkanélkülieknek felelnek meg, a sorok pedig a változásnak. Tehát a fenti mátrix azt jelenti, hogy egy év alatt a dolgozók 90%-a dolgozó marad, 10%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 30%-a talál munkát és 70%-a marad munkanélküli. Jelenleg 8 000 000 dolgozó és 2 000 000 munkanélküli van. Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta[1] a gazdaságban 1, 2, illetve 4 év múlva? Van-e egyensúlyi helyzete a munkanélküliségi rátának (vagyis olyan ráta, amely változatlan marad)?

Plusz gondolkodnivaló: mi történik, ha a modellbe bevesszük a lakosság nemekre osztását is? Igaz-e, hogy ekkor is egyértelmű a munkanélküliségi ráta egyensúlyi helyzete?

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.4

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re és $1 \leqslant k \leqslant n$-re legyen

$$\mathbf{e}_{k,n} = (0 \ \dots \ 0 \ \overbrace{1}^{\text{k-adik komp.}} \ 0 \ \dots \ 0)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{és} \quad \mathbf{1}_n = (1 \ \dots \ 1)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

1.1.5. Feladat. Egy országgyűlési választáson a tizenöt szavazókörzetben hat jelöltre lehet szavazni. Az érvényes szavazatok megoszlását az $A = (a_{i,j})_{6\times 15}$ mátrix tartalmazza, amelynek $a_{i,j}$ eleme azt mutatja meg, hogy az i-edik jelöltre a j-edik körzetben hányan szavaztak. Milyen jelentést tulajdoníthatunk a következő kifejezéseknek:

(a) $\mathbf{e}_{1,6}^T \cdot A \cdot \mathbf{1}_{15}$, (b) $\mathbf{1}_6^T \cdot A \cdot \mathbf{e}_{5,15}$?

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy a második jelöltre a hatodik körzetben leadott szavazatok száma hány százaléka az összes érvényes szavazatnak.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.5

1.1.6. Feladat. Egy áruházban tizenkét féle dobozos sört tartanak. Az elmúlt év júliusában regisztrálták a napi fogyást: az $A \in \mathbb{R}^{31\times 12}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme azt jelenti, hogy július i-edik napján hány darab fogyott a j-edik fajta sörből. A $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1\times 12}$ mátrix a sörök egységárait tartalmazza. Milyen jelentést tulajdoníthatunk az alábbi kifejezéseknek:

(a) $\mathbf{e}_{3,31}^T \cdot A \cdot \mathbf{b}^T$, (b) $\mathbf{1}_{31}^T \cdot A$, (c) $A \cdot \mathbf{1}_{12}$?

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy mennyi az ötödik fajta sörből származó árbevétel júliusban.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.6

Tesztes feladatok

1.1.7. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(a) Bármely A mátrix esetén AA^T létezik.
(b) Bármely A mátrix esetén AA^T egy négyzetes mátrix.
(c) Bármely A mátrix esetén AA^T és A^TA azonos méretű négyzetes mátrixok.
(d) Bármely A és B $(n \times n)$-es mátrix esetén AB és BA azonos méretű négyzetes mátrixok.
(e) Bármely A és B mátrix esetén ha $A + B$ létezik, akkor AB is.
(f) Bármely A és B mátrix esetén ha $A + B$ létezik, akkor AB^T is.
(g) Bármely A és B $(n \times n)$-es mátrix esetén $AB = BA$.
(h) Bármely A mátrix esetén $(A^T)^T = A$.
(i) Ha egy mátrix szimmetrikus, akkor négyzetes.
(j) Ha az A és B mátrixokra $AB = BA$ teljesül, akkor az A és B mátrixok négyzetesek.
(k) Bármely A és B azonos méretű négyzetes mátrixok esetén

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

(l) Ha az A és B azonos méretű négyzetes mátrixok esetén

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

teljesül, akkor $A = B$.

[1] A munkanélküliségi ráta nem más, mint a munkanélküliek számának és a munkaerő-állománynak a hányadosa, százalékos formában kifejezve. (Forrás: Wikipédia.)

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.7

Az 1.8-17. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

1.1.8. Feladat. Legyen az A mátrix (2×3)-as valós mátrix.

(a) Az $AA^\top$ és $A^\top A$ szorzatok definiáltak.
(b) Az $AA^\top$ és $A^\top A$ szorzatok nem definiáltak.
(c) Az $AA^\top$ szorzat definiált, de az $A^\top A$ szorzat nem definiált.
(d) Az $AA^\top$ szorzat nem definiált, de az $A^\top A$ szorzat definiált.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.8

1.1.9. Feladat. Legyenek adottak az $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $C \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ mátrixok. Ekkor …

(a) az ABC szorzat definiált.
(b) a $C^\top AB$ szorzat definiált.
(c) az $ABE_3C^\top$ szorzat definiált.
(d) a $BA^\top C^\top$ szorzat definiált.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.9

1.1.10. Feladat. Legyenek adottak az $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ és $C \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ mátrixok. Ekkor …

(a) az $ABC = CAB$ egyenlőség teljesül.
(b) az $(AB)C = A(BC)$ egyenlőség teljesül.
(c) az $AB + BC$ összeg definiált.
(d) a $BCAB$ szorzat nem definiált.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.10

1.1.11. Feladat. Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$, $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ $(k, \ell \in \mathbb{N})$ és

(a) $n = k$, akkor $A + B$ létezik.
(b) $m = n = k = \ell$, akkor $AB = BA$.
(c) $m = n = k = \ell$, akkor $AB - (BA)^\top$ létezik.
(d) $m = n = k = \ell$, akkor $(B + A)^\top = AB$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.11

1.1.12. Feladat. Mely mátrixokra teljesül az $A(B + C) = AB + AC$ egyenlőség?

(a) $A \in \mathbb{R}^{2000\times 2018}$, $B \in \mathbb{R}^{2018\times 2021}$ és $C \in \mathbb{R}^{2018\times 2021}$.
(b) $A \in \mathbb{R}^{2004\times 2012}$, $B \in \mathbb{R}^{2012\times 2016}$ és $C \in \mathbb{R}^{2016\times 2020}$.
(c) $A \in \mathbb{R}^{10\times 1000}$, $B \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ és $C \in \mathbb{R}^{100\times 10}$.
(d) $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ és $C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.12

1.1.13. Feladat. Az $A \in \mathbb{R}^{2018\times 2019}$ mátrixra $(A^\top)^\top = A$ teljesül. Ekkor …

(a) $A + A^\top = 2A$.
(b) A felülről trianguláris.
(c) A szimmetrikus.
(d) A^2 nem definiált.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.13

1.1.14. Feladat. Az $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokra $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ teljesül. Ekkor …

(a) A trianguláris
(b) $AB = (A^\top + B^\top)^\top$.
(c) A és B felcserélhető.
(d) $A^\top = B$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.14

1.1.15. Feladat. Az $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokra $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ teljesül. Ekkor …

(a) A vagy B az egységmátrix.
(b) A vagy B a zérusmátrix.
(c) $AB = (AB)^\top$.
(d) $AB = (A^\top B^\top)^\top$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.15

1.1.16. Feladat. Az A és B $(m \times n)$-es valós mátrixokra $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ teljesül. Ekkor ...

(a) A vagy B az egységmátrix.
(b) A vagy B négyzetes.
(c) A vagy B diagonális.
(d) A vagy B a zérusmátrix.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.16

1.1.17. Feladat. Az $(E_5)^k$ mátrix milyen k-ra ($k \in \mathbb{N}$) lesz diagonális?

(a) Csak alsó trianguláris lesz bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén.
(b) Csak $k \in \{1, 2\}$ esetén.
(c) Csak $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ esetén.
(d) Bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén.

A feladat eredménye/megoldása: 2.1.17

Nehezebb feladatok

1.1.18. Feladat. Elemezzük az $(AB)^3 = A^3B^3$ egyenlőséget értelmezhetőség szempontjából.
(a) Előfordulhat-e, hogy az egyenlőség egyik oldala létezik, de a másik oldal nem?
(b) Előfordulhat-e, hogy mindkét oldal létezik, de különböző méretűek?

1.1.19. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amely felcserélhető A-val, azaz amelyre $AB = BA$ teljesül.

1.1.20. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan (2×2)-es valós mátrixot, amelynek négyzete a nullmátrix.

1.1.21. Feladat. Tetszőleges n természetes számra számítsuk ki az alábbi mátrokat:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

1.1.22. Feladat. Legyen A olyan $(n \times n)$-es mátrix, melyre igaz, hogy minden oszlopában az elemek összege 1. Ha v $(n \times 1)$-es oszlopmátrix, akkor jelöljük $\|v\|$-vel v elemeinek az összegét. Igazoljuk, hogy bármely v $(n \times 1)$-es oszlopvektorra $\|Av\| = \|v\|$ teljesül.

1.1.23. Feladat. Legyen A olyan $(n \times n)$-es mátrix, melyre igaz, hogy minden oszlopában az elemek összege 0. Igazoljuk, hogy van olyan v $(n \times 1)$-es oszlopvektor, melyre $Av = 0$ teljesül.

1.1.24. Feladat. Négyzetes mátrix nyomának nevezzük és Trace(A)-val jelöljük a főátlójában lévő elemek összegét. Igazoljuk, hogy ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $\mathrm{Trace}(AB) = \mathrm{Trace}(BA)$.

1.1.25. Feladat. Legyen A valós mátrix és tegyük fel, hogy az AA^T mátrix nyoma 0. Határozzuk meg A-t.

1.1.26. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A és B $(n \times n)$-es mátrixok esetén ($n \in \mathbb{N}$)?

(a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$; (b) $(AB)^T = A^TB^T$; (c) $A^sA^t = A^{st}$ $(s, t \in \mathbb{N})$.

1.2. Determinánsok

Mintafeladat. Számítsuk ki a $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 7 & 11 & -13 \\ -17 & 19 & 23 \end{vmatrix}$ determinánsok értékét.

Megoldás. A determinánst az első sora szerint fogjuk kifejteni:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 7 & 11 & -13 \\ -17 & 19 & 23 \end{vmatrix} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 11 & -13 \\ 19 & 23 \end{vmatrix}}_{11\cdot 23-(-13)\cdot 19=500} -3 \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & -13 \\ -17 & 23 \end{vmatrix}}_{-60} + (-5) \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -17 & 19 \end{vmatrix}}_{320} = -420.$$

1.2.1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} -0.6 & 0.5 \\ 0.4 & -0.3 \end{vmatrix}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.1

Mintafeladat. Írjuk fel az

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 8 & -2 \\ 13 & 21 & 33 & 0 \end{vmatrix}$$

determináns kifejtését a második sora, illetve a negyedik oszlopa szerint. Határozzuk meg az értékét is.

Megoldás. A determináns második sora szerinti kifejtése:

$$(-1)^{2+1}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & -2 \\ 21 & 33 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 \\ 13 & 33 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 13 & 21 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}\cdot (-3)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 33 \end{vmatrix}.$$

A determináns negyedik oszlopa szerinti kifejtése:

$$(-1)^{1+4}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 33 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}\cdot (-3)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 33 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}\cdot (-2)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 13 & 21 & 33 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

(A determináns értéke 6.)

1.2.2. Feladat. Írjuk fel az alábbi determinánsok kifejtését a megadott soruk/oszlopuk szerint.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, 2. sor; (b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 3. oszlop.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.2

1.2.3. Feladat. Nullázzuk ki a $*$-gal megjelölt elemek sorát/oszlopát az adott elem segítségével az alábbi determinánsokban.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, oszlop; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2^* & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, sor.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.3

Mintafeladat. Számítsuk ki az $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ determinánsok értékét.

Megoldás. Mielőtt kifejtenénk a determináns néhány sorkon végrehajtott elemi átalakítással egyszerűbb alakra hozzuk. Az elemi átalakítások jelölése: $[i] \leftrightarrow [j]$ (az i-edik és a j-edik sor cseréje), $c[i]$ (az i-edik sor szorzása a $c \neq 0$ valós számmal), $[j] + c'[i]$ (a j-edik sorhoz hozzáadjuk az i-edik sor c'-szeresét, ahol $c' \in \mathbb{R}$). Az első oszlop második és harmadik elemét nullázzuk ki, majd fejtsük ki az első oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{[2]+(-1)[1] \\ [3]+(-1)[1]}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{[1]\leftrightarrow[2]}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

ne feledjük, hogy sorcsere/oszlopcsere esetén előjelváltás van. Ismét nullázunk az első oszlopban, majd kifejtés következik az első oszlop szerint:

$$- \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{[3]+[1]}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -3.$$

A determináns értéke -3.

1.2.4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; (e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.4

Mintafeladat. Adjuk meg az x valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$d_x = \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ -2 & -2 & x-1 \\ 1 & -1 & -29 \end{vmatrix}$$

determináns értéke -105 legyen.

Megoldás. Először a d_x determináns értékét határozzuk meg:

$$d_x = \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ -2 & -2 & x-1 \\ 1 & -1 & -29 \end{vmatrix} \overset{\substack{[1]+(-3)[3] \\ [2]+2[3]}}{=} \begin{vmatrix} 0 & x+3 & x+87 \\ 0 & -4 & x-59 \\ 1 & -1 & -29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & x+87 \\ -4 & x-59 \end{vmatrix} = x^2 - 52x + 171.$$

A $d_x = -105 \iff x^2 - 52x + 176 = 0$ egyenletnek két megoldás van: $x = 6$ és $x = 46$.

1.2.5. Feladat. Adjuk meg az x valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi determináns értéke 0, illetve 30 legyen:

(a) $\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ -2 & 2 & x+5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} -1 & x & x-1 \\ -2 & x-2 & x+3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & x-1 \\ -2 & x-2 & 3 \\ x-1 & 2 & -x+1 \end{vmatrix}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.5

Tesztes feladatok

1.2.6. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(a) Ha egy determináns értéke 0, akkor két sora megegyezik, vagy arányos.
(b) Ha egy egész számokból álló determináns értéke páros, akkor minden eleme páros.
(c) Ha egy egész számokból álló determináns értéke páros, akkor van páros eleme.
(d) Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke változatlan marad.
(e) Ha egy egész számokból álló determináns egy sorában csak páros számok vannak, akkor az értéke páros.
(f) Egész számokból álló determináns értéke is egész szám.
(g) Bármely azonos méretű négyzetes A és B mátrixra $|A+B| = |A| + |B|$.
(h) Bármely A négyzetes mátrix esetén $\left|A^T\right| = |A|$.
(i) Bármely A négyzetes mátrix esetén $\left|A^2\right| = |A|^2$.
(j) Bármely A négyzetes mátrix esetén $|A| = |-A|$.
(k) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, akkor a mátrix determinánsa is racionális szám.
(l) Ha egy mátrix minden eleme irracionális szám, akkor a mátrix determinánsa is irracionális szám.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.6

> A 2.7-17. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

1.2.7. Feladat. Bármely (a, b) és (c, d) síkbeli helyvektor esetén a két vektor által kifeszített paralelogramma területe ...

(a) $|ad - bc|$. (b) $ad - bc$. (c) $bc - ad$. (d) $|ab - cd|$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.7

1.2.8. Feladat. A (100×100)-as egységmátrix 2. sorának 3. eleméhez tartozó aldeterminánsának az értéke ...

(a) 1. (b) -1. (c) 0. (d) $(-1)^{100}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.8

1.2.9. Feladat. A $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ determináns minden adjungált aldeterminánsának értéke ...

(a) pozitív. (b) nemnegatív. (c) negatív. (d) nempozitív.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.9

1.2.10. Feladat. Egy (4×4)-es determinánst kifejtettünk valamelyik sora vagy oszlopa szerint, majd az így kapott (3×3)-as determinánsok mindegyikét kifejtettük valamelyik soruk vagy oszlopuk szerint. Hány (2×2)-es determináns szerepel az így kapott összegben? (Minden összeadandót leírtunk, azokat is, amelyek értéke 0.)

(a) 4. (b) 7. (c) 6. (d) 12.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.10

1.2.11. Feladat. Ha egy $(n \times n)$-es determináns mindegyik elemét megszorozzuk egy c számmal, akkor a determináns értéke ...

(a) a c-szeresére változik.
(b) a c^n-szeresére változik.
(c) a c^{n^2}-szeresére változik.
(d) nem változik.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.11

1.2.12. Feladat. Ha egy (5×5)-ös trianguláris mátrix főátlójának minden eleme negatív, akkor a mátrix determinánsa ...

(a) 0.
(b) negatív.
(c) pozitív.
(d) 1.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.12

1.2.13. Feladat. Melyik igaz minden négyzetes mátrixra az alábbiak közül? Ha a mátrix két sorát felcseréljük, akkor ...

(a) a mátrix determinánsa nem változik.
(b) a mátrix determinánsa 0 lesz.
(c) a mátrix determinánsa a -1-szeresére változik.
(d) a mátrix determinánsa a reciprokára változik.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.13

1.2.14. Feladat. Egy (100×100)-as mátrix első sorába leírtuk az első 100 pozitív egész számot. Majd minden további sorába az előző sor elemeinek kétszeresét írtuk (ugyanolyan sorrendben). Az így kapott mátrix determinánsa ...

(a) 100.
(b) $100!$.
(c) 2.
(d) 0.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.14

1.2.15. Feladat. Melyik igaz minden négyzetes mátrixra az alábbiak közül? Ha a mátrix egyik sorának c-szeresét hozzáadjuk a mátrix egy másik sorához, akkor ...

(a) a mátrix determinánsa nem változik.
(b) a mátrix determinánsa 0 lesz.
(c) a mátrix determinánsa a -1-szeresére változik.
(d) a mátrix determinánsa a c-szeresére változik.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.15

1.2.16. Feladat. Az $|AB| = |A| \cdot |B|$ egyenlet ...

(a) bármely A, B mátrix esetén teljesül.
(b) bármely A, B négyzetes mátrix esetén teljesül.
(c) bármely A, B azonos méretű négyzetes mátrix esetén teljesül.
(d) bármely A, B diagonális, négyzetes mátrix esetén teljesül.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.16

1.2.17. Feladat. Legyen A és B $(n \times n)$-es valós mátrix, c valós szám. Melyik igaz az alábbiak közül?

(a) $|AB| = |A + B|$.
(b) $|cA| = c|A|$.
(c) $|AB| = |BA|$.
(d) $|A^T B| \neq |AB^T|$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.2.17

Nehezebb feladatok

1.2.18. Feladat. Számítsuk ki az $\begin{vmatrix} 60 & 84 \\ 210 & 140 \end{vmatrix}$ determináns értékét anélkül, hogy az $ad - bc$ képletet, illetve törteket használnánk. Ha a fenti módszert egy általános $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ mátrixra alkalmaznánk, akkor végül milyen számmal nulláznánk ki az oszlopát vagy sorát?

1.2.19. Feladat. Helyettesítsük az $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ determináns első sorának egy elemét egy egész számmal úgy, hogy a keletkező determináns 0 legyen.

1.2.20. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely, nem 0 értékű determináns első sorában található olyan elem, amit le lehet úgy cserélni, hogy a kapott determináns már 0 legyen.

1.2.21. Feladat. Igaz-e, hogy bármely 0 értékű determináns első sorában megváltoztatható egy elem úgy, hogy a kapott determináns értéke már ne 0 legyen?

1.2.22. Feladat. Egy determináns főátlójában minden elem γ, a többi helyen pedig δ áll. Számítsuk ki a determináns értékét.

1.2.23. Feladat. Legyen $n \geqslant 3$ természetes szám. Számítsd ki az alábbi $(n \times n)$-es determinánsok értékét.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

1.2.24. Feladat. Igazak-e a következő állítások (ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát):
- (a) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám és a determinánsa $\frac{1}{8}$, akkor a mátrixban van olyan elem, amelynek nevezője páros szám.
- (b) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.
- (c) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix valamelyik eleme páros szám.

1.2.25. Feladat. Igazak-e a következő állítások (ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát):
- (a) Ha egy (2×2)-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix mindkét sora a másik sorának konstansszorosa.
- (b) Ha egy (2×2)-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora a másik sorának konstansszorosa.
- (c) Ha egy (3×3)-as mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora valamelyik másik sorának konstansszorosa.
- (d) Ha egy $(n \times n)$-es mátrix minden eleme páros szám, akkor a mátrix determinánsa 2^n-nel osztható egész szám.

1.3. Lineáris egyenletrendszerek

Mintafeladat. Oldjuk meg a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 33 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}\right.$$

lineáris egyenletrendszereket Gauss-eliminációval.

Megoldás. A LER bővített mátrixa: $(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 33 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right)$. A mátrix soraira alkalmazott elemi átalakításokkal lépcsős alakra hozzuk az $(A \mid \mathbf{b})$ mátrixot:

$$(A \mid \mathbf{b}) \overset{[1]\leftrightarrow[3]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 33 \end{array}\right) \overset{\substack{[2]+(-4)[1] \\ [3]+(-3)[1]}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -13 & -11 & -25 \\ 0 & -11 & -5 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{[3]-\frac{11}{13}[2] \\ [1]+\frac{4}{13}[2]}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & -13 & -11 & -25 \\ 0 & 0 & \frac{56}{13} & \frac{392}{13} \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{[3]-\frac{11}{13}[2] \\ [1]+\frac{4}{13}[2]}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & -13 & -11 & -25 \\ 0 & 0 & \frac{56}{13} & \frac{392}{13} \end{array}\right) \overset{\frac{13}{56}[3]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & -13 & -11 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \overset{\substack{[2]+11[3] \\ [1]+\frac{5}{13}[3]}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -13 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{13}[2]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Az utolsóként kapott lépcsős alakból leolvasható a megoldás: $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $x_3 = -7$ (valamennyi ismeretlen kötött).

1.3.1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss-eliminációval és elemi bázistranszformációval is.

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & b & + & 2c & = & 0 \\ 2a & - & 2b & - & 3c & = & 7 \\ -a & + & 2b & + & 3c & = & -4 \end{array}\right.$

(e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 5 \end{array}\right.$

(f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -7 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \end{array}\right.$

(g) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array}\right.$

(h) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4 \end{array}\right.$

(i) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.1

Mintafeladat. Oldjuk meg az

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert elemi bázistranszformációval.

Megoldás. A LER megoldása EBT-vel:

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	**b**
e_1	3	1	4	1	1
e_2	1^*	3	1	4	1
e_3	4	1	3	1	1

1.	x_2	x_3	x_4	**b**
e_1	-8	1^*	-11	-2
x_1	3	1	4	1
e_3	-11	-1	-15	-3

2.	x_2	x_4	**b**
x_3	-8	-11	-2
x_1	11	15	3
e_3	-19^*	-26	-5

3.	x_4	**b**
x_3	$-1/19$	$2/19$
x_1	$-1/19$	$2/19$
x_2	$26/19$	$5/19$

A LER megoldható, az x_1, x_2, x_3 ismeretlenek szabadok, az x_4 ismeretlen kötött, a LER egy általános megoldása: $x_1 = \frac{2}{19} + \frac{1}{19}x_4$, $x_2 = \frac{5}{19} - \frac{26}{19}x_4$, $x_3 = \frac{2}{19} + \frac{1}{19}x_4$ $(x_4 \in \mathbb{R})$.

1.3.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss-eliminációval és elemi bázistranszformációval is.

(a) $$\begin{cases} 3a - 4b + c - 2u + 3v = -1 \\ 2a - 3b - c + 3u + v = 11 \\ 5a - 7b + u + 4v = 10 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} a - b + u = 1 \\ a + c - v = 2 \\ b + v + w = 3 \end{cases}$$

1.3.3. Feladat. Döntsük el, hogy $(1, -1, 2, 3)$ megoldása-e az

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.3

1.3.4. Feladat. Ellenőrizzük, hogy $(1, -1, 2, 1)$ megoldása az

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek. Hogyan kapható meg épp ez a konkrét megoldás az (egyik) általános megoldásból?

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.4

Mintafeladat. Határozzuk meg az a és b valós paraméterek összes olyan értékét, amelyre az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 + bx_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = a \end{cases}$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

Megoldás. Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha megoldható és az általános megoldásban nincs szabad ismeretlen. EBT-vel oldjuk meg a feladatot:

0.	x_1	x_2	x_3	**b**
e_1	1^*	2	-3	2
e_2	1	-3	4	0
e_3	-1	8	b	2
e_4	2	-1	1	a

1.	x_2	x_3	**b**
x_1	2	-3	2
e_2	-5^*	7	-2
e_3	10	$b-3$	4
e_4	-5	7	$a-4$

2.	x_3	**b**
x_1	$-1/5$	$6/5$
x_2	$-7/5$	$2/5$
e_3	$b+11$	0
e_4	0	$a-2$

Az utolsó táblázatból azt kapjuk, hogy a LER pontosan akkor oldható meg, ha $a = 2$. Ha $a = 2$ és $b = -11$, akkor a 2. táblázat lesz a befejező táblázat, a LER-nek végtelen sok megoldása lesz, mivel x_1 szabad ismeretlen. Ha $a = 2$ és $b \neq -11$, akkor az EBT befejező lépése:

2.	x_3	**b**
x_1	$-1/5$	$6/5$
x_2	$-7/5$	$2/5$
e_3	$(b+11)^*$	0
e_4	0	0

3.	**b**
x_1	$6/5$
x_2	$2/5$
x_3	0
e_4	0

Ekkor $x_1 = \frac{6}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$ és $x_3 = 0$ az egyetlen megoldás.

1.3.5. Feladat. Határozzuk meg az a és b valós paraméterek összes olyan értékét amelyekre az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_2 + bx_3 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + bx_3 = a \end{cases}$$

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.5

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg, hogy az

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 2a \end{cases}$$

egyenletrendszernek az a valós paraméter függvényében hány megoldása van.

Megoldás. A LER bővített mátrixa $(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 2a \end{array}\right)$. Határozzuk meg $(A \mid \mathbf{b})$ lépcsős alakját:

$$(A \mid \mathbf{b}) \overset{\substack{[2]-[1] \\ [3]-a[1]}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a \end{array}\right) \overset{[3]+[1]}{\sim} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & a+1 \end{array}\right)}_{(*)}.$$

Ezen a ponton kettéválik az eljárás. Ha $a = 1$, akkor az utolsóként kapott $(*)$ mátrix és lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{[3]+(-2)[2]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

amely azt mutatja, hogy ebben az esetben nincs megoldás. Ha $a \neq 1$, akkor $a - 1 \neq 0$, és a $(*)$ mátrix az alábbi módon közelít a lépcsős alakjához:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 & a+1 \end{array}\right) \overset{\substack{\frac{1}{a-1}[2] \\ \frac{1}{a-1}[3]}}{\sim} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/(a-1) \\ 0 & 0 & -a-2 & (a+1)/(a-1) \end{array}\right)}_{(**)}.$$

Ezen a ponton ismét kettéválik az eljárás. Ha $a = -2$, akkor $(**) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$, ezért a LER nem oldható meg. Ha $a \neq -2$, akkor a LER megoldható. Mivel szabad ismeretlen ekkor nincsen, ezért pontosan egy megoldás van.

Összefoglalva az előbbieket: ha $a \neq 1$ és $a \neq -2$, akkor pontosan egy megoldása van, különben nincs megoldása a LER-nek.

1.3.6. Feladat. Határozzuk meg, hogy az alábbi egyenletrendszereknek az a valós paraméter függvényében hány megoldása van.

(a) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ ax_2 + (a^2+a)x_3 = a+1 \\ ax_3 = a-1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ (a+1)x_2 + ax_3 = a-1 \\ (a^2-a)x_3 = a \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ (a+1)x_2 + ax_3 = a-1 \\ (a^2+2a-3)x_3 = a^2-3a+2 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + (a^2-8)x_3 = a+4 \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ x_1 + (1-a)x_3 + (a-1)x_4 = 2 \\ x_1 - ax_3 + (a-2)x_4 = 1 \\ -ax_1 + ax_2 + 2ax_3 + 2x_4 = 3a-1 \end{cases}$$

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.6

Tesztes feladatok

1.3.7. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(a) Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor.
(b) Ha egy lineáris egyenletrendszer mátrixának több oszlopa van, mint sora, akkor vagy nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van.
(c) Lineáris egyenletrendszer bármely változója lehet szabad változó.
(d) Van olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek végtelen sok megoldása van, és minden megoldása csak egész számokat tartalmaz.
(e) Csupa nulla sort nem tartalmazó lépcsős mátrixnak nem lehet több sora, mint oszlopa.
(f) Ha egy lineáris egyenletrendszer összes konstansa 0, akkor van megoldása.
(g) Ha egy lineáris egyenletrendszer elemi bázistranszformációkkal való megoldása során az

$$x_2 \;\big|\; 0 \quad 0 \;\big|\; -2$$

sort kapjuk, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
(h) Ha egy lineáris egyenletrendszernek megoldása a $(0, 0, \ldots, 0)$ valós szám-n-es, akkor az egyenletrendszer homogén.
(i) Van olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldása csak irracionális számot tartalmaz.
(j) Létezik olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek pontosan 2018 megoldása van.
(k) Ha egy lineáris egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus, akkor legalább egy megoldása van.

(l) Ha egy lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixának determinánsa 0-tól különböző, akkor pontosan egy megoldása van.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.7

A 3.8-18. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

1.3.8. Feladat. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható Cramer-szabállyal, ha ...

(a) az A mátrix szimmetrikus, és determinánsa 0.
(b) az A mátrix négyzetes, és determinánsa nem 0.
(c) az A^T mátrix szimmetrikus, és determinánsa 0.
(d) az A mátrix négyzetes, szimmetrikus és determinánsa 0.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.8

1.3.9. Feladat. Egy adott kétismeretlenes lineáris egyenletrendszernek tudjuk, hogy pontosan egy megoldása van. Ekkor az egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakja ...

(a) csak egy nemnulla sorból állhat.
(b) csak két nemnulla sorból állhat.
(c) csak három nemnulla sorból állhat.
(d) tetszőleges sok nemnulla sorból állhat.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.9

1.3.10. Feladat. Ha két lineáris egyenletrendszernek ugyanaz az általános megoldása, akkor ...

(a) a két egyenletrendszer csak ugyanaz lehet.
(b) a két egyenletrendszer nem egyezhet meg.
(c) a két egyenletrendszerben ugyanannyi egyenlet van.
(d) a két egyenletrendszerben ugyanannyi különböző ismeretlen jelenik meg.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.10

1.3.11. Feladat. Próbálgatással találtunk két megoldását egy adott lineáris egyenletrendszernek. Ekkor biztosan tudjuk, hogy ...

(a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 2$ valamely konkrét pozitív egész szám.
(b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(c) az egyenletrendszer ellentmondó.
(d) az egyenletrendszernek pontosan két megoldása van.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.11

1.3.12. Feladat. Egy lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációval oldunk meg, és a bővített mátrix lépcsős alakjának utolsó sora: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$. Ekkor ...

(a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 1$ valamely konkrét pozitív egész szám.
(b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(c) az egyenletrendszer ellentmondó.
(d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.12

1.3.13. Feladat. Egy lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldunk meg, és a bővített mátrix lépcsős alakjának utolsó két sora: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Ekkor ...

(a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 1$ valamely konkrét pozitív egész szám.
(b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(c) az egyenletrendszer ellentmondó.
(d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.9

1.3.14. Feladat. Egy lineáris egyenletrendszert elemi bázistranszformációval oldottunk meg, és az utolsó lépés után a következőt kaptuk:

	x_2	$\mathbf{b}$
x_1	1	5

Ekkor ...

(a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 1$ valamely konkrét pozitív egész szám.
(b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(c) az egyenletrendszer ellentmondó.
(d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.14

1.3.15. Feladat. Egy lineáris egyenletrendszert elemi bázistranszformációval oldottunk meg, és az utolsó lépés után a következőt kaptuk:

	x_2	$\mathbf{b}$
e_1	0	-2
x_1	1	5

Ekkor ...

(a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 1$ valamely konkrét pozitív egész szám.
(b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(c) az egyenletrendszer ellentmondó.
(d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.15

1.3.16. Feladat. Ha egy 5 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer 7 egyenletből áll úgy, hogy egyik egyenlet sem szerepel kétszer, akkor ...

(a) az egyenletrendszer ellentmondó.
(b) az egyenletrendszernek legfeljebb egy megoldása lehet.
(c) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(d) az egyenletrendszernek nulla, egy vagy végtelen sok megoldása van.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.16

1.3.17. Feladat. Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer A mátrixa négyzetes, és a determinánsa 0, akkor ...

(a) az egyenletrendszer biztosan megoldható.
(b) az egyenletrendszer biztosan nem oldható meg.
(c) az egyenletrendszer csak elemi bázistranszformációval oldható meg.
(d) az egyenletrendszer nem oldható meg Cramer-szabállyal.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.17

1.3.18. Feladat. Az $ax_1 + bx_2 = 0$ lineáris egyenletrendszernek ...

(a) nincs megoldása, ha $a = 0$, $b = 1$.
(b) nincs megoldása, ha $a = b = 0$.
(c) végtelen sok megoldása van, ha $a = b = 1$.
(d) nincs megoldása, ha $a = b = 1$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.3.18

Nehezebb feladatok

1.3.19. Feladat. Legyen $n \geqslant 2$ természetes szám. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert, ahol a tetszőleges valós szám.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & ax_n & = & 1 \end{array}\right.$$

1.3.20. Feladat. Általános megoldása-e az

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek a következő: x_1, x_3, x_4 kötött ismeretlenek, x_2, x_5 szabad ismeretlenek és

$$x_1 = -2 - 5x_2, \qquad x_3 = 2 + 3x_2, \qquad x_4 = 1 - x_5?$$

1.3.21. Feladat. Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 + 2x_6 = 3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert. Van-e olyan általános megoldása a fenti egyenletrendszernek, melyben a kötött ismeretlenek éppen
(a) x_2, x_4 és x_5?
(b) x_1, x_3 és x_5?
Adj meg olyan általános megoldást, melyben az x_1, x_3 és x_5 ismeretlenek a szabadok.

1.4. Mátrixok inverze, mátrixegyenletek, Leontief modell

Mintafeladat. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 9 & 16 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét, ha létezik.

Megoldás. Az A mátrix determinánsa $|A| = 1$, ezért A invertálható. Az A mátrix inverze:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj}(A)^T = \begin{pmatrix} -197 & -110 & 13 \\ -77 & -43 & 5 \\ -16 & -9 & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $\operatorname{Adj}(A) = \big((-1)^{i+j} M_{ij}\big)$ az A mátrix adjungált mátrixa.
A mátrixok inverze elemi bázistranszformációval és Gauss-eliminációval is meghatározható, ld. előadásvázlat ➦.

1.4.1. Feladat. Számítsuk ki a következő mátrixok inverzét.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.1

Mintafeladat. Oldjuk meg a $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 11 & 13 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixegyenletet.

Megoldás. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 11 & 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Ha a mátrixegyenletnek van megoldása, akkor az (2×3)-as. Az egyenletet Gauss eliminációval oldjuk meg:

$$(A \mid B) \overset{\substack{[2]+(-\frac{5}{2})[1] \\ [3]+(-\frac{1}{2})[1]}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & -7/2 & -11/2 & -9/2 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{[1]+6[2] \\ [3]+(-7)[2]}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & -8 & -14 & 6 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 13 & -6 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{2}[1],\ (-2)[2],\ \frac{1}{5}[3]}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 13/5 & -6/5 \end{array}\right).$$

A lépcsős alakból láthatjuk, hogy a mátrixegyenlet nem oldható meg (a harmadik sor ellentmondó).

Mintafeladat. Oldjuk meg az $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$ mátrixegyenletet.

Megoldás. Legyen $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times4}$ és $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times2}$. Ha a mátrixegyenletnek van megoldása, akkor az (4×2)-es. Az egyenletet EBT-vel oldjuk meg:

0.	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$
e_1	1^*	1	0	0	1	1
e_2	0	1	1	0	1	1
e_3	0	0	1	1	1	1

1.	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$
$\mathbf{x}_1$	1	0	0	1	1
e_2	1^*	1	0	1	1
e_3	0	1	1	1	1

2.	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$
$\mathbf{x}_1$	-1	0	0	0
$\mathbf{x}_2$	1	0	1	1
e_3	1^*	1	1	1

3.	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$
$\mathbf{x}_1$	1	1	1
$\mathbf{x}_2$	-1	0	0
$\mathbf{x}_3$	1	1	1

Az eljárásnak vége, a mátrixegyenlet megoldható (vannak szabad változók, ezért végtelen sok megoldás van).

Egy általános megoldás: $X=\begin{pmatrix}1-x_{41}&1-x_{42}\\x_{41}&x_{42}\\1-x_{41}&1-x_{42}\\x_{41}&x_{42}\end{pmatrix}\quad(x_{41},x_{42}\in\mathbb{R})$.

1.4.2. Feladat. Oldjuk meg a következő mátrixegyenleteket.

(a) $\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\\1&3\end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\-1&2&1&0\\0&1&3&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&1&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\-1&2&1&0\\0&1&3&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&1&1\\-1&3&2\end{pmatrix}$;

(d) $X\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&1&3\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}$;

(e) $X\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&5\\3&-2&4\\-1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\-2&0&2\end{pmatrix}$;

(f) $X\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.2

Mintafeladat. Az $A=\begin{pmatrix}0.4&0.2\\0.6&0.6\end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Döntsük el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint állapítsuk meg, hogy mekkora bruttó kibocsátás tartozik a $\mathbf{d}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ vektorral megadott nettó kibocsátáshoz.

Megoldás. Mivel az A mátrix Leontief-inverze: $(E_2-A)^{-1}=\begin{pmatrix}10/3&5/3\\5&5\end{pmatrix}$, ezért a gazdaság működőképes.

A $\mathbf{d}$ nettó kibocsátáshoz $\mathbf{x}=(E_2-A)^{-1}\cdot\mathbf{d}=\begin{pmatrix}25\\45\end{pmatrix}$ bruttó kibocsátás tartozik.

Mintafeladat. Az $A=\begin{pmatrix}0.4&0.2\\0.6&0.6\end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Vizsgáljuk meg, hogy a $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$ árvektorral számolva mely ágazatok lesznek nyereségesek. Ha a gazdaság működőképes, de nem nyereséges mindkét ágazat, akkor adjunk meg olyan árvektort, hogy mindkettő nyereséges legyen.

Megoldás. Mivel $\mathbf{v}\cdot(E_2-A)=\begin{pmatrix}-0.6&0.6\end{pmatrix}$, ezért az első ágazat veszteséges, a második pedig nyereséges. Legyen $\mathbf{v}'=\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}$. Pontosan akkor nyereséges mindkét ágazat, ha $x>0$ és $\frac{x}{2}<y<x$. Pl. a $\mathbf{v}'=\begin{pmatrix}4&3\end{pmatrix}$ esetén mindkét ágazat nyereséges.

1.4.3. Feladat. Az $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Döntsük el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint állapítsuk meg, hogy mekkora bruttó kibocsátás tartozik az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorral megadott nettó kibocsátáshoz. Vizsgáljuk meg, hogy a $(2\ 3)$ árvektorral számolva mely ágazatok lesznek nyereségesek. Ha a gazdaság működőképes, de nem nyereséges mindkét ágazat, akkor adjunk meg olyan árvektort, hogy mindkettő nyereséges legyen.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.3

1.4.4. Feladat. Ugyanaz, mint az előző feladatban, de a következő mátrixokra, nettó kibocsátásokra, illetve árvektorokra:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(3\ 3)$;

(b) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $(4\ 3)$;

(c) $\begin{pmatrix} 0.3 & 3 \\ 0.19 & 0.2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(10\ 38)$;

(d) $\begin{pmatrix} 0.3 & 3 \\ 0.18 & 0.2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(10\ 38)$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.4

Tesztes feladatok

1.4.5. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(a) Ha egy invertálható mátrix minden eleme egész szám, akkor inverzének minden eleme is egész szám.

(b) Ha A és B azonos méretű invertálható mátrixok, akkor $A + B$ is invertálható.

(c) Ha A és B azonos méretű invertálható mátrixok, akkor AB is invertálható.

(d) Ha egy mátrix invertálható, akkor a transzponáltja is invertálható.

(e) Az $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixegyenletnek van megoldása.

(f) Az $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ mátrixegyenletnek van megoldása.

(g) Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, valamint A invertálható mátrix, akkor az $AX = B$ mátrixegyenletnek van megoldása.

(h) Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor az $AX = B$ mátrixegyenletnek van megoldása.

(i) Legyen E a (3×3)-as egységmátrix. Ekkor bármely A (3×3)-as mátrixra az $AX = E$ mátrixegyenletnek van megoldása.

(j) Ha A egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa és $\mathbf{v}^T$ a nettó kibocsátás, akkor $(E - A)^{-1}\mathbf{v}^T$ a bruttó kibocsátás.

(k) Ha A egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa és $\mathbf{v}^T$ a nettó kibocsátás, w^T pedig a bruttó kibocsátás, akkor v komponensei nem nagyobbak, mint w komponensei.

(l) Ha A egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa, akkor bármely $\mathbf{v}$ árvektor esetén az összes ágazat nyereséges.

(ly) Ha A egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa, akkor van olyan $\mathbf{v}$ árvektor, amelyre az összes ágazat nyereséges.

(m) Ha A egy gazdaság ráfordítási mátrixa és $\mathbf{v}$ az árvektor, akkor $\mathbf{v} - \mathbf{v}A$ a profitvektor.

A 4.6-13. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

1.4.6. Feladat. A és B azonos méretű invertálható mátrixok. Melyik NEM feltétlenül invertálható az alábbiak közül?

(a) A^2 (b) AB^{-1} (c) $(AB)^{-1}$ (d) $A - B$

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.6

1.4.7. Feladat. A és B azonos méretű négyzetes mátrixok. Melyik mátrixegyenlet esetén fordulhat elő, hogy nincs megoldása az alábbiak közül?

(a) $AX = A$ (b) $AX = AB$ (c) $AX = B^2$ (d) $AX = 0$

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.7

1.4.8. Feladat. Egy négyzetes mátrix elemei pozitív egész számok. Mikor mondhatjuk biztosan, hogy a mátrix inverzében csupa egész szám áll?

(a) Ha a mátrix determinánsa 1.
(b) Ha a mátrix determinánsa 0.
(c) Ha a mátrix determinánsa pozitív.
(d) Az előzőek közül egyik sem.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.8

1.4.9. Feladat. A egy négyzetes mátrix. Az alábbi feltételek közül melyikből NEM következik, hogy A nemelfajuló?

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$.
(b) Az $AX = B$ mátrixegyenlet minden A-val azonos méretű B esetén megoldható.
(c) A^T invertálható.
(d) A felülrő trianguláris.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.9

1.4.10. Feladat. Tegyük fel, hogy egy gazdaság ráfordítási mátrixában minden elem kisebb 1-nél. Melyik állítás igaz feltétlenül a gazdaságra? (Megjegyzés: árvektorban nem lehetnek negatív számok.)

(a) Működőképes.
(b) Van olyan árvektor, ami mellett van veszteséges ágazat.
(c) Van olyan árvektor, ami mellett van nyereséges ágazat.
(d) Tetszőleges nemnulla nettó kibocsátáshoz végtelen bruttó kibocsátás tartozik.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.10

1.4.11. Feladat. Tegyük fel, hogy egy gazdaság ráfordítási mátrixában minden elem nagyobb 1-nél. Melyik állítás NEM feltétlen igaz a gazdaságra? (Megjegyzés: az árvektorban nem lehetnek negatív számok.)

(a) Nem működőképes.
(b) Bármely árvektor mellett van veszteséges ágazat.
(c) Van olyan árvektor, ami mellett van nyereséges ágazat.
(d) Tetszőleges nemnulla nettó kibocsátáshoz végtelen bruttó kibocsátás tartozik.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.11

1.4.12. Feladat. Tegyük fel, hogy egy gazdaság úgy változik meg, hogy ráfordítási mátrixában minden elem nő. Melyik állítás igaz? (Megjegyzés: árvektorban nem lehetnek negatív számok.)

(a) Ha a gazdaság működőképes volt, akkor az is maradt.
(b) Ha az árvektor nem változott, legalább egy komponensében megnövekedett a profitvektor.
(c) Amennyiben minden ár csökkent, legalább egy komponensében megnövekedett a profitvektor.
(d) Ugyanakkora nettó kibocsátáshoz nagyobb bruttó kibocsátás fog tartozni.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.12

1.4.13. Feladat. Tegyük fel, hogy egy gazdaság ráfordítási mátrixa, valamint az egyes ágazatokhoz tartozó árak is fixek. Az alábbiak közül melyik feltétel a legjobb a gazdaság „egészsége” szempontjából? (Megjegyzés: árvektorban nem lehetnek negatív számok.)

(a) A gazdaság működőképes.
(b) A profitvektor összes komponense pozitív.
(c) Semelyik ágazat sem veszteséges.
(d) Minden nettó kibocsátáshoz véges bruttó kibocsátás tartozik.

A feladat eredménye/megoldása: 2.4.13

Nehezebb feladatok

1.4.14. Feladat. Adjuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét.

1.4.15. Feladat. Határozzuk meg, hogy mely x valós számok esetén invertálható az $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, valamint adjuk is meg az inverzét (természetesen x függvényében).

1.4.16. Feladat. Legyen A $(n \times n)$-es invertálható mátrix. Igazoljuk, hogy az A mátrix inverzének kiszámítása során fellépő generáló elemek szorzatának abszolútértéke megegyezik A determinánsának abszolútértékével.

1.4.17. Feladat. Egy gazdaság ráfordítási mátrixa: $C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$. Tegyük fel, hogy az egyes ágazatokban előállított termékek ára: 10, 15, illetve 5 Ft. Mely ágazatok nyereségesek, illetve veszteségesek? Próbáljunk meghatározni olyan árakat, amelyek mellett a gazdaságban nem lesz veszteséges ágazat.

1.4.18. Feladat. Az x valós paraméter mely értékei esetén lesz az $A = \begin{pmatrix} 0.2 & x \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$ mátrix egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa?

1.4.19. Feladat. Az x valós paraméter mely értékei esetén lesz az $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & x \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$ mátrix egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa?

1.4.20. Feladat. Egy működésképtelen gazdaság ráfordítási mátrixa: $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}$. A gazdaságot modernizálni próbáljuk: a mátrix bármely elemének 1-gyel történő módosításának a költsége 1 milliárd Ft. Hogyan lehet a legolcsóbban elérni, hogy a gazdaság már éppen működőképes legyen?

1.5. Vektortér, altér, generálás, lineáris függetlenség, bázis

Mintafeladat. Döntsük el, hogy az U részhalmaz altere-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek:
(a) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4\}$,
(b) $U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0\right\}$.

Megoldás. Azt kell megvizsgálni, hogy az altérjelölt tartalmazza-e a zérusvektort, zárt-e a vektorok összeadására és skalárokkal való szorzásra.
(a) Az világos, hogy U tartalmazza a zérusvektort. Tegyük fel, hogy $u = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ és $v = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eleme U-nak. Ekkor $a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4$ és $b_1 + b_2 = b_2 + b_3 = b_3 + b_4$, aminek következtében

$$\underbrace{(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)}_{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)} = \underbrace{(a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)}_{(a_2+a_3)+(b_2+b_3)} = \underbrace{(a_3 + b_3) + (a_4 + b_4)}_{(a_3+a_4)+(b_3+b_4)}.$$

Ekkor $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$ is elem U-nak, azaz U zárt a vektorok összeadására. Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lambda \cdot u = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4)$ és

$$\underbrace{\lambda a_1 + \lambda a_2}_{\lambda(a_1+a_2)} = \underbrace{\lambda a_2 + \lambda a_3}_{\lambda(a_2+a_3)} = \underbrace{\lambda a_3 + \lambda a_4}_{\lambda(a_3+a_4)}.$$

Aminek következtében $\lambda \cdot u \in U$ (azaz U zárt a skalárokkal való szorzásra).
(b) Az $u = (1, 0, 0, 0)$ és $v = (0, 1, 1, 1)$ vektorok U-ban vannak, de az $u + v = (1, 1, 1, 1)$ vektor nem eleme U-nak, így U nem zárt a vektorok összeadására vonatkozóan. Ezért U nem altér.

Megjegyzés. Az (a) részben észrevehetjük, hogy az $x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4$ egyenlőségek teljesülése ekvivalens az $x_1 = x_3$ és $x_2 = x_4$ egyenlőségek teljesülésével.

1.5.1. Feladat. Állapítsuk meg, hogy az alábbi részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.
(a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$,
(b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$,
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1x_2 + x_3 = 0\}$,
(d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$,
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0 \text{ és } x_2 = 0\}$,
(f) $U = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_3^2 = 0\right\}$,
(g) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.1

Mintafeladat. Döntsük el, hogy a $v = (2, 0, 2, 2)$ vektor eleme-e az $\mathbb{R}^4$ vektortér

$$U = [(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)]$$

alterének. Amennyiben $v \in U$, akkor állítsuk elő a v vektort az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.

Megoldás. Azt kell eldönteni, hogy a v vektor előáll-e az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.
Meg kell oldanunk a $v = a \cdot (1, 1, 1, 1) + b \cdot (1, 1, 1, 0) + c \cdot (1, 1, 0, 0) + d \cdot (1, 0, 0, 0)$ egyenletet, ahol az a, b, c, d ismeretlenek valós számok. Mivel $a \cdot (1, 1, 1, 1) + b \cdot (1, 1, 1, 0) + c \cdot (1, 1, 0, 0) + d \cdot (1, 0, 0, 0) = (a + b + c + d, a + b + c, a + b, a)$, ezért egyenletünk azzal ekvivalens, hogy

$$(2, 0, 2, 2) = (a + b + c + d, a + b + c, a + b, a) \iff a + b + c + d = 2, a + b + c = 0, a + b = 2, a = 2.$$

Egy LER-t kaptunk, amelyet a szokásos eljárások (Gauss-elim. vagy EBT) valamelyikével megoldva azt kapjuk, hogy a LER megoldható, egyetlen megoldása van: $a = 2$, $b = 0$, $c = -2$ és $d = 2$. Válasz: a v vektor elem U-nak, $v = 2 \cdot (1, 1, 1, 1) + 0 \cdot (1, 1, 1, 0) + (-2) \cdot (1, 1, 0, 0) + 2 \cdot (1, 0, 0, 0)$.

Mintafeladat. Döntsük el, hogy a $v = (2,0,2,2)$ vektor eleme-e az $\mathbb{R}^4$ vektortér

$$U = [(1,1,1,2),(1,1,2,0),(1,2,0,0),(1,0,0,8)]$$

alterének. Amennyiben $v \in U$, akkor állítsuk elő a v vektort az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.

Megoldás. Azt kell eldönteni, hogy a v vektor előáll-e az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.
Meg kell oldanunk a $v = a\cdot(1,1,1,2)+b\cdot(1,1,2,0)+c\cdot(1,2,0,0)+d\cdot(1,0,0,8)$ egyenletet, ahol az a,b,c,d ismeretlenek valós számok. Mivel $a\cdot(1,1,1,2)+b\cdot(1,1,2,0)+c\cdot(1,2,0,0)+d\cdot(1,0,0,8) = (a+b+c+d, a+b+2c, a+2b, 2a+8d)$, ezért egyenletünk azzal ekvivalens, hogy

$$(2,0,2,2) = (a+b+c+d, a+b+2c, a+2b, 2a+8d) \iff a+b+c+d=2, a+b+2c=0, a+2b=2, 2a+8d=2.$$

A LER bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 8 & 2\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),$$

ezért a LER nem oldható meg. Válasz: a v vektor nem elem U-nak.

1.5.2. Feladat. Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének. Amennyiben $v \in U$, akkor állítsuk elő a v vektort az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.

(a) $v = (1,-1,1)$, $U = [(1,-1,0),(0,0,1)]$,
(b) $v = (1,1,1)$, $U = [(1,-1,2),(1,0,1)]$,
(c) $v = (1,2,1)$, $U = [(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)]$,
(d) $v = (1,2,1)$, $U = [(1,1,1),(1,0,-1),(2,1,0)]$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.2

Mintafeladat. A rang meghatározása nélkül döntsük el, hogy az
(a) $u_1 = (31,14,159)$, $V = \mathbb{R}^3$,
(b) $u_2 = (0,0,0), v_2 = (2,71,828)$, $V = \mathbb{R}^3$,
(c) $u_3 = (19,73), v_3 = (3,20)$, $V = \mathbb{R}^2$
vektorrendszerek lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az adott vektortérben.

Megoldás. (a) Az u_1 vektorrendszer lineárisan független, mivel egyetlen, a zérusvektortól különböző vektort tartalmaz ($u_1 \neq \underline{0} = (0,0,0)$). A vektorrendszer nem generátorrendszer, mivel $[u_1] = \{\alpha\cdot u_1 \mid \alpha\in\mathbb{R}\} \neq V$ (pl. $(0,0,1) \notin [u_1]$). A vektorrendszer nem bázis, mivel nem generátorrendszer.

(b) Az u_2, v_2 vektorrendszer nem lineárisan független, mivel egyik vektora a zérusvektor. A vektorrendszer nem generátorrendszer, mivel

$$[u_2, v_2] = \{\alpha\cdot u_2 + \beta\cdot v_2 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} = \{\beta\cdot v_2 \mid \beta\in\mathbb{R}\} = [v_2]$$

(pl. $(0,0,1) \notin [u_2, v_2]$). A vektorrendszer nem bázis, mivel nem lineárisan független.

(c) A vektorrendszer lineárisan független, mivel a vektorrendszer kételemű, és egyik vektor sem skalárszorosa a másik vektornak. A vektorrendszer generátorrendszer, mivel tetszőleges a és b valós számokra

$$(a,b) = \frac{20a-3b}{161}\cdot u_3 + \frac{-73a+19b}{161}\cdot v_3$$

teljesül. A vektorrendszer lineáris független és generátorrendszer, ezért bázis.

1.5.3. Feladat. A rang meghatározása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az adott vektortérben.

(a) $(1,2,-3)$, $V = \mathbb{R}^3$,
(b) $(1,-1,1),(0,0,0)$, $V = \mathbb{R}^3$,
(c) $(2,4,-2),(3,6,-3)$, $V = \mathbb{R}^3$,
(d) $(1,1,2),(1,1,3)$, $V = \mathbb{R}^3$,
(e) $(1,2),(1,3)$, $V = \mathbb{R}^2$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.3

Mintafeladat. Határozzuk meg a $v_1 = (1,2,3), v_2 = (2,3,1), v_3 = (3,1,2), v_4 = (6,6,6)$ vektorrendszer rangját, és döntsük el, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a $V = \mathbb{R}^3$ vektortérben.

Megoldás. Írjuk fel azt a mátrixot, melynek sorait v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer alkotja:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Ha az A mátrixot lépcsős alakra hozzuk, akkor a vezéregyesek száma megegyezik a mátrix rangjával. Az A mátrix lépcsős alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ezért $r(v_1, v_2, v_3, v_4) = 3$, azaz maximum 3 lineárisan független vektor választható ki a vektorrendszerből. A vektorok nem lineárisan függetlenek, ugyanis a vektorrendszer rangja kisebb, mint a vektorrendszer elemszáma, így bázist sem alkotnak. Mivel a rang megegyezik V dimenziójával, ezért generátorrendszert alkotnak V-ben.

1.5.4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját, és döntsük el, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

(a) $(1,-1,1,2), (1,2,1,2), (-1,0,1,-2), (1,3,5,2)$,

(b) $(1,-1,2,-1), (2,2,1,0), (3,1,3,-1), (1,7,-4,3)$,

(c) $(1,-1,2,1), (1,0,1,2), (-1,2,-3,1)$,

(d) $(1,-1,2,1), (1,0,1,2), (-1,2,-3,0)$,

(e) $(1,1,-1,2), (1,1,0,1), (1,2,-1,2), (1,0,1,0), (1,2,3,4)$,

(f) $(1,1,-1,2), (1,1,0,1), (-1,2,1,1), (0,3,-1,4), (1,4,0,4)$,

(g) $(-1,3,1,2), (-8,3,1,-2), (2,6,2,11), (-2,3,1,1)$,

(h) $(5,-2,-8,4), (3,1,1,-2), (6,1,-1,-4), (3,3,7,1)$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.4

Kidolgozott feladat. Az a valós paraméter függvényében döntsük el a $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,-1,1,-1), v_3 = (1,2,4,8), v_4 = (1,a,a^2,a^3)$ vektorrendszerről, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a $V = \mathbb{R}^4$ vektortérben.

Megoldás. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$ mátrix majdnem lépcsős alakját:

$$A \overset{\substack{[2]-[1]\\ [3]-[1]\\ [4]-[1]}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a^3-1 \end{pmatrix} \overset{(-\frac{1}{2})[2]}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a^3-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{[3]-[2]\\ [4]-(a-1)[2]}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^3-a \end{pmatrix} \overset{(\frac{1}{3})[3]}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^3-a \end{pmatrix}$$

$$\overset{[4]-(a^2-1)[3]}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-2a^2-a+2 \end{pmatrix}.$$

Ha $a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0$, akkor az A mátrix majdnem lépcsős alakja: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ezért a vektorrendszer rangja 3. Ezért a vektorrendszer nem lineárisan független (vektorrendszer 4-elemű, a rang 3), nem generátorrendszer (V 4-dimenziós, a rang 3), nem bázis.

Ha $a^3 - 2a^2 - a + 2 \neq 0$, akkor az A mátrix majdnem lépcsős alakja: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ezért a vektorrendszer rangja 4. Ezért a vektorrendszer lineárisan független (vektorrendszer 4-elemű, a rang is 4), generátorrendszer (V 4-dimenziós, a rang 4) és bázis.

Megjegyzés. Tetszőleges mátrix majdnem lépcsős alakjában a vezéregyesek felett nem feltétlenül vannak 0-ák.

1.5.5. Feladat. Az a paraméter függvényében döntsük el az alábbi vektorrendszerről, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $(1, -4, 3, 2), (-1, 4, -2, -4), (3, -12, a, 10)$,

(b) $(1, -1, 2), (2, -1, -1), (1, 0, a^2), (2, -1, a + 4)$,

(c) $(1, 2, 1, 2), (-1, -1, 0, -1), (2, -1, a^2, a + 4)$,

(d) $(1, 2, -1, -1), (-1, -1, 3, 3), (2, 5, a, a), (1, 0, a^2 - a - 5, -5)$,

(e) $(1, -1, 2), (2, -1, -1), (1, 0, a^2), (2, -1, a + 4)$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.5

Mintafeladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér $U = [(1, 0, 1, 0), (1, 1, 2, 3), (1, 4, 5, 8), (5, 8, 13, 21)]$ alterének dimenzióját, valamint adjunk meg benne bázist.

Megoldás. Az U altér dimenziója generátorrendszerének rangjával egyezik meg. Ezt a rangot most EBT-vel határozzuk meg, így a generátorrendszer vektoraiból választunk bázist. Az EBT során a generáló elem oszlopa és sora is elhagyható, az induló táblázat oszlopai tartalmazzák a generátorrendszer vektorait.

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1^*	1	1	5
e_2	0	1	4	8
e_3	1	2	5	13
e_4	0	3	8	21

1.	v_2	v_3	v_4
e_2	1^*	4	8
e_3	1	4	8
e_4	3	8	21

2.	v_3	v_4
e_3	0	0
e_4	-4^*	-3

2.	v_4
e_3	0

Az „eltűnt” vektorok (v_1, v_2, v_3) száma adja U dimenzióját, azaz $\dim(U) = 3$; a v_1, v_2, v_3 vektorrendszer pedig bázis az U altérben.

1.5.6. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér V alterének dimenzióját, valamint adjunk meg benne bázist.

(a) $V = [(1, -1, 1, 2), (1, 2, 1, 2), (-1, 0, 1, -2), (1, 3, 5, 2)]$,

(b) $V = [(1, -1, 2, -1), (2, 2, 1, 0), (3, 1, 3, -1), (1, 7, -4, 3)]$,

(c) $V = [(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 1)]$,

(d) $V = [(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 0)]$,

(e) $V = [(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)]$,

(f) $V = [(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (-1, 2, 1, 1), (0, 3, -1, 4), (1, 4, 0, 4)]$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.6

Mintafeladat. Adjuk meg a $v = (2, 3, 5)$ vektor koordinátasorát az $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathcal{B}$: $v_1 = (7, 11, 13), v_2 = (17, 19, 23), v_3 = (-2, -3, 5)$ bázisban.

Megoldás. Ha a v vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátasora (a, b, c), akkor

$$a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 = v \iff 7a + 17b - 2c = 2,\ 11a + 19b - 3c = 3,\ 13a + 23b + 5c = 5,$$

tehát a, b, c annak a LER-nek az egyetlen megoldása melynek bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} v_1^T & v_2^T & v_3^T & v^T \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 17 & -2 & 2 \\ 11 & 19 & -3 & 3 \\ 13 & 23 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 65/231 \\ 0 & 1 & 0 & 5/231 \\ 0 & 0 & 1 & 13/77 \end{array}\right).$$

A v vektor koordinátasora a LER egyetlen megoldása: $\left(\frac{65}{231}, \frac{5}{231}, \frac{13}{77}\right)$.

1.5.7. Feladat. Adjuk meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban.

(a) $v = (0, 0, 0)$, bázis: $(3, -2, 1), (-2, 5, 7), (2, 1, 2)$,

(b) $v = (1, -1, 2)$, bázis: $(1, 2, 3), (-1, 1, -2), (0, 2, 1)$,

(c) $v = (2, 1, -1)$, bázis: $(-4, -2, 2), (1, 2, 4), (-1, 3, 9)$,

(d) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, -1, 3), (2, -1, 4), (3, -1, 4)$,

(e) $v = (6, 12, -2)$, bázis: $(3, 5, -7), (-5, -3, 7), (7, 3, 5)$,

(f) $v = (1, 1, 1)$, bázis: $(4, 6, 7), (-3, 5, 7), (2, 5, 6)$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.7

Mintafeladat. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánst.

Megoldás. EBT-vel határozzuk meg a rangot:

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1^*	2	3	4
e_2	2	3	4	5
e_3	3	4	5	6
e_4	4	5	6	7

1.	v_2	v_3	v_4
e_2	-1^*	-2	-3
e_3	-2	-4	-6
e_4	-3	-6	-9

2.	v_3	v_4
e_3	0	0
e_4	0	0

Az EBT utolsó táblázata azt mondja, hogy a mátrix rangja 2 (ez a báziba bevont vektorok elemszáma). Egy maximális méretű nem 0 értékű determinánst kapunk, ha tekintjük a mátrix első két oszlopának (ezek felelnek meg a bázisba bevont vektoroknak), és első két sorának (a bevont vektorok e_1 és e_2 helyére kerültek) metszéspontjai által meghatározott (2×2)-es aldeterminánst.

1.5.8. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánst.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.8

Mintafeladat. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ a+2 & a^2-1 & 0 & 2a+5 \\ 2 & a+10 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix rangját az a valós paraméterek függvényében.

Megoldás. Határozzuk meg az A mátrix majdnem lépcsős alakját:

$$A \overset{\substack{[2]-(a+2)[a] \\ [3]-2[1]}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 0 & -2a-1 & a+2 & 1 \\ 0 & -a+10 & -5 & -1 \end{pmatrix} \overset{[2]^T \leftrightarrow [4]^T}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & a+2 & -2a-1 \\ 0 & -1 & -5 & -a+10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{[3]+[2]}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & a+2 & -2a-1 \\ 0 & 0 & a-3 & -3a+9 \end{pmatrix}$$

Ezen a ponton két esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy $a-3=0$ vagy $a-3 \neq 0$ teljesül. Ha $a-3 \neq 0$, akkor az A mátrix lépcsős alakja: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & a+2 & -2a-1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, ezért rangja 3. Ha $a-3=0$, akkor az A mátrix majdnem lépcsős alakja: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ezért rangja 2.

Összefoglalva: az A mátrix rangja 3, ha $a \neq 3$ és 2, ha $a = 3$.

1.5.9. Feladat. Határozzuk meg a következő mátrix rangját az a valós paraméter függvényében:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2a & -1 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.9

Tesztes feladatok

1.5.10. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(a) Ha egy vektortér valamely részhalmaza zárt az összeadásra, akkor az altér.
(b) Bármely vektortér bármely altere zárt vektorok kivonására nézve.
(c) Ha egy vektortérnek van $\underline{0}$-tól különböző eleme, akkor végtelen sok eleme van.
(d) Bármely vektortérnek van altere.
(e) A $v_1, \dots, v_n$ vektorok bármely lineáris kombinációja eleme az általuk generált altérnek.
(f) Bármely V vektortér és v_1, v_2, v_3 vektor esetén $v_1 + v_2 - v_3 \in [v_1, v_2, v_3]$.
(g) Bármely V vektortér és v_1, v_2, v_3 vektor esetén $v_1 + v_2 - v_3 \in [v_1, v_2]$.
(h) Ha egy vektorrendszer tartalmazza a $\underline{0}$ vektort, akkor lineárisan függő.
(i) Lineárisan függő vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan függő.
(j) Az egy vektorból álló vektorrendszerek mind lineárisan függetlenek.
(k) $\mathbb{R}^5$-ben bármely 6 tagú vektorrendszer lineárisan függő.
(l) $\mathbb{R}^5$-ben nincs 4 tagú generátorrendszer.
(ly) $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer rangja mindig kisebb, vagy egyenlő, mint n.
(m) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a rangja megegyezik az elemszámával.
(n) Ha V-nek van n elemű bázisa, akkor nincs $n+1$ elemű lineárisan független vektorrendszere.
(o) Ha V-ben van n elemű lineárisan független vektorrendszer, akkor a dimenziója n.
(p) Ha V-ben van n elemű lineárisan független vektorrendszer, illetve n elemű generátorrendszer is, akkor n dimenziós.
(q) Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.
(r) Legyen a V vektortérben a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független, az $u_1, \dots, u_n$ pedig generátorrendszer. Ekkor $k \leqslant n$.
(s) Ha a V vektortér egy bázisa v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, és a v vektor koordinátasora ebben a bázisban $(0\ 0\ 1\ 0\ 0)$, akkor v tagja a bázisnak.
(t) Az $\mathbb{R}^3$ vektortér $(1,-1,2), (2,1,3), (1,-1,3)$ bázisában a $(2,-2,5)$ vektor koordinátasora $(1\ 0\ 1)$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.10

Az 5.11-22. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

1.5.11. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ és $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0\}$ alterek $\mathbb{R}^3$-ben, ekkor ...

(a) $U \subseteq V$, de $U \nleqslant V$ (b) $V \subseteq U$, de $V \nleqslant U$ (c) $U \leqslant V$ (d) $V \leqslant U$

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.11

1.5.12. Feladat. Tetszőleges $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén ...

(a) az u_1, u_2, u_3 vektorrendszer lineárisan független.
(b) az u_1 vektorrendszer lineárisan független.
(c) az u_1, u_2, u_3, u_4 vektorrendszer lineárisan függő.
(d) az u_1, u_2 vektorrendszer lineárisan függő.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.12

1.5.13. Feladat. Az a, b, c, d paraméterek között legalább hány különböző értékűnek kell lennie, hogy az $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ vektorrendszer lineárisan független legyen?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.13

1.5.14. Feladat. Tetszőleges $U \leqslant \mathbb{R}^3$ altér esetén, melyik állítás NEM teljesül?

(a) $\underline{0} \in U$.
(b) Ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.
(c) Van olyan $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, amelyre $[u_1, u_2] = U$.
(d) Ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $[u_1, u_2] \subseteq U$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.14

1.5.15. Feladat. Tetszőleges $u_1, \dots u_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokat írjuk be egy mátrix soraiba, majd a mátrixot hozzuk lépcsős alakra. A lépcsős alakú mátrix nemnulla sorait jelölje $v_1, \dots, v_j$.

(a) Ha $j < k$, akkor az $u_1, \dots u_k$ vektorrendszer lineárisan független.
(b) Ha $k = j$, akkor az $v_1, \dots v_j$ vektorrendszer lineárisan függő.
(c) Ha $k > n$, akkor az $u_1, \dots u_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$ bázisa.
(d) Az $u_1, \dots u_k$ vektorrendszer rangja j.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.15

1.5.16. Feladat. Az alábbiak közül melyik halmaz nem egy 3-dimenziós vektortér?

(a) $\mathbb{R}^3$
(b) $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ \sum_{i=1}^4 x_i = 0\right\}$
(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \ (x_1 + x_2)(x_3 - x_4 + 2x_5) = 0\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 : \ (x_1 - x_2)^2 + (x_3 + 2x_4)^2 + (2x_5 + x_6)^2 = 0\}$

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.16

1.5.17. Feladat. Az alábbiak közül hány dimenziós nem lehet egy 3 különböző vektor által kifeszített vektortér?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.17

1.5.18. Feladat. Egy $(n \times n)$-es mátrix minden eleme 1. Legalább hány darab 1-est kell 0-ra cserélnünk, hogy a mátrix sorvektorai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkossák?

(a) $n-2$ (b) $n-1$ (c) n (d) $n(n-1)/2$

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.18

1.5.19. Feladat. Tudjuk, hogy $U, V \leqslant \mathbb{R}^n$, továbbá, hogy $U \cap V = \{\underline{0}\}$, ekkor ...

(a) $\dim U + \dim V \leqslant n$. (b) $\dim U + \dim V = n$.
(c) $\dim U + \dim V > n$. (d) az előzőek közül egyik sem biztos.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.19

1.5.20. Feladat. Melyik állítás NEM teljesül?

(a) Van olyan mátrix, amelynek rangja 0.
(b) Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor A rangja legfeljebb $\max(m, n)$.
(c) Nincs olyan $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, amelynek a rangja $\max(m, n)$.
(d) Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor A rangja legfeljebb $\min(m, n)$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.20

1.5.21. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sorvektorai alkotják az $U \leqslant \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét. Az alábbiak közül melyik egyezik meg az U altér dimenziójával?

(a) Az A mátrix determinánsa.
(b) Az A mátrix rangja.
(c) Az A mátrix nyoma (a főátlóban lévő elemek összege).
(d) Az előbbiek közül egyik sem.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.21

1.5.22. Feladat. Ha a $v \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátasora az u_1, u_2, u_3 bázisban $(1, 0, 1)$, akkor ...

(a) $v \in [u_1, u_2]$.
(b) az u_1, v, u_3 vektorrendszer is bázis.
(c) az u_1 koordinátasora a v, u_2, u_3 bázisban $(1, 0, -1)$.
(d) az u_1 koordinátasora a v, u_2, u_3 bázisban ugyanaz, mint a v, u_3, u_2 bázisban.

A feladat eredménye/megoldása: 2.5.22

Nehezebb feladatok

1.5.23. Feladat. Legyen u, v, w három vektor egy vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

1.5.24. Feladat. Legyen
(a) $U = [(1, -2, 1, -1), (-1, 1, 1, 1), (1, -3, 3, -1)]$, $V = [(-1, 0, 3, 1), (1, -4, 5, -1), (1, 3, -4, 2)]$,
(b) $U = [(1, -2, 1, -1), (-1, 1, 1, 1), (1, -3, 3, -1)]$, $V = [(-1, 0, 3, 1), (1, -4, 5, -1), (-2, 2, 2, 2)]$,
két altere az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek. Igaz-e, hogy $U = V$?

1.5.25. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ és $V = [(1, 2, 1)]$ alterek $\mathbb{R}^3$-ban. Igaz-e, hogy $U = V$?

1.5.26. Feladat. Legyen

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 + x_4 = 0\},$$
$$V = [(1, 2, 4, -5), (2, 1, 3, -4)].$$

Igaz-e, hogy $U = V$?

1.5.27. Feladat. Döntsük el, hogy az a valós paraméter mely értékei esetén lesz eleme a $v_a = (-1, -3, a+1)$ vektor az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének:

(a) $U = [(1, 2, -a), (1, 1, 0), (1, a+2, -2)]$,

(b) $U = [(1, -1, 1), (1, 0, 1-a), (-1, a+1, -2)]$.

1.5.28. Feladat. Hány maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánsa van az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixnak?

1.6. Sajátérték, sajátvektor, kvadratikus alakok

Mintafeladat. Adjunk meg bázist a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_5-x_6-x_7 & = & 0 \\ x_2+x_3-x_5-x_7 & = & 0 \\ -x_2-x_3+x_4+x_7 & = & 0 \end{array}\right.$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében.

Megoldás. Mindenek előtt meg kell oldanunk a HLER-t a szokásos módok valamelyikén, pl. EBT-vel (mivel a konstansok oszlopa az eljárás során nem fog változni, ezért az induló táblázatban nem tűntetjük fel):

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
e_1	1^*	1	1	0	1	−1	−1
e_2	0	1	1	0	−1	0	−1
e_3	0	−1	−1	1	0	0	1

1.	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1	1	0	1	−1	−1
e_2	1	1	0	−1	0	−1
e_3	−1	−1	1^*	0	0	1

2.	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7
x_1	1	1	1	−1	−1
e_2	1	1	-1^*	0	−1
x_4	−1	−1	0	0	1

3.	x_2	x_3	x_6	x_7
x_1	2	2	−1	−2
x_5	−1	−1	0	1
x_4	−1	−1	0	1

Az eljárás véget ért, három kötött (x_1, x_4, x_5) és négy szabad ismeretlen van (x_2, x_3, x_6, x_7). Egy általános megoldás (az utolsó táblázatból leolvasva):

$$x_1=-2x_2-2x_3+x_6+2x_7, \quad x_4=x_2+x_3-x_7, \quad x_5=x_2+x_3-x_7 \quad (x_2,x_3,x_6,x_7\in\mathbb{R}).$$

A HLER megoldásterének egy bázisa: v_1, v_2, v_3, v_4, ahol

x_2	x_3	x_6	x_7	x_1	x_4	x_5		(x_1,	x_2,	x_3,	x_4,	x_5,	x_6,	x_7)
1	0	0	0	−2	1	1	$v_1=($	−2,	1,	0,	1,	1,	0,	0)
0	1	0	0	−2	1	1	$v_2=($	−2,	0,	1,	1,	1,	0,	0)
0	0	1	0	−2	1	1	$v_3=($	1,	0,	0,	0,	0,	1,	0)
0	0	0	1	−2	1	1	$v_4=($	2,	0,	0,	−1,	−1,	0,	1)

1.6.1. Feladat. Adjunk meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterében.

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & & - & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \end{array}\right.$

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.1

Mintafeladat. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

Megoldás. Az A mátrix sajátértékei p_A karakterisztikus polinomjának valós gyökei. A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_A = |A - x \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 5 \\ 6 & 0-x & 4 \\ 2 & 7 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 + 54x + 160 = -(x-10)(x^2+7x+16),$$

melynek egyetlen valós gyöke van: $\lambda = 10$. Ezért A egyetlen sajátértéke $\lambda = 10$.

1.6.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -1 & -6 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.2

Mintafeladat. Adjunk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & -8 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ mátrix $\lambda = 3$ sajátértékéhez tartozó U_λ sajátalterében bázist.

Megoldás. Az A mátrix karakterisztikus polinomja: $p_A = |A - x \cdot E_3| = -x^3 + 10x^2 - 33x + 36 = -(x-4)(x-3)^2$. Mivel $\lambda = 3$ gyöke p_A-nak, ezért valóban sajátértéke A-nak. A $\lambda = 3$ sajátértékéhez tartozó U_λ sajátaltér annak a HLER-nek a megoldástere, amelynek mátrixa $A - \lambda \cdot E_3 = A - 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -4 & -4 & -8 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Így a HLER fundamentális megoldásrendszere az U_λ sajátaltér bázisa. A HLER mátrixának lépcsős alakja $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ezért a HLER egy általános megoldása: $x_1 = -x_2 - 2x_3$ $(x_2, x_3 \in \mathbb{R})$. Egy fundamentális megoldásrendszer kapunk, ha a szabad ismeretlenek $x_2 = 1, x_3 = 0$, illetve $x_2 = 0, x_3 = 1$ helyettesítését vesszük: $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (-2, 0, 1)$. A v_1, v_2 vektorrendszer az U_λ sajátaltér egy bázisa.

1.6.3. Feladat. Adjunk meg az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében bázist.

(a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$; (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$;

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$; (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.3

Mintafeladat. Sajátvektora-e a v vektor az A mátrixnak?

(a) $v = (-1, 0, 1)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $v = (-8, 1, 10)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Megoldás. Azt kell megvizsgálni, hogy Av^T skalárszorosa-e v^T-nak.

(a) Mivel $Av^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, ezért olyan λ valós skalárt keresünk, amelyre $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ teljesül, azaz $2 = -\lambda$, $-4 = 0\lambda$ és $-2 = \lambda$. Ilyen skalár nem létezik, ezért v nem sajátvektora A-nak.

(b) Mivel $Av^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -5 \\ -50 \end{pmatrix} = (-5) \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$, ezért v sajátvektora A-nak, mégpedig a $\lambda = -5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

1.6.4. Feladat. Sajátvektora-e a v vektor az A mátrixnak?

(a) $v = (3, 4)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$;

(b) $v = (0, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$;

(c) $v = (5, 4, 4)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -4 \\ -4 & 0 & 9 \\ -4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$;

(d) $v = (9, -5, 8)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -4 \\ -4 & 0 & 9 \\ -4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.4

Mintafeladat. Hozzuk kanonikus alakra a $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ valós kvadratikus alakot, és határozzuk meg az osztályát.

1. Megoldás (a kanonikus alak előállítása szimmetrizált elemi átalakításokkal)**.** A q kvadratikus alak mátrixa: $A_q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Mivel

$$A_q \overset{[2]+\frac{1}{3}[1]}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -8/3 & 4/3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{[2]^T+\frac{1}{3}[1]^T}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -8/3 & 4/3 \\ 1 & 4/3 & -3 \end{pmatrix} \overset{[3]+\frac{1}{3}[1]}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -8/3 & 4/3 \\ 0 & 4/3 & -8/3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{[3]^T+\frac{1}{3}[1]^T}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -8/3 & 4/3 \\ 0 & 4/3 & -8/3 \end{pmatrix} \overset{[3]+\frac{1}{2}[2]}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -8/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{[3]^T+\frac{1}{2}[2]^T}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\frac{1}{\sqrt{3}}[1] \\ \frac{1}{\sqrt{3}}[1]^T}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\sqrt{\frac{3}{8}}[1] \\ \sqrt{\frac{3}{8}}[1]^T}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{\sqrt{2}}[1] \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[1]^T}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ezért q kanonikus alakja: $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, tehát q negatív definit.

Mintafeladat. Hozzuk kanonikus alakra a $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ valós kvadratikus alakot, és határozzuk meg az osztályát.

2. Megoldás (a kanonikus alak előállítása teljes négyzetes kiegészítéssel)**.** Teljes négyzetek összegévé/különbségévé alakítjuk a $q(x_1, x_2, x_3)$ kifejezést:

$$
\begin{aligned}
q(x_1,x_2,x_3) &= -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
&= \underbrace{-3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3}_{-\left(\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3\right)^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{2}{3}x_2x_3} \qquad -3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\
&= -(\sqrt{3}x_1 - x_2 - x_3)^2 \quad \underbrace{-\frac{8}{3}x_2^2 + \frac{8}{3}x_2x_3}_{-\left(\sqrt{\frac{8}{3}}x_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}x_3^2} \quad -\frac{8}{3}x_3^2 \\
&= -(\sqrt{3}x_1 - x_2 - x_3)^2 - \left(\sqrt{\frac{8}{3}}x_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}x_3\right)^2 - \left(\sqrt{2}x_3\right)^2 \\
&= -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2,
\end{aligned}
$$

ahol $y_1 = \sqrt{3}x_1 - x_2 - x_3$, $y_2 = \sqrt{\frac{8}{3}}x_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}x_3$ és $y_3 = \sqrt{2}x_3$. Ezért q kanonikus alakja $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, tehát q negatív definit.

Megjegyzés. A megoldás alapját az alábbi azonosságok képezik $(a, b, c \in \mathbb{R},\ a > 0)$:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bxy &= \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y\right)^2 - \frac{b^2}{4a}y^2, \\
-ax^2 + bxy &= -\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}y\right)^2 + \frac{b^2}{4a}y^2, \\
ax^2 + bxy + cxz &= \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y + \frac{c}{2\sqrt{a}}z\right)^2 - \frac{b^2}{4a}y^2 - \frac{c^2}{4a}y^2 - \frac{bc}{2a}yz, \\
-ax^2 + bxy + cxz &= -\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}y - \frac{c}{2\sqrt{a}}z\right)^2 + \frac{b^2}{4a}y^2 + \frac{c^2}{4a}y^2 + \frac{bc}{2a}yz.
\end{aligned}
$$

1.6.5. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra a V vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozzuk meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$;

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$;

(f) $V = \mathbb{R}^4$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.5

Tesztes feladatok

1.6.6. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(a) Ha egy $(n \times n)$-es mátrix determinánsa 1, akkor a rangja n.

(b) Ha egy $(n \times n)$-es mátrix determinánsa 0, akkor a rangja $n - 1$.

(c) Ha egy $(k \times l)$-es mátrix két sora arányos, akkor a rangja nem lehet k.

(d) Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, melynek nincs megoldása.

(e) Ha egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere 5 dimenziós, akkor az egyenletrendszer legalább 5 ismeretlent tartalmaz.

(f) Ha egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere 5 dimenziós, akkor az egyenletrendszer legalább 5 egyenletből áll.

(g) Ha egy homogén lineáris egyenletrendszernek több változója van, mint egyenlete, akkor a megoldástere legalább 1 dimenziós.

(h) Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az 1.

(i) A $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátvektora a $(-1, 1, 1)$.
(j) Ha u és v egy A mátrix sajátvektorai, akkor $u + v$ is.
(k) Ha λ és ν sajátértékei egy A mátrixnak, akkor $\lambda + \nu$ is sajátértéke A-nak.
(l) Ha egy kvadratikus alak mátrixának főminorai rendre -1, -3 és -5, akkor a kvadratikus alak negatív definit.
(ly) Ha egy kvadratikus alak mátrixának sajátértéke az 1, akkor a kvadratikus alak pozitív definit.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.6

A 6.7-18. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

1.6.7. Feladat. Egy homogén lineáris egyenletrendszernek ...

(a) pontosan akkor van megoldása, ha az együtthatómátrixának determinánsa nem nulla.
(b) pontosan akkor van megoldása, ha az együtthatómátrixának determinánsa nulla.
(c) mindig van megoldása.
(d) mindig pontosan egy megoldása van.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.7

1.6.8. Feladat. Tekintsünk egy n-változós homogén lineáris egyenletrendszert, amely megoldásainak altere két dimenziós. Vegyünk egy v_1, v_2 lineárisan független vektorrendszert a megoldásainak alterében. Ekkor az u vektor pontosan akkor megoldása az egyenletrendszernek, ha u ...

(a) skalárszorosa vagy a v_1, vagy a v_2 vektornak.
(b) összege a v_1 és v_2 vektoroknak.
(c) a zérusvektorral egyenlő, azaz v_1 és v_2 egymás ellentettje.
(d) tetszőleges lineáris kombinációja a v_1 és v_2 vektoroknak.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.8

1.6.9. Feladat. Tekintsünk egy n-változós homogén lineáris egyenletrendszert, és legyen az együtthatómátrixának rangja r. Ekkor az egyenletrendszer megoldásterének dimenziója ...

(a) mindig kisebb, mint r.
(b) mindig nagyobb, mint r.
(c) pontosan r.
(d) pontosan $n - r$.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.9

1.6.10. Feladat. Egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere ...

(a) mindig tartalmazza a zérusvektort.
(b) sohasem tartalmazza a zérusvektort.
(c) kizárólag a zérusvektorból áll.
(d) mindig tartalmaz a zérusvektortól különböző elemet.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.10

(a) Egy négyzetes mátrixnak mindig van legalább egy sajátértéke a valós számok között.
(b) Ha egy négyzetes mátrixnak van legalább egy sajátértéke a valós számok között, akkor van több is.
(c) Ha egy mátrixnak van sajátértéke a valós számok között, akkor az csak négyzetes mátrix lehet.
(d) Ha egy mátrixnak nincs sajátértéke a valós számok között, akkor az nem lehet négyzetes mátrix.

1.6.11. Feladat.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.11

(a) Egy mátrix karakterisztikus polinomjának mindig van a valós számok körében gyöke.
(b) Ha egy mátrix karakterisztikus polinomjának van legalább egy gyöke, akkor van több is.
(c) Egy mátrix karakterisztikus polinomjának mindig van egynél több gyöke.
(d) A fenti három állítás mindegyike hamis.

1.6.12. Feladat.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.12

1.6.13. Feladat. Egy mátrix adott λ sajátértékéhez tartozó sajátaltere ...

(a) kizárólag az ugyanehhez a sajátértékhez tartozó összes sajátvektorból áll.
(b) tartalmazza az ugyanehhez a sajátértékhez tartozó összes sajátvektort.
(c) nem tartalmazza az ugyanehhez a sajátértékhez tartozó összes sajátvektort.
(d) tartalmazza a mátrix összes sajátértékéhez tartozó összes sajátvektort.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.13

1.6.14. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének dimenziója ...

(a) lehet nagyobb, mint 3.
(b) mindig pontosan 3.
(c) lehet kisebb, mint 3.
(d) pontosan akkor lehet 3, ha van a λ sajátértékhez tartozó 3 különböző sajátvektor.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.14

1.6.15. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének dimenziója ...

(a) mindig pontosan n.
(b) lehet, hogy kisebb, mint n, de nagyobb, mint az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix rangja.
(c) egyenlő az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix rangjával.
(d) lehet kisebb, mint az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix rangja.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.15

1.6.16. Feladat. Egy n-változós kvadratikus alak kanonikus alakjában ...

(a) csak másodfokú tagok vannak, a tagok száma mindig pontosan n.
(b) csak másodfokú tagok vannak, a tagok száma mindig kisebb, mint n.
(c) csak másodfokú tagok vannak, a tagok száma legfeljebb n.
(d) van elsőfokú tag, ha a kvadratikus alak szemidefinit.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.16

1.6.17. Feladat. Egy kvadratikus alak mátrixa ...

(a) transzponáláskor nem változik.
(b) ha tartalmaz nullát, akkor a kvadratikus alak szemidefinit.
(c) felső trianguláris mátrix, ha a kvadratikus alak pozitív definit.
(d) mindig diagonális mátrix.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.17

(a) Negatív definit kvadratikus alak minden főminora negatív.
(b) Pozitív definit kvadratikus alak minden főminora pozitív.
(c) Pozitív definit kvadratikus alak főminorai felvehetnek pozitív és negatív értékeket is.
(d) A fenti három állítás mindegyike hamis.

1.6.18. Feladat.

A feladat eredménye/megoldása: 2.6.18

Nehezebb feladatok

1.6.19. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 - 14x_3 = a \end{cases}$$

1.6.20. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 + ax_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 5 \end{cases}$$

1.6.21. Feladat. Melyek igazak a következő állítások közül tetszőleges m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre? Ha nem teljesül az állítás, adjunk ellenpéldát.

(a) Ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.
(b) Ha $n = m$, akkor pontosan egy megoldás van.
(c) Ha pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
(d) Ha $n < m$, akkor nincs megoldás.
(e) Ha $m < n$, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
(f) Ha $n = m$ és végtelen sok megoldás van, akkor az együtthatókból álló determináns 0.
(g) Ha $n = m$ és az együtthatókból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

1.6.22. Feladat. Adjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a valós paraméter értékét úgy, hogy a megoldástér dimenziója 3 legyen, valamint ekkor adjunk is meg bázist a megoldásterében.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - ax_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

1.6.23. Feladat. Adjuk meg az a paraméter összes olyan értékét, melyekre az alábbi mátrixnak a λ valós szám **nem** sajátértéke.

(a) $\begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ a+2 & a \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$.

1.6.24. Feladat. Adjunk meg olyan, 0-t nem tartalmazó mátrixot, melynek $(1, -1, 3)$ sajátvektora.

1.6.25. Feladat. Adjunk meg olyan, 0-t nem tartalmazó (3×3)-as mátrixot, melynek -3 sajátértéke.

1.6.26. Feladat. Adjunk meg olyan, 0-t nem tartalmazó mátrixot, melynek $(1, -1, 3)$ és $(2, 1, -1)$ sajátvektorai.

1.6.27. Feladat. Az a valós paraméter milyen értékei esetén sajátvektora a $v = (1, -1, a)$ vektor az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

mátrixnak?

2. MEGOLDÁSOK

2.1. Mátrixok

2.1.1. Megoldás. (a) $A + B$ nem definiált, $A + F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $2B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, $CB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$, BC nem definiált,

$DC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$;

(c) $BF = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$, $E^2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $GH = \begin{pmatrix} \sqrt{15} & \frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{3\sqrt{6}}{5} \\ \frac{3}{2\sqrt{10}} & \frac{17}{50} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.87298 & 2.03538 \\ 0.474342 & 0.34 \end{pmatrix}$;

$EB^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $E^TA = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D^TC^T = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$;

(d) $(A + B)C$ nem definiált, $(A + B^T)D = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}$, $AD + B^TD = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}$.

☞ 1.1. (d), ↩ 1.1.1

2.1.2. Megoldás. Az f polinom A helyen vett helyettesítési értéke:

$$f(A) = A^2 + 3 \cdot A - 4 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -12 \\ 26 & 12 & -2 \\ 22 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

↩ 1.1.2

2.1.3. Megoldás. A B mátrix pontosan akkor cserélhető fel az A mátrixszal, ha vannak olyan a és b valós számok, amelyekre $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ teljesül.

☞ 1.3., ✍ 1.3., ↩ 1.1.3

2.1.4. Megoldás. A munkanélküliségi ráta 1 év múlva 22%, 2 év múlva 23.2%, illetve 4 év múlva 24.352%. A munkanélküliségi rátának van egyensúlyi helyzete: 25%.

☞ 1.4., ✍ 1.4., ↩ 1.1.4

2.1.5. Megoldás. (a) Az 1. jelöltre leadott szavazatok.
(b) Az 5. körzetben leadott szavazatok.
A második jelöltre a hatodik körzetben leadott szavazatok száma

$$\frac{e_{2,6}^T \cdot A \cdot e_{6,15}}{\mathbf{1}_6^T \cdot A \cdot \mathbf{1}_{15}} \cdot 100$$

százaléka az összes érvényes szavazatnak.

↩ 1.1.5

2.1.6. Megoldás. (a) $\mathbf{e}_{3,31}^T \cdot A \cdot \mathbf{b}^T$: a harmadik napon elfogyott sör ára,
(b) $\mathbf{1}_{31}^T \cdot A$: a júliusban fogyasztott sör mennyisége fajtákra lebontva,
(c) $A \cdot \mathbf{1}_{12}$: a júliusban fogyasztott sör mennyisége napokra lebontva.

☞ 1.6., ↩ 1.1.6

Tesztes feladatok

2.1.7. Megoldás. (a) Igaz, (b) igaz, (c) hamis, (d) igaz, (e) hamis, (f) igaz, (g) hamis, (h) igaz, (i) igaz, (j) igaz, (k) hamis, (l) hamis.

↩ 1.1.7

2.1.8. Megoldás. (a)

↩ 1.1.8

2.1.9. Megoldás. (b)

↩ 1.1.9

2.1.10. Megoldás. (b)

↩ 1.1.10

2.1.11. Megoldás. (c)

↩ 1.1.11

2.1.12. Megoldás. (a)

↩ 1.1.12

2.1.13. Megoldás. (d)

↩ 1.1.13

2.1.14. Megoldás. (c)

↩ 1.1.14

2.1.15. Megoldás. (d)

↩ 1.1.15

2.1.16. Megoldás. (b)

↩ 1.1.16

2.1.17. Megoldás. (d)

↩ 1.1.17

2.2. Determinánsok

2.2.1. Megoldás. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$; (b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; (c) $\begin{vmatrix} -0.6 & 0.5 \\ 0.4 & -0.3 \end{vmatrix} = -0.02$.

↩ 1.2.1

2.2.2. Megoldás. (a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

↩ 1.2.2

2.2.3. Megoldás. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2^* & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

↩ 1.2.3

2.2.4. Megoldás. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8$; (c) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -552$;

(d) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 16$; (e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 10$; (f) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15$;

(g) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$; (h) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -24$.

☞ 2.4. (a) & (b), (c), (f), (h), ✍ 2.4. (a) & (b), (f), (h), ↩ 1.2.4

2.2.5. Megoldás. (a) $d = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ -2 & 2 & x+5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = x^2 + x + 10$, ezért

$$d = 0 \text{ nem lehetséges,}$$
$$d = 30 \iff x = -5 \text{ vagy } x = 4;$$

(b) $d = \begin{vmatrix} -1 & x & x-1 \\ -2 & x-2 & x+3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 4x$, ezért

$$d = 0 \iff x = -2,$$
$$d = 30 \iff x = 11/2;$$

(c) $d = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & x-1 \\ -2 & x-2 & 3 \\ x-1 & 2 & -x+1 \end{vmatrix} = -2x^3 + 8x^2 - 19x + 13$, ezért

$$d = 0 \iff x = 1,$$

$$d = 30 \iff x = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{9\sqrt{10099}-887}}{2^{2/3}} - \frac{25}{\sqrt[3]{2\left(9\sqrt{10099}-887\right)}} + 4\right) \approx -0.672381.$$

☞ 2.5. (c), ↩ 1.2.5

Tesztes feladatok

2.2.6. Megoldás. (a) Hamis, (b) hamis, (c) hamis, (d) hamis, (e) igaz, (f) igaz, (g) hamis, (h) igaz, (i) igaz, (j) hamis, (k) igaz, (l) hamis.

↩ 1.2.6

2.2.7. Megoldás. (a)

↩ 1.2.7

2.2.8. Megoldás. (c)

↩ 1.2.8

2.2.9. Megoldás. (d)

↩ 1.2.9

2.2.10. Megoldás. (d)

↩ 1.2.10

2.2.11. Megoldás. (b)

↩ 1.2.11

2.2.12. Megoldás. (b)

↩ 1.2.12

2.2.13. Megoldás. (c)

↩ 1.2.13

2.2.14. Megoldás. (d)

↩ 1.2.14

2.2.15. Megoldás. (a)

↩ 1.2.15

2.2.16. Megoldás. (c)

↩ 1.2.16

2.2.17. Megoldás. (c)

↩ 1.2.17

2.3. Lineáris egyenletrendszerek

2.3.1. Megoldás. A lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixára végrehajtott Gauss-elimináció utolsó lépését (mátrixát) adjuk meg, a nem csak 0-ákat tartalmazó sorok első 0-tól különböző eleme 1, és ezen 1-esek felett is „kinulláztuk” az elemeket (Így könnyen leolvasható a megoldás).

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, (b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$, (c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, (d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$,

(e) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, (f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$, (g) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

(h) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$, (i) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

A feladat (i) részének részletes megoldása elemi bázistranszformációval:

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
e_1	2^*	-1	1	2	3	2
e_2	6	-3	2	4	5	3
e_3	6	-3	4	8	13	9
e_4	4	-2	1	1	2	1

1.	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
x_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1
e_2	0	-1	-2	-4	-3
e_3	0	1^*	2	4	3
e_4	0	-1	-3	-4	-3

2.	x_2	x_4	x_5	$\mathbf{b}$
x_1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
e_2	0	0	0	0
x_3	0	2	4	3
e_4	0	-1^*	0	0

3.	x_2	x_5	$\mathbf{b}$
x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
e_2	0	0	0
x_3	0	4	3
x_4	0	0	0

Az egyenletrendszerek általános megoldása:

	Szabad változók	Kötött változók	ált. mo.
(a)	—	x_1, x_2, x_3	$x_1 = 3,\ x_2 = x_3 = 1$
(b)	—	x_1, x_2, x_3	$x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$
(c)	—	—	nincs megoldás
(d)	—	x_1, x_2, x_3	$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$
(e)	x_3	x_1, x_2, x_4	$x_1 = -x_3,\ x_2 = 0,\ x_4 = 1$
(f)	—	x_1, x_2, x_3	$x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 3$
(g)	x_2, x_4	x_1, x_3	$x_1 = 17 - 3x_2 + 3x_4,\ x_3 = 4 + x_4$
(h)	—	x_1, x_2, x_3, x_4	$x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -3/2,\ x_4 = 1/2$
(i)	x_2, x_5	x_1, x_3, x_4	$x_1 = -1/2 + 1/2x_2 + 1/2x_5,\ x_3 = 3 - 4x_5,\ x_4 = 0$

☞ 3.1. (f) & (h) (Gauss-elim.), (f) & (h) (EBT), ↩ 1.3.1

2.3.2. Megoldás. (a) Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 & 1 & 11 \\ 5 & -7 & 0 & 1 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 7 & -18 & 5 & -47 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 3 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az általános megoldás: $a = -47 - 7c + 18u - 5v$, $b = -35 - 5c + 13u - 3v$ $(c, u, v \in \mathbb{R})$.

Elemi bázistranszformációval:

0.	a	b	c	u	v
e_1	3	−4	1	−2	3
e_2	2	−3	−1	3	1
e_3	5	−7	0	1	4

1.	a	b	u	v	**b**
c	3	−4	−2	3	−1
e_2	5	−7	1	4	10
e_3	5	−7	1	4	10

2.	a	b	v	**b**
c	13	−18	11	19
u	5	−7	4	10
e_3	0	0	0	0

Az általános megoldás: $c = 19 - 13a + 18b - 11v$, $u = 10 - 5a + 7b - 4v$ $(a, b, v \in \mathbb{R})$.

(b) Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Az általános megoldás: $a = 4 - u - v - w$, $b = 3 - v - w$, $c = -2 + u + 2v + w$ $(u, v, w \in \mathbb{R})$.

Elemi bázistranszformációval:

0.	a	b	c	u	v	w	**b**
e_1	1^*	−1	0	1	0	0	1
e_2	1	0	1	0	−1	0	2
e_3	0	1	0	0	1	1	3

1.	b	c	u	v	w	**b**
a	−1	0	1	0	0	1
e_2	1^*	1	−1	−1	0	1
e_3	1	0	0	1	1	3

2.	c	u	v	w	**b**
a	1	0	−1	0	2
b	1	−1	−1	0	1
e_3	-1^*	1	2	1	2

3.	u	v	w	**b**
a	1	1	1	4
b	0	1	1	3
c	−1	−2	−1	−2

Az általános megoldás: $a = 4 - u - v - w$, $b = 3 - v - w$, $c = -2 + u + 2v + w$ $(u, v, w \in \mathbb{R})$.

☞ 3.2. (a), (b), ✍ 3.2. (a), (b), ↩ 1.3.2

2.3.3. Megoldás. Nem.

↩ 1.3.3

2.3.4. Megoldás. Az egyenletrendszer (egy) általános megoldása:

$$x_1 = \frac{3 + x_3}{5}, \quad x_2 = \frac{-6 + 3x_3 - 5x_4}{5} \qquad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}),$$

ha $x_3 = 2$ és $x_4 = 1$, akkor éppen a szóbanforgó konkrét megoldást kapjuk.

↩ 1.3.4

2.3.5. Megoldás. Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha $b \neq -4$ és $a = -7$. Ekkor $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ és $x_3 = 0$ az egyetlen megoldás.

↩ 1.3.5

2.3.6. Megoldás.

	A megoldások száma
(a)	$a \neq 0$ (egy mo.)
	$a = 0$ (nincs mo.)

	A megoldások száma
(b)	$a \neq 0, \pm 1$ (egy mo.)
	$a = 0$ (∞ sok mo.)
	$a = \pm 1$ (nincs mo.)

	A megoldások száma
(c)	$a \neq -3, \pm 1$ (egy mo.)
	$a = 1$ (∞ sok mo.)
	$a = -3, -1$ (nincs mo.)

	A megoldások száma
(d)	$a \neq \pm 3$ (egy mo.)
	$a = 3$ (nincs mo.)
	$a = -3$ (∞ sok mo.)

	A megoldások száma
(e)	$a \neq 1, 2$ (egy mo.)
	$a = 2$ (nincs mo.)
	$a = 1$ (∞ sok mo.)

☞ 3.6. (d), (e), ✍ 3.6. (d), (e), ↩ 1.3.6

Tesztes feladatok

2.3.7. Megoldás. (a) Igaz, (b) igaz, (c) hamis, (d) hamis, (e) igaz, (f) igaz, (g) hamis, (h) igaz, (i) igaz, (j) hamis, (k) hamis, (l) hamis.

↩ 1.3.7

2.3.8. Megoldás. (b)

↩ 1.3.8

2.3.9. Megoldás. (b)

↩ 1.3.9

2.3.10. Megoldás. (d)

↩ 1.3.10

2.3.11. Megoldás. (b)

↩ 1.3.11

2.3.12. Megoldás. (b)

↩ 1.3.12

2.3.13. Megoldás. (c)

↩ 1.3.13

2.3.14. Megoldás. (b)

↩ 1.3.14

2.3.15. Megoldás. (c)

↩ 1.3.15

2.3.16. Megoldás. (d)

↩ 1.3.16

2.3.17. Megoldás. (d)

↩ 1.3.17

2.3.18. Megoldás. (c)

↩ 1.3.18

2.4. Mátrixok inverze, mátrixegyenletek, Leontief modell

2.4.1. Megoldás. (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$,

(b) a $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixnak nincs inverzre,

(c) $\begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{4}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 12 & -5 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 11 & -7 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

☞ 4.1. (e), ✍ 4.1. (a), (b), (e), ↩ 1.4.1

2.4.2. Megoldás.
(a) Nincs megoldás,
(b) nincs megoldás,
(c) $\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{1,1} - 2x_{2,1} - 2 & x_{1,2} - 2x_{2,2} + 1 & x_{1,3} - 2x_{2,3} + 1 \\ -3x_{1,1} + 5x_{2,1} + 5 & 5x_{2,2} - 3x_{1,2} & -3x_{1,3} + 5x_{2,3} - 1 \end{pmatrix}$ $(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3} \in \mathbb{R})$,
(d) $\begin{pmatrix} x_{1,1} & (3x_{1,1} - 3)/5 & (-x_{1,1} - 4)/5 & 2 \\ x_{2,1} & 3x_{2,1}/5 & 1 - x_{2,1}/5 & 0 \\ x_{3,1} & 3x_{3,1}/5 & 1 - x_{3,1}/5 & -1 \end{pmatrix}$ $(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1} \in \mathbb{R})$,
(e) nincs megoldás,
(f) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ 4.2. (d), ✍ 4.2. (c), (d), (f), ↩ 1.4.2

2.4.3. Megoldás. A bruttó kibocsátás vektora: $(E_2 - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Mivel $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot (E_2 - A) = \begin{pmatrix} -0.6 & 1.6 \end{pmatrix}$, ezért a második ágazat nyereséges, az első pedig veszteséges. Ha az árvektort például (3 2)-nek választjuk, mindkét ágazat nyereséges lesz.

☞ 4.3., ↩ 1.4.3

2.4.4. Megoldás. (a) A bruttó kibocsátás vektora: $\begin{pmatrix} 10.25 \\ 16.25 \end{pmatrix}$. Mindkét ágazat nyereséges.

(b) A bruttó kibocsátás vektora: $\begin{pmatrix} 15 \\ 29 \end{pmatrix}$. Az első ágazat veszteséges, a második nyereséges. Például a (4 1)

árvektorral mindkét ágazat nyereséges.
(c) A gazdaság nem működőképes, így nincs értelme a bruttó kibocsátásnak. A profitvektor $\begin{pmatrix} -0.22 & 0.4 \end{pmatrix}$.
(d) A bruttó kibocsátás vektora: $\begin{pmatrix} 490 \\ 114 \end{pmatrix}$. Mindkét ágazat nyereséges.

☞ 4.4. (b) & (d), ✍ 4.4. (b) & (d), ↩ 1.4.4

Tesztes feladatok

2.4.5. Megoldás. (a) Hamis, (b) hamis, (c) igaz, (d) igaz, (e) hamis, (f) igaz, (g) igaz, (h) hamis, (i) hamis, (j) igaz, (k) igaz, (l) hamis, (ly) igaz, (m) igaz.

↩ 1.4.5

2.4.6. Megoldás. (d)

↩ 1.4.6

2.4.7. Megoldás. (c)

↩ 1.4.7

2.4.8. Megoldás. (a)

↩ 1.4.8

2.4.9. Megoldás. (d)

↩ 1.4.9

2.4.10. Megoldás. (c)

↩ 1.4.10

2.4.11. Megoldás. (c)

↩ 1.4.11

2.4.12. Megoldás. (d)

↩ 1.4.12

2.4.13. Megoldás. (b)

↩ 1.4.13

2.5. Vektortér, altér, generálás, lineáris függetlenség, bázis

2.5.1. Megoldás. (a) Altér, (b) nem altér, (c) nem altér, (d) nem altér, (e) altér, (f) altér, (g) nem altér.

☞ 5.1. (a), (b), ↩ 1.5.1

2.5.2. Megoldás. (a) Igen, $v = 1\cdot(1,-1,0)+1\cdot(0,0,1)$, (b) nem, (c) igen, $v = 1\cdot(1,1,0)+1\cdot(0,1,1)+0\cdot(1,0,1)$, (d) nem.

☞ 5.2. (c) & (d), ✍ 5.2. (c) & (d), ↩ 1.5.2

2.5.3. Megoldás.

	Linárisan független	Generátorrendszer	Bázis
(a)	igen	nem	nem
(b)	nem	nem	nem
(c)	nem	nem	nem
(d)	igen	nem	nem
(e)	igen	igen	igen

✍ 5.3. (c) & (e), ↩ 1.5.3

2.5.4. Megoldás.

	Rang	Linárisan független	Generátorrendszer	Bázis
(a)	3	nem	nem	nem
(b)	2	nem	nem	nem
(c)	3	igen	nem	nem
(d)	2	nem	nem	nem
(e)	4	nem	igen	nem
(f)	3	nem	nem	nem
(g)	3	nem	nem	nem
(h)	4	igen	igen	igen

☞ 5.4. (a), (g), ✍ 5.4. (c), (e) & (h), ↩ 1.5.4

2.5.5. Megoldás. (a) Ha $a = 7$, akkor lineárisan függő, egyébként lineárisan független, de nem generátorrendszer, így bázis sem lehet.
(b) A vektorrendszer minden a valós számra lineárisan függő, generátorrendszer, így nem bázis.
(c) A vektorrendszer minden a valós számra lineárisan független, de nem generátorrendszer, így bázis sem lehet.
(d) Ha $a \neq 0, 1$, akkor vektorrendszer bázis, azaz lineárisan független generátorrendszer. Ha $a \in \{0, 1\}$, akkor nem lineárisan független, nem generátorrendszer és nem bázis.
(e) A vektorrendszer minden a valós számra generátorrendszer, de nem lineárisan független.

☞ 5.5. (a), (d), ✍ 5.5. (a), ↩ 1.5.5

2.5.6. Megoldás. (a) $\dim(V) = 3$, bázis V-ben: $(1,0,0,2),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$,
(b) $\dim(V) = 2$, bázis V-ben: $(1,0,5/4,-1/2),(0,1,-3/4,1/2)$,
(c) $\dim(V) = 3$, bázis V-ben: $(1,0,1,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1)$,
(d) $\dim(V) = 2$, bázis V-ben: $(1,0,1,2),(0,1,-1,1)$,
(e) $\dim(V) = 4$, bázis V-ben: $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$,
(f) $\dim(V) = 3$, bázis V-ben: $(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,-1)$.

☞ 5.6. (d), ✍ 5.6. (a) & (e), ↩ 1.5.6

2.5.7. Megoldás. A v vektor koordinátasora:
(a) $(0,0,0)$; (b) $(0,-1,0)$; (c) $(-1/2,0,0)$; (d) $(3,-4,2)$; (e) $(3,2,1)$; (f) $(-2/3,-1/3,4/3)$.

☞ 5.7. (e), ✍ 5.7. (c) & (d), (e), ↩ 1.5.7

2.5.8. Megoldás. (a) a mátrix rangja 1, nem 0 értékű aldetermináns: $\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$
(b) a mátrix rangja 2, nem 0 értékű aldetermináns: $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
(c) a mátrix rangja 3, nem 0 értékű aldetermináns: $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

☞ 5.8. (a) & (b), ✍ 5.8. (a) & (b), ↩ 1.5.8

2.5.9. Megoldás. (a)

$$\text{Az }\begin{pmatrix}1 & a & -1 & 2\\ 2 & -1 & a & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}\text{ mátrix rangja} = \begin{cases}2, & \text{ha } a=3,\\ 3, & \text{különben.}\end{cases}$$

(b)

$$\text{Az }\begin{pmatrix}2a & -1 & 0 & a^2\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ a & 1 & 1 & a\end{pmatrix}\text{ mátrix rangja} = \begin{cases}2, & \text{ha } a=1,\\ 4, & \text{különben.}\end{cases}$$

✍ 5.9. (a), ↩ 1.5.9

Tesztes feladatok

2.5.10. Megoldás. (a) Hamis, (b) igaz, (c) igaz, (d) igaz, (e) igaz, (f) igaz, (g) hamis, (h) igaz, (i) hamis, (j) hamis, (k) igaz, (l) igaz, (ly) igaz, (m) igaz, (n) igaz, (o) hamis, (p) igaz, (q) igaz, (r) igaz, (s) igaz, (t) igaz.

↩ 1.5.10

2.5.11. Megoldás. (d)

↩ 1.5.11

2.5.12. Megoldás. (c)

↩ 1.5.12

2.5.13. Megoldás. (b)

↩ 1.5.13

2.5.14. Megoldás. (c)

↩ 1.5.14

2.5.15. Megoldás. (d)

↩ 1.5.15

2.5.16. Megoldás. (c)

↩ 1.5.16

2.5.17. Megoldás. (a)

↩ 1.5.17

2.5.18. Megoldás. (b)

↩ 1.5.18

2.5.19. Megoldás. (a)

↩ 1.5.19

2.5.20. Megoldás. (c)

↩ 1.5.20

2.5.21. Megoldás. (b)

↩ 1.5.21

2.5.22. Megoldás. (c)

↩ 1.5.22

2.6. Sajátérték, sajátvektor, kvadratikus alakok

2.6.1. Megoldás. (a) $(1, 1/3, 2/3)$;
(b) $(1, -2, 1, 3)$;
(c) $(1, 0, -1, -1), (0, 1, -2, 0)$;
(d) $(1, 0, 0, 3/5, 1/5), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 7/5, -1/5)$.

☞ 6.1. (a) & (c), ✍ 6.1. (a) & (c), ↩ 1.6.1

2.6.2. Megoldás. (a) nincs valós sajátérték;
(b) 0 és 3;
(c) 2 (kétszeres);
(d) 3, $(1 \pm \sqrt{5})/2$;
(e) -2 és 2 (kétszeres);
(f) -1, 2 és 3.

☞ 6.2. (a) & (b), (d), ✍ 6.2. (a) & (b), (d) & (e), ↩ 1.6.2

2.6.3. Megoldás. (a) $(0, 1, -2)$,
(b) $(1, 0, 0), (0, 1, 1)$;
(c) $(0, -1, 1), (1, -2, 0)$;
(d) $(-1, -1, 1)$.

☞ 6.3. (b) & (d), ✍ 6.3. (b) & (d), ↩ 1.6.3

2.6.4. Megoldás. (a) Igen, (b) nem, (c) igen, (d) nem.

☞ 6.4. (a) & (d), ✍ 6.4. (a) & (d), ↩ 1.6.4

2.6.5. Megoldás.

	Kanonikus alak	Osztály
(a)	y_1^2	pozitív szemidefinit
(b)	$-y_1^2 - y_2^2$	negatív definit
(c)	$y_1^2 + y_2^2$	pozitív szemidefinit
(d)	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$	pozitív definit
(e)	$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$	indefinit
(f)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$	indefinit

☞ 6.5. (a), (d), ✍ 6.5. (c) & (f), ↩ 1.6.5

Tesztes feladatok

2.6.6. Megoldás. (a) Igaz, (b) hamis, (c) igaz, (d) hamis, (e) igaz, (f) hamis, (g) igaz, (h) hamis, (i) igaz, (j) hamis, (k) hamis, (l) hamis, (ly) hamis.

↩ 1.6.6

2.6.7. Megoldás. (c)

↩ 1.6.7

2.6.8. Megoldás. (d)

↩ 1.6.8

2.6.9. Megoldás. (d)

↩ 1.6.9

2.6.10. Megoldás. (a)

↩ 1.6.10

2.6.11. Megoldás. (c)

↩ 1.6.11

2.6.12. Megoldás. (d)

↩ 1.6.12

2.6.13. Megoldás. (b)

↩ 1.6.13

2.6.14. Megoldás. (c)

↩ 1.6.14

2.6.15. Megoldás. (d)

↩ 1.6.15

2.6.16. Megoldás. (c)

↩ 1.6.16

2.6.17. Megoldás. (a)

↩ 1.6.17

2.6.18. Megoldás. (b)

↩ 1.6.18

3. A megoldásokhoz készített videók jegyzéke

Vektorok koordinátasora

Mátrixok rangja

Sajátértékek, sajátvektorok

Kvadratikus alakok