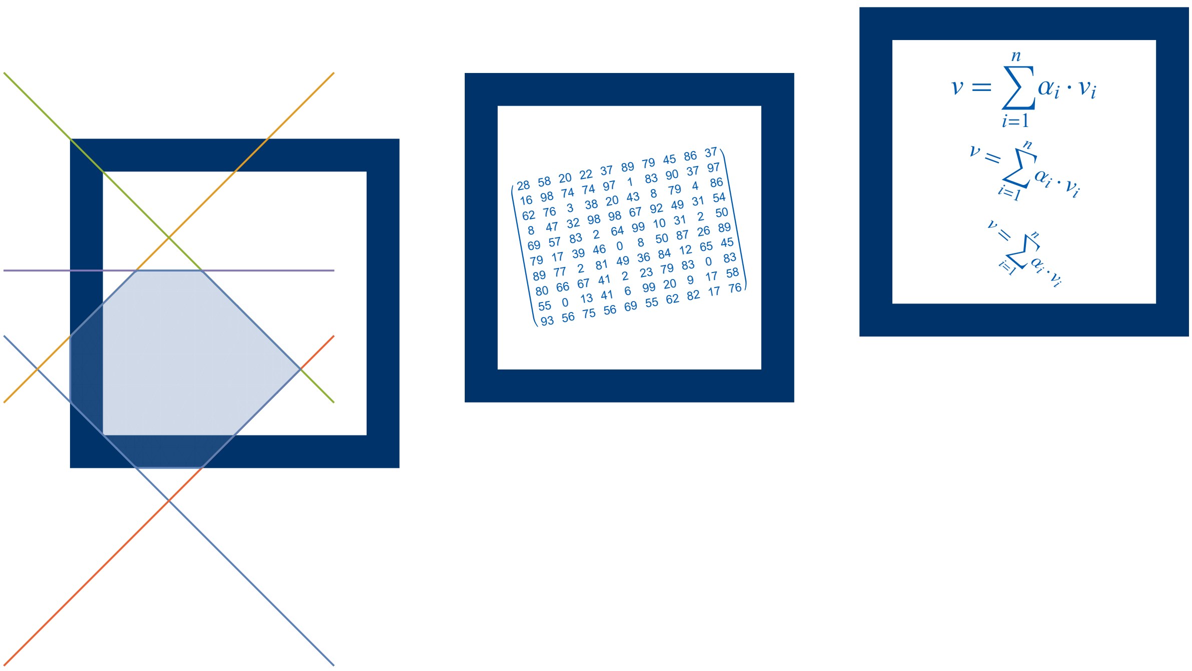
Előadásvázlat

a

Lineáris Algebra
(Közgazdászoknak)

kurzus előadáshoz

Dormán Miklós & **Kátai-Urbán Kamilla**



2024

Tartalomjegyzék

1. Mátrixok

1.1. Mik is azok a mátrixok?

Videó: Mátrixok?

1.1. Definíció (mátrix)**.** **Mátrixon**, pontosabban $(m \times n)$-es valós mátrixon $(m, n \in \mathbb{N})$ egy

- **kerek** zárójelek között elhelyezkedő „táblázatot” értünk,
- melynek m sora és n oszlopa van,
- elemei pedig $\mathbb{R}$ elemei, azaz **valós** számok.

Az összes $(m \times n)$-es valós mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{m\times n}$ jelöli.

A mátrixokat általában nagybetűkkel jelöljük $(A, B, C, \ldots)$. Az M mátrix i-edik sorának j-edik elemére használhatjuk az a_{ij} jelölést, de ugyanezt az elemet A_{ij}-vel is szokás jelölni.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & a_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Az elemeket az oszlopokban fentről lefelé, míg a sorokban balról jobbra számozzuk.

1.2. Példa. Az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1/2 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

mátrix egy (4×3)-as valós mátrix, pl. a második sorának harmadik eleme $a_{23} = \sqrt{2}$.

1.2. Mátrixok szorzása skalárral

Videó: Műveletek mátrixokkal

1.3. Megjegyzés. A továbbiakban **skaláron** mindig valós számot értünk.

1.4. Definíció (mátrix szorzása skalárral)**.** Az A mátrixot úgy szorozzuk a λ skalárral, hogy A minden elemét megszorozzuk λ-val:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

1.5. Példa.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1) & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & \sqrt{2} & e^2 \\ 3 & -2 & \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3. Mátrix transzponáltja

1.6. Definíció (mátrix transzponáltja)**.** **Mátrix transzponáltja** mindig létezik, $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

1.7. Példa. A mátrix transzponáltja:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4. Mátrixok összeadása

1.8. Definíció (mátrixok összege)**.** Ha az A és B mátrixok $(n \times m)$-es mátrixok, akkor összeadhatók. Az összegük is $(n \times m)$-es mátrix lesz. Csak azonos méretű mátrixok adhatók össze.

Az $A + B$ összegmátrix i-edik sorának j-edik eleme A i-edik sora j-edik elemének és B i-edik sora j-edik elemének az összege:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

azaz a mátrixokat elemenként adunk össze.

1.9. Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

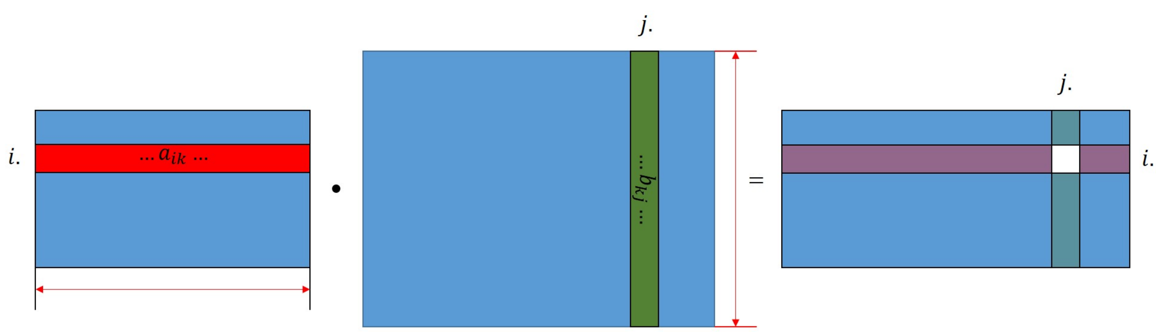
ahol

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 + 2, & c_{12} &= (-2) + (-1), \\ c_{21} &= 3 + 0, & c_{22} &= 4 + 1, \\ c_{31} &= 2 + 2, & c_{32} &= 1 + 4. \end{aligned}$$

1.5. Mátrixszorzás

1.10. Definíció (mátrixok szorzása — egzisztencia)**.** Ha A $(n \times m)$-es, B pedig $(m \times k)$-s mátrix, akkor létezik a szorzatuk, $A \cdot B$, amely $(n \times k)$-s mátrix. Más esetben a szorzat nem létezik.

1.11. Definíció (mátrixok szorzása — a szorzata elemei)**.** Ha létezik az $A \cdot B$ szorzatmátrix, akkor az i-edik sorának j-edik elemét a következőképpen kapjuk: összeszorozzuk A i-edik sorának elemeit B j-edik oszlopának megfelelő elemeivel majd az így kapott számokat összeadjuk. („Az A-beli sor és B-beli oszlop skalárszorzata.")



1.12. Példa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-2) = -4,\\ c_{12} &= 0\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 = 5,\\ c_{21} &= (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-2) = -7,\\ c_{22} &= (-1)\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 = 5. \end{aligned}$$

1.13. Példa. Ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, akkor AB és BA is létezik. Az AB mátrix 2-dik sorának 3-adik eleme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ \color{red}1 & \color{red}3 & \color{red}9 & \color{red}27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \color{blue}1 \\ 1 & -1 & \color{blue}1 \\ 1 & -2 & \color{blue}4 \\ 1 & -3 & \color{blue}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -33 & 94 \\ 40 & -101 & \boxed{286} \\ 156 & -429 & 1234 \end{pmatrix}$$

$$\color{red}1\color{black}\cdot\color{blue}1\color{black} + \color{red}3\color{black}\cdot\color{blue}1\color{black} + \color{red}9\color{black}\cdot\color{blue}4\color{black} + \color{red}27\color{black}\cdot\color{blue}9\color{black} = 286.$$

1.14. Definíció (mátrixszorzás)**.** Legyen A $(n\times m)$-es, B pedig $(m\times k)$-s mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}a_{i1} & \color{red}a_{i2} & \color{red}\dots & \color{red}a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \color{green}b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & \color{green}b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \color{green}\vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & \color{green}b_{mj} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $A\cdot B$ mátrix $(n\times k)$-s, i-edik sorának j-edik eleme:

$$(A\cdot B)_{ij} = \color{red}a_{i,1}\color{green}b_{1,j}\color{black} + \color{red}a_{i,2}\color{green}b_{2,j}\color{black} + \dots + \color{red}a_{i,m}\color{green}b_{m,j}\color{black} = \sum_{t=1}^{m} \color{red}a_{it}\color{black}\cdot\color{green}b_{tj}\color{black}.$$

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV.

1.15. Példa. (a) Az $A\cdot B$ szorzat létezik, de a $B\cdot A$ szorzat nem létezik:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ nem létezik.}$$

(b) Az $A\cdot B$ és $B\cdot A$ szorzat is létezik, de különböző méretűek:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Az $A\cdot B$ és $B\cdot A$ is létezik, egyforma méretűek, de mégsem egyenlők:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.16. Definíció (munkanélküliségi ráta)**.** A **munkanélküliségi ráta** munkanélküliek számának és a munkaerőállománynak a hányadosa, százalékos formában kifejezve.

1.17. Példa. Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet a következő mátrix írja le (1 éves időtávon):

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

A mátrix alapján egy év alatt a dolgozók 80%-a dolgozó marad, 20%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 60%-a talál munkát és 40%-a marad munkanélküli. Jelenleg 4 000 000 dolgozó és 1 000 000 munkanélküli van. Meghatározzuk mekkora lesz a munkanélküliségi ráta 1 év múlva.

A dolgozók és a munkanélküliek száma jelenleg millió főben számolva: $x_0 = 4$ és $y_0 = 1$. Egy év múlva a dolgozók létszáma: $x_1 = 0,8x_0 + 0,6y_0$, a munkanélküliek létszáma pedig $y_1 = 0,2x_0 + 0,4y_0$, azaz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.8 \\ 1.2 \end{pmatrix}.$$

A munkanélküliségi ráta: $\frac{y_1}{x_1+y_1} = \frac{1\,200\,000}{5\,000\,000} = 24\%$

1.18. Jelölés. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, ekkor $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ db}}$.

1.19. Megjegyzés. A 1.17. Példában szereplő A mátrix hatványa segítségével meghatározható a munkanélküliségi ráta 2 év múlva.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

A munkanélküliségi ráta 2 év múlva: $\frac{y_2}{x_2+y_2}$.

1.6. Műveleti tulajdonságok

1.20. Tétel. Legyenek A, B és C valós mátrixok. Valahányszor az alábbi egyenlőség egyik oldala értelmezett, mindannyiszor a másik oldal is, és ekkor a kapott két mátrix megegyezik.

- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + B = B + A$,
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ és $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$,
- $(A^T)^T = A$,
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

1.7. Speciális mátrixok

Videó: Speciális mátrixok

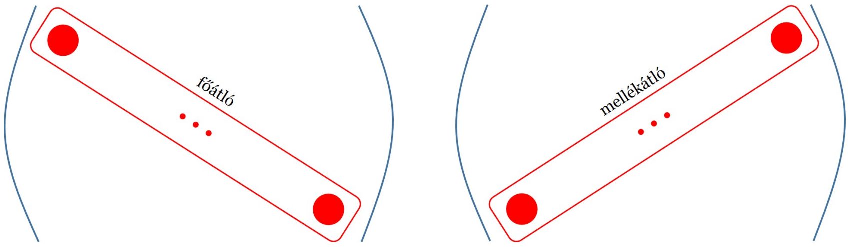
1.7.1. Szimmetrikus mátrixok

1.21. Definíció (szimmetrikus mátrix)**.** Az A mátrix **szimmetrikus**, ha megegyezik a transzponáltjával, azaz $A^T = A$.

1.22. Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.23. Megjegyzés. Természetesen minden szimmetrikus mátrix **négyzetes**, azaz $(n \times n)$-es valamely n természetes számra. Az $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrix **főátlóját** az a_{kk} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ elemek, **mellékátlóját** pedig az $a_{k(n-k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ elemek alkotják.



1. ábra. Négyzetes mátrix fő- és mellékátlója

1.7.2. Trianguláris mátrixok

1.24. Definíció (trianguláris mátrix)**.** Egy $(n \times n)$-es mátrixot **triangulárisnak** nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

1.25. Példa. Trianguláris mátrix kétféle lehet:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix} \text{ (felső trianguláris mátrix)}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{5} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \text{ (alsó trianguláris mátrix)}.$$

1.7.3. Diagonális mátrixok

1.26. Definíció (diagonális mátrix)**.** Az $(n \times n)$-es A mátrixot **diagonálisnak** nevezünk, ha a főátlóján kívüli elemek mind 0-ák (a főátlójában tetszőleges elemek lehetnek).

1.27. Példa. Az alábbi mátrix diagonális:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

1.7.4. Egységmátrix(ok)

1.28. Definíció (egységmátrix)**.** Az $(n \times n)$-es **egységmátrix** az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1. Jele: E_n.

1.29. Példa. Az (1×1)-es, (2×2)-es és (3×3)-as egységmátrixok:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.30. Megjegyzés. Az egységmátrix a mátrixszorzásra nézve úgy viselkedik, mint az 1 valós szám a valós számok szorzására nézve. Bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

1.7.5. Zérómátrix(ok)

1.31. Definíció (zérómátrix)**.** Az $(n \times n)$-es **zérómátrix** az a mátrix, amelynek minden eleme 0. Jele: Z_n vagy 0_n.

1.32. Példa. Az (1×1)-es, (2×2)-es és (3×3)-as zérómátrixok:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.33. Megjegyzés. A zérómátrix a szorzásra nézve úgy viselkedik, mint a 0 valós szám a valós számok szorzására nézve. Bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$Z_n \cdot A = A \cdot Z_n = Z_n.$$

2. Determinánsok

Videó: Motiváció

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert, ahol a, b, c, d, e, f valós paraméterek. Határozzuk meg az x_2 ismeretlen értékét.

$$\begin{cases} ax_1 & + & bx_2 & = & e, \\ cx_1 & + & dx_2 & = & f. \end{cases}$$

Ha az első egyenletet megszorozzuk c-vel, a másodikat pedig a-val, a következő egyenletrendszert kapjuk:

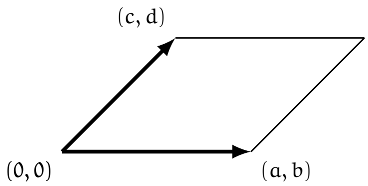
$$\begin{cases} acx_1 & + & bcx_2 & = & ec, \\ acx_1 & + & adx_2 & = & af. \end{cases}$$

A második egyenletből az elsőt kivonva kapjuk:

$$(ad - bc)x_2 = af - ce,$$

azaz, ha $ad - bc \neq 0$, akkor $x_2 = \frac{af-ce}{ad-bc}$ (és $x_1 = \frac{ed-bf}{ad-bc}$). Észrevehető, hogy a fenti megoldás nevezője csak az egyenletrendszer bal oldalán szereplő együtthatóktól függ, vagyis csak az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixtól.

Tekintsük a síkon az (a, b) és (c, d) koordinátájú helyvektorokat. Ez a két vektor egy paralelogrammát feszít ki. Koordinátageometria segítségével belátható, hogy ennek a paralelogrammának a területe éppen $|ad - bc|$.



2.1. Megjegyzés. Ugyanaz az érték szerepel a paralellogramma területének kiszámításakor, mint a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásakor. Mivel ez az érték a matematika sok más területén is előfordul, és nagyon fontos szerepet játszik, ezért külön neve is van: *determináns*.

2.2. Definíció ((2 × 2)-es mátrix determinánsa)**.** Az

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

valós mátrix determinánsa az $ad - bc$ valós szám.

2.1. A determináns definíciója

Videó: A determináns definíciója

2.3. Definíció (determináns (1. rész))**.** Csak négyzetes mátrixoknak van determinánsa. Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix determinánsa valós szám. Ennek a számnak a jele: $\det(A)$ vagy $|A|$ vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Az n természetes számot a $\det(A)$ **determináns rendjének** nevezzük. Ha $A = (a)$ (1×1)-es mátrix, akkor A determinánsa: $|A| = a$.

Nagyobb mátrixokra a determináns definíciója rekurzív: egy $(n \times n)$-es mátrix determinánsához n darab $((n-1) \times (n-1))$-es mátrix determinánsát kell kiszámolni.

2.4. Definíció (aldetermináns)**.** Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. Az $|A|$ determináns i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó **aldetermináns** úgy keletkezik, hogy a determinánsból elhagyjuk annak i-edik sorát és j-edik oszlopát. A kapott determináns jele: M_{ij}.

2.5. Példa. Az A mátrix determinánsa második sorának harmadik eleméhez tartozó M_{23} aldetermináns:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Általában, az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix determinánsa és i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó M_{ij} aldeterminánsa:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i(j-1)} & \boxed{a_{ij}} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(A a_{ij} elem sorában és oszlopában lévő (a pirossal jelölt) elemek törlésével adódik M_{ij}.)

2.6. Definíció (adjungált aldetermináns)**.** Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges mátrix. Az

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

determináns i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó **adjungált aldetermináns** úgy keletkezik, hogy az M_{ij} aldeterminánst ellátjuk a $(-1)^{i+j}$ előjellel: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

2.7. Példa.

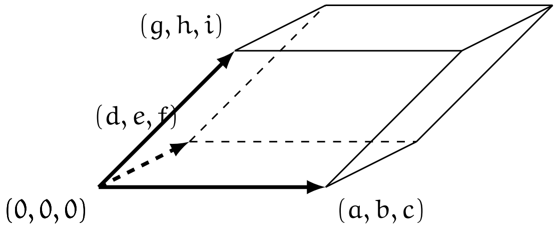
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.8. Definíció (determináns (2. rész): első sor szerinti kifejtés)**.** Legyen $n \geqslant 2$ természetes szám. Ekkor az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns első sora szerinti kifejtése:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot \underbrace{(-1)^{1+j} \cdot M_{1j}}_{A_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}.$$



2.9. Megjegyzés. (a) A paralelogramma területét a síkon (2×2)-es mátrix determinánsának abszolútértékeként kaptuk meg.

(b) A térben az (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) vektorok és az origó által meghatározott test (paralelepipedon) térfogatát 3-ad rendű determináns abszolútértéke adja meg. A determinánst úgy kapjuk, hogy soraiban az origóból kiinduló élek végponjainak koordinátái szerepelnek. A determináns rekurzív definícióját felhasználva kifejtjük az első sora szerint:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

A paralelepipedon térfogata: $V = |aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg|$.

2.10. Megjegyzés. A determináns rekurzív definíciója alapján az $(n \times n)$-es determináns $n!$ sok szorzat összegeként számítható ki.

Vegyük észre ugyanakkor, hogy ha a determináns első sorában sok a 0, akkor az összegzés jóval egyszerűbb lesz.

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-2)\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 = -16.$$

Ezt az észrevételt felhasználva már egy sokkal gyorsabb módszer adódik determinánsok kiszámítására.

2.2. Determinánselméleti tételek

Videó: A determináns tulajdonságai

2.11. Tétel (A kifejtési tétel)**.** Determináns bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejthető. A determináns i-edik sora szerint kifejtése:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}.$$

A determináns j-edik oszlop szerinti kifejtése:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}.$$

2.12. Megjegyzés. A két formula „csak” az összegzés indexében különbözik egymástól.

2.13. Tétel (A determinánsképzés és a transzponálás kapcsolata)**.** Legyen A négyzetes mátrix. Ekkor

$$|A| = |A^T|.$$

Azaz négyzetes mátrixnak és transzponáltjának a determinánsa megegyezik.

2.14. Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.15. Tétel (Dualitási elv)**.** Ha egy a determinánsokra vonatkozó igaz állításban az „oszlop” és „sor” szavakat következetesen felcseréljük, akkor szintén igaz állítást kapunk.

2.16. Tétel (determináns szorzása számmal)**.** Ha egy determináns valamely sorának minden elemét megszorozzuk a c valós számmal, akkor a determináns értéke c-szeresére változik.

2.17. Példa.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 43\cdot 1 & 43\cdot 2 & 43\cdot 82/43 \end{vmatrix} = 43\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 82/43 \end{vmatrix} = 2021.$$

2.18. Tétel (trianguláris mátrix deteminánsa)**.** Ha egy determináns főátlója felett (alatt) minden elem nulla, azaz egy *trianguláris mátrix* determinánsa, akkor a determináns értéke a főátlójában lévő elemek szorzata.

2.19. Példa.
$$\begin{vmatrix} 43 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 47 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 43\cdot 47\cdot 2\cdot 1/2 = 2021.$$

2.20. Tétel (sorcsere determinánsban)**.** Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke (-1)-szeresére változik.

2.21. Példa.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 120$$

2.22. Tétel (determináns $= 0$ — elegendő feltétel)**.** A determináns értéke nulla, ha

- valamely sorának [oszlopának] minden eleme nulla,
- valamely két sora [oszlopa] azonos,
- valamely két sora [oszlopa] arányos.

2.23. Példa.
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -9 & -3 & -12 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

2.3. Determináns hatékony számítása

2.24. Tétel (determináns sorainak kombinálása)**.** Determináns értéke nem változik, ha valamely sorához egy másik sor c-szeresét hozzáadjuk ($c \in \mathbb{R}$).

2.25. Példa. Ha a lenti determináns 2. sorához hozzáadjuk a 3. sor 2-szeresét, az értéke változatlan marad:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.26. Megjegyzés. Az előző tételt felhasználva bármely determináns bármely sora, vagy oszlopa „kinullázható” vagyis elérhető, hogy benne legfeljebb egy 0-tól különböző elem maradjon.

2.27. Példa. Nullázzuk ki a determináns 3. oszlopát ezen oszlop 3. eleme, azaz 1 segítségével, majd fejtsük ki a determinánst:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix}.$$

Először vonjuk ki a 2. sorból a 3. sor 3-szorosát:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

majd az 1. sorból vonjuk ki a 3. sor 2-szeresét:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezután a determinánst kifejthetjük az utolsó oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1.$$

2.4. Determinánsok szorzástétele

2.28. Tétel (determinánsok szorzástétele)**.** Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor:

$$|AB| = |A| \cdot |B|,$$

azaz azonos méretű négyzetes mátrixok szorzatának determinánsa a determinánsok szorzata.

2.5. Kifejtési tétel és a ferde kifejtés tétele

2.29. Tétel (determináns kifejtése)**.** Determináns bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejthető. A determináns i-edik sora szerint kifejtése:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

A determináns j-edik oszlop szerinti kifejtése:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

2.30. Tétel (A ferde kifejtés tétele)**.** Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ha $i \neq j$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0,$$

azaz, ha determináns egy sorának az elemeit egy **másik** sorához tartozó adjungáltakkal szorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk, akkor 0-t kapunk.

2.31. Példa. Alkalmazzunk ferde kifejtést az $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ determinánsra az 1. és 3. sorok szerint (az első sor elemeit a rendre a harmadik sor elemeihez tartozó adjungált aldeterminánsokkal szorozzuk):

$$1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 3 = 0.$$

3. Lineáris egyenletrendszerek

3.1. A lineáris egyenletrendszer (A LER)

Videó: Motiváció

3.1. Definíció (LER)**.** LER-nek nevezzük az alábbi objektumot:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m} \cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm} \cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

ahol

$x_1, x_2, \dots, x_m$ az ismeretlenek,
az a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ valós számok az együtthatók,
a $b_1, \dots, b_n$ valós számok a konstansok.

3.2. Definíció (LER konkrét megoldása)**.** Az előbbi LER konkrét megoldásán egy olyan $(s_1, s_2, \dots, s_m)$ valós szám-m-est értünk, amelyet behelyettesítve az egyenletrendszerbe, minden egyenlőség teljesül:

$$\begin{cases} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \cdots & + & a_{1m}s_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}s_1 & + & a_{n2}s_2 & + & \cdots & + & a_{nm}s_m & = & b_n. \end{cases}$$

3.2. Lineáris egyenletrendszer és mátrixai

3.3. Definíció (LER (együttható)mátrixa)**.** Az

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m} \cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm} \cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

LER (együttható)mátrixa az alábbi $(n \times m)$-es valós mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

amely a LER együtthatóit tartalmazza.

3.4. Definíció (LER mátrixos alakja)**.** Legyen LER-ünk mátrixa $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Jelölje $\mathbf{b}$ a konstansokból alkotott $\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}$ mátrixot, valamint $\mathbf{x}$ az ismeretlenekből alkotott $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ mátrixot. Ekkor LER-ünk az alábbi (tömör) formában írható fel:

$$A \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T,$$

amelyet a **LER mátrixos alakjának** nevezünk.

3.5. Példa. Az

$$\begin{cases} -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 7x_3 & = & 8 \end{cases}$$

LER mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix},$$

azaz

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ahol $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ (a LER mátrixa), $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3.6. Definíció (LER kiegészített mátrixa)**.** Az

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m} \cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm} \cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

LER **kiegészített mátrixa** (vagy **bővített mátrixa**) az alábbi $(n \times (m+1))$-es valós mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right),$$

amely a LER együtthatóit és a konstansokat tartalmazza.

3.3. Cramer-szabály

Videó: A Cramer-szabály

3.7. Definíció (Szabályos LER)**.** Azt mondjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer **szabályos**, ha a benne szereplő egyenletek és ismeretlen száma megegyezik, azaz mátrixa négyzetes, továbbá mátrixának determinánsa nem 0.

3.8. Tétel (Cramer-szabály)**.** Ha az

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m} \cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm} \cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

egyenletrendszer szabályos, akkor pontosan egy megoldása van, amely a következő:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

3.9. Megjegyzés. Tehát a fenti tétel (Cramer-szabály) azt mondja ki, hogy pontosan egy megoldás létezik, azaz az $x_1, \dots, x_n$ ismeretleneknek csak egyféleképpen lehet úgy értéket adni, hogy az egyenletrendszer egyenletei teljesüljenek.

Sőt, a tétel meg is határozza, hogy mik ezek az értékek: x_i értékét egy tört adja meg, amelynek nevezője az egyenletrendszer mátrixának determinánsa (amely nem 0, mert az egyenletrendszer szabályos!), a számlálóban pedig az i-edik oszlopot kicseréljük a konstansok oszlopával.

3.10. Példa. Oldjuk meg a

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2, \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & = & -1. \end{array} \end{cases}$$

egyenletredszert a Cramer-szabály alkalmazásával, ha lehetséges.

A Cramer-szabály **nem** alkalmazható, mert az egyenletrendszer mátrixa nem négyzetes mátrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.11. Példa. Oldjuk meg a

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1, \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1. \end{array} \end{cases}$$

egyenletredszert a Cramer-szabály alkalmazásával, ha lehetséges.

A Cramer-szabály **nem** alkalmazható, mert az egyenletrendszer mátrixa ugyan négyzetes, de determinánsa 0.

3.12. Példa. Oldjuk meg a

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & = & 1, \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & -1. \end{array} \end{cases}$$

egyenletredszert a Cramer-szabály alkalmazásával, ha lehetséges.

Az egyenletrendszer mátrixa négyzetes, determinánsa: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$. Az egyenletrendszer szabályos, így alkalmazható a Cramer-szabály. A lineáris egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-10}{13}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{7}{13}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{1}{13}.$$

3.13. Megjegyzés. (a) A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az egyenletrendszer nem ugyanannyi egyenletet és ismeretlent tartalmaz.

(b) A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az előző feltétel teljesül, azonban az együtthatómátrix determinánsa 0.

3.4. Általános LER-ek

Videó: Mátrixok lépcsős alakja és a LER-ek

3.14. Példa. Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & & & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 3. \end{array} \end{cases}$$

Az egyenletrendszer egy konkrét megoldása: $(11, -6, 0, 4)$. Az egyenletrendszer (egy) általános megoldása:

$$x_1 = 11 - 3x_3, \quad x_2 = -6 + 4x_3, \quad x_4 = 4 \quad (x_3 \in \mathbb{R}).$$

Az x_1, x_2 és x_4 ismeretlenek a **kötött ismeretlenek**. Az x_3 ismeretlen pedig **szabad ismeretlen**. A fent említett konkrét megoldást pedig úgy kapjuk meg, hogy a szabad ismeretlennek az $x_3 = 0$ értéket választjuk.

3.15. Megjegyzés. Fontos látni a fő különbséget az egyenletrendszer és az általános megoldás között: a megoldásban szereplő szabad ismeretlenek értéke szabadon választható, és alkalmas választással valamennyi konkrét megoldás megkapható.

3.16. Tétel (LER általános megoldása)**.** Ha egy LER-nek van megoldása, akkor az általános megoldása mindig megadható olyan alakban, hogy meghatározzuk a **kötött** és **szabad** ismeretleneket.

A szabad ismeretlenek értékei egymástól függetlenül és szabadon választhatók, ha nekik értéket adtunk, akkor a kötött ismeretlenek értéke már egyértelműen meghatározott.

3.17. Megjegyzés. A megoldás része az is, hogy kifejezzük a kötött ismeretleneket a szabad ismeretlenek segítségével. Fontos, hogy a szabad, illetve kötött ismeretlenek nem egyértelműek: az általános megoldást általában többféleképpen is meg lehet adni.

3.18. Példa. Az

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & & & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

lineáris egyenletrendszernek az alábbiak mindegyike általános megoldása:

$$(1) \quad x_1 = 11 - 3x_3, \quad x_2 = -6 + 4x_3, \quad x_4 = 4, \qquad (x_3 \in \mathbb{R})$$

$$(2) \quad x_1 = \tfrac{13}{2} - \tfrac{3}{4}x_2, \quad x_3 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4}x_2, \quad x_4 = 4, \qquad (x_2 \in \mathbb{R})$$

$$(3) \quad x_2 = \tfrac{26}{3} - \tfrac{4}{3}x_1, \quad x_3 = \tfrac{11}{3} - \tfrac{1}{3}x_1, \quad x_4 = 4, \qquad (x_1 \in \mathbb{R}).$$

3.5. A Gauss-elimináció

Videó: LER: Gauss-elimináció

3.19. Definíció (LER elemi átalakításai)**.** LER **elemi átalakításai** a következők:

- két egyenlet felcserélése,
- egy egyenlethez másik egyenlet tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- egyenlet szorzása 0-tól különböző valós számmal.

3.20. Példa. A LER sorain végzett elemi átalakítások segítségével oldjuk meg a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & - & 9x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

lineáris egyenletrendszert.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & - & 9x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right. \overset{[1]\leftrightarrow[2]}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & - & 9x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\overset{[2]+(-5)\cdot[1]}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & - & 10x_2 & + & 28x_3 & - & 19x_4 & = & -12 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\overset{[3]+(-2)\cdot[1]}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & - & 10x_2 & + & 28x_3 & - & 19x_4 & = & -12 \\ & - & 3x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \end{array}\right.$$

$$\overset{(-\frac{1}{10})\cdot[2]}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & \frac{28}{10}x_3 & + & \frac{19}{10}x_4 & = & \frac{12}{10} \\ & - & 3x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \end{array}\right.$$

$$\overset{[3]+3\cdot[2]}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & \frac{14}{5}x_3 & + & \frac{19}{10}x_4 & = & \frac{6}{5} \\ & & & & \frac{3}{5}x_3 & + & \frac{77}{10}x_4 & = & -\frac{7}{5} \end{array}\right.$$

$$\overset{\frac{5}{3}\cdot[3]}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & \frac{14}{5}x_3 & + & \frac{19}{10}x_4 & = & \frac{6}{5} \\ & & & & x_3 & + & \frac{77}{6}x_4 & = & -\frac{7}{3} \end{array}\right.$$

Az utolsóként kapott LER-ből az adódik, hogy

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{7}{3} - \frac{77}{6}x_4, \\ x_2 &= \frac{6}{5} + \frac{14}{5}x_3 - \frac{19}{10}x_4 = -\frac{16}{3} - \frac{227}{6}x_4, \\ x_1 &= 3 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2 + \frac{19}{2}x_4, \end{aligned}$$

ahol x_4 tetszőleges valós szám (az x_4 ismeretlen szabad, x_1, x_2, x_3 pedig kötött ismeretlen).

A kísérlet eredménye az, hogy

- az elemi átalakítások nem változtatják meg az egyenletrendszer konkrét megoldásait,
- az elemi átalakítások segítségével megkapható a lineáris egyenletrendszerek általános megoldása,
- sokat írtunk feleslegesen.

3.21. Definíció (Mátrixok elemi átalakításai)**.** Mátrixok **elemi átalakításai** a következők:

- két sor felcserélése,
- egy sorhoz másik sor tetszőleges számszorosának hozzáadása,
- sor szorzása 0-tól különböző valós számmal.

3.22. Jelölés. Ha a B mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az A mátrixból, akkor az $A \sim B$ jelölést használjuk.

3.23. Példa. A 3.20. Példabeli LER megoldása a kiegészített mátrixán végzett elemi átalakításokkal. A

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & - & 9x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

LER kiegészített mátrixa és a sorain végzett átalakítások:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -9 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{[1]\leftrightarrow[3]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right) \overset{[2]+(-5)\cdot[1]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 28 & -19 & -12 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[3]+(-2)\cdot[1]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 28 & -19 & -12 \\ 0 & -3 & 9 & 2 & -5 \end{array}\right) \overset{(-\frac{1}{10})\cdot[2]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -14/5 & 19/10 & 6/5 \\ 0 & -3 & 9 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\overset{[3]+3\cdot[2]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -14/5 & 19/10 & 6/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & 77/10 & -7/5 \end{array}\right) \overset{\frac{5}{3}\cdot[3]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -14/5 & 19/10 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 77/6 & -7/3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\dots}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -19/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 227/6 & -16/3 \\ 0 & 0 & 1 & 77/6 & -7/3 \end{array}\right).$$

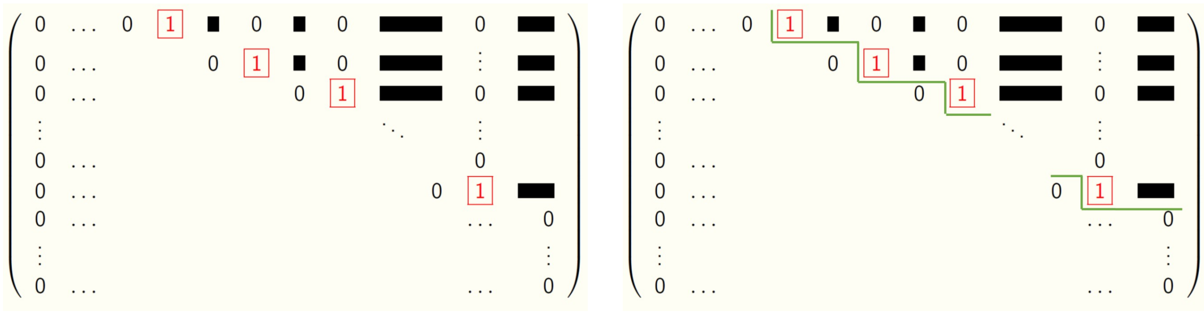
Az utolsóként kapott mátrixból már leolvasható a LER egy általános megoldása:

$$x_1 = 2 + \frac{19}{2}x_4, \quad x_2 = -\frac{16}{3} - \frac{227}{6}x_4, \quad x_3 = -\frac{7}{3} - \frac{77}{6}x_4 \qquad (x_4 \in \mathbb{R}).$$

3.24. Definíció (Lépcsős alakú mátrixok)**.** Legyen A tetszőleges valós mátrix. Ha az A mátrix a zérusmátrix, akkor lépcsős alakú. Tegyük fel, hogy A nem a zérusmátrix. Ekkor A **lépcsős alakú**, ha

- a mátrix azon sorai, amelyek csak 0-kat tartalmaznak, azon sorok alatt helyezkednek el, amelyek tartalmaznak 0-tól különböző elemet,
- ha a mátrix i_1-edik és i_2-edik sora tartalmaz 0-tól különböző elemet ($i_1 < i_2$), és $a_{i_1 j_1}$, illetve $a_{i_2 j_2}$ ezen sorok első 0-tól különböző elem, akkor
  - $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = 1$,
  - $j_1 < j_2$, azaz minden sorban az első nem nulla elem „hátrébb” van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme,
- (a nem csak 0-kat tartalmazó sorok kezdő 1-ese feletti elemek 0-ák).

(Ld. 2. ábra. A $\boxed{1}$-sel jelölt elemek a **vezéregyesek**.)



2. ábra. Lépcsős alakú mátrix

3.25. Tétel. Elemi átalakításokkal (Gauss-féle kiküszöböléssel, azaz Gauss-eliminációval) bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

3.26. Megjegyzés. A Gauss-elimináció nagyon hasonló a determinánsok számolásánál alkalmazható „kinullázáshoz”. Azonban Gauss-elimináció során CSAK a SOROKON végezhetők átalakítások, az OSZLOPOKON NEM.

3.27. Megjegyzés. A LER-ek általános megoldása az alábbi séma alapján történik:
- a LER bővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk (pl. Gauss-eliminációval),
- a lépcsős alak ismeretében eldöntjük, hogy van-e megoldás (ld. 3.28. Tétel),
- ha van megoldás, akkor egy általános megoldás leolvasható a lépcsős alakból.

3.28. Tétel (LER megoldhatósága)**.** LER-nek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixa lépcsős alakjának utolsó nem csupa 0-át tartalmazó sora **ellentmondó**, azaz a következő alakú:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

3.29. Tétel (LER általános megoldása)**.** Ha a LER bővített mátrixának lépcsős alakja nem tartalmaz ellentmondó sort, akkor van megoldása az egyenletrendszernek. Ha a bővített mátrix vezéregyesei rendre a $j_1 < \dots < j_r$ oszlopokban vannak, akkor az $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ ismeretlenek lesznek kötöttek, a többi ismeretlen pedig szabad. Ha a bővített mátrix lépcsős alakja az alábbi alakú (ne felejtsük el, hogy a vezéregyesek felett 0-ák állnak):

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{1(j_1+1)} & \dots & 0 & a'_{1(j_r+1)} & \dots & a'_{1m} & b'_1 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r(j_r+1)} & \dots & a'_{rm} & b'_r \\ 0 & \dots & & & & & & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & \vdots \end{array}\right),$$

akkor

$$\begin{aligned} x_{j_1} &= b'_1 - a'_{1(j_1+1)} x_{j_1+1} - \dots - a'_{1m} x_m, \\ &\vdots \\ x_{j_r} &= b'_r - a'_{r(j_r+1)} x_{j_r+1} - \dots - a'_{rm} x_m. \end{aligned}$$

3.30. Példa. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert, ahol λ valós paraméter.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & \lambda. \end{array}\right.$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak „majdnem lépcsős alakja”:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{array}\right).$$

Ha $\lambda \neq 5$, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek, mivel van ellentmondó sor. Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ha $\lambda = 5$, akkor van megoldás. Az egyenletrendszer bővített mátrixa és annak lépcsős alakja:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 11 & 5 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 6/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & 7/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Két kötött (x_1, x_2) és két szabad (x_3, x_4) ismeretlen van. Az általános megoldás:

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, \qquad x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}),$$

valós számnégyesek halmazaként pedig:

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4,\ \ \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4,\ \ x_3,\ \ x_4\right),$$

ahol x_3 és x_4 tetszőleges valós számok.
Az egyenletrendszer egy konkrét megoldását úgy kapjuk meg, hogy a szabad ismeretleneknek (konkrét) értéket adunk. Legyen $x_3 = 9$ és $x_4 = 25$, ekkor $x_1 = -31$ és $x_2 = -29$, a konkrét megoldás ekkor: $(-31, -29, 9, 25)$.

3.31. Tétel (a megoldások számáról)**.** Az

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_{11} & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_{n1} & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

LER-nek

- nincs megoldása, ha bővített mátrixának lécsős alakjában van ellentmondó sor,
- pontosan egy megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és nincs szabad ismeretlene,
- végtelen sok megoldása van, ha bővített mátrixának lécsős alakjában nincs ellentmondó sor és van legalább egy szabad ismeretlene.

3.32. Példa.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nincs megoldás.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Egy megoldás van.
Nincs szabad változó.
Mo.: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Végtelen sok mo. van.
Van szabad változó (x_2).
$x_1 = -x_2$, $x_3 = 1$ $(x_2 \in \mathbb{R})$

3.6. Elemi Bázistranszformáció

Videó: LER: EBT

Foglaljuk táblázatba az

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer együtthatóit:

$0.$	x_1	$\dots$	x_m	$\mathbf{b}$
e_1	a_{11}	$\dots$	a_{1m}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
e_n	a_{n1}	$\dots$	a_{nm}	b_n

Az alábbi lépéseket hajtsuk végre az induló (0.) táblázattal kezdve:

- a **generáló elem** választása: az együtthatók közül választunk egy olyan 0-tól különbözőt, amelynek sorcímkéje az „indexes” e (pl.: a_{ij}-t, ami annak felel meg, hogy az i-edik egyenletből fejezzük ki x_j-t), a generáló elemet $*$-gal megjelöljük (a^*_{ij}),
- az x_j-hez tartozó oszlopot töröljük és a következő átalakításokat hajtjuk végre:
  - e_i helyébe x_j kerül,
  - az i-edik sor minden elemét osztjuk a_{ij}-vel,
  - az új táblázat többi elemét pedig a **Téglalap-szabállyal** számítjuk ki (a konstansok $\mathbf{b}$ oszlopában is).

3.33. Definíció (A „Téglalap-szabály”)**.** A téglalap-szabály segítségével azon elemek számíthatók, amelyek nincsenek egy sorban, illetve oszlopban a generáló elemmel. Egy ilyen elem (a 3. ábrán a d elem) a generáló elemmel (a^*) együtt egy téglalap két szemközti csúcsát adja (ld. 3. ábra). Ha ezen téglalap másik két csúcsa b és c, akkor az új táblázatban d helyére $d - \frac{bc}{a}$ kerül, vagy más formában: $\frac{ad-bc}{a}$.

	$\dots$	x_i	$\dots$	x_j	$\dots$
$\vdots$					
e_r		b		d	
$\vdots$			$\times$		
e_s		a^*		c	
$\vdots$					

3. ábra. A Téglalap-szabályban szereplő elemek

Elemi bázistranszformáció: $a^*_{ij} \neq 0$ (a generáló elem), valamint a k-adik és a $(k+1)$-edik táblázat.

$k.$	$\dots$	x_v	$\dots$	x_j	$\dots$	$\mathbf{b}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
e_u	$\dots$	a_{uv}	$\dots$	a_{uj}	$\dots$	b_u
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
e_i	$\dots$	a_{iv}	$\dots$	a^*_{ij}	$\dots$	b_i
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

$(k+1).$	$\dots$	x_v	$\dots$	x_{j-1}	x_{j+1}	$\dots$	$\mathbf{b}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
e_u	$\dots$	a'_{uv}	$\dots$	$a'_{u(j-1)}$	$a'_{u(j+1)}$	$\dots$	b'_u
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_j	$\dots$	a'_{iv}	$\dots$	$a'_{i(j-1)}$	$a'_{i(j+1)}$	$\dots$	b'_i
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Transzformációs szabályok:

$$a'_{iv} = a_{iv}/a^*_{ij}, \qquad b'_i = b_i/a^*_{ij}$$

$$a'_{uv} = a_{uv} - \frac{a_{uj}a_{iv}}{a^*_{ij}} = \frac{a_{uv}a^*_{ij} - a_{uj}a_{iv}}{a^*_{ij}}, \qquad \text{ha } u \neq i,$$

$$b'_u = b_u - \frac{a_{uj}b_i}{a^*_{ij}} = \frac{b_u a^*_{ij} - a_{uj}b_i}{a^*_{ij}}, \qquad \text{ha } u \neq i.$$

3.34. Példa. Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \quad\quad\quad x_2 \quad\quad\quad - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 \quad\quad\quad\quad\quad - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ \quad\quad\quad\quad\quad 3x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 \quad\quad\quad\quad\quad = -2. \end{cases}$$

A LER-hez tartozó induló EBT-táblázat az első generálóelemmel, majd sorban a többi táblázat:

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
e_1	0	1^*	0	−1	−1	0
e_2	2	0	0	−5	−6	0
e_3	0	0	3	−5	−6	0
e_4	1	−1	−1	0	0	−2

1.	x_1	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	0	0	−1	−1	0
e_2	2	0	−5	−6	0
e_3	0	3	−5	−6	0
e_4	1^*	−1	−1	−1	−2

2.	x_3	x_4	x_5	**b**
x_2	0	−1	−1	0
e_2	2^*	−3	−4	4
e_3	3	−5	−6	0
x_1	−1	−1	−1	−2

3.	x_4	x_5	**b**
x_2	−1	−1	0
x_3	−3/2	−2	2
e_3	$-1/2^*$	0	−6
x_1	−5/2	−3	0

4.	x_5	**b**
x_2	−1	12
x_3	−2	20
x_4	0	12
x_1	−3	30

A 4. táblázatban elakad az algoritmus, mivel nem tudunk generáló elemet választani. az x_5 ismeretlen értéke tetszőlegesen megválasztható.

3.35. Tétel (LER EBT-vel való megoldhatósága)**.** Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha az elemi bázistranszformáció során van **ellentmondó sor**, ami a következő alakú:

$\ell.$	x_{j_1}	$\dots$	x_{j_k}	**b**
.	.	...	.	.
e_i	0	...	0	$c \neq 0$
.	.	...	.	.

3.36. Megjegyzés. Fontos: az ellentmondó sor elején „indexes e”-nek kell szerepelnie!

4. Mátrixegyenletek

4.1. $AX = B$

Videó: A mátrixegyenletek megoldásáról

Probléma. Legyen A $(m \times n)$-es és B $(m \times \ell)$-es valós mátrix. Található-e olyan X valós mátrix, amelyre $AX = B$?

4.1. Megjegyzés. (a) Ha létezik a fenti tulajdonságú X mátrix, akkor $X \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$.
(b) Az

$$A \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} x_{1\ell} \\ \vdots \\ x_{n\ell} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{m\ell} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet ekvivalens az alábbi LER-rendszerrel, ami ℓ darab LER-ből áll, amelyek mindegyike m egyenletet és n ismeretlent tartalmaz:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, A \cdot \begin{pmatrix} x_{1\ell} \\ \vdots \\ x_{n\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{m\ell} \end{pmatrix}.$$

Az egyes LER-ek elemi bázistranszformációval megoldhatók, ügyesen szervezve a teendőket, akár egyszerre is.

Az EBT-t az alábbi induló táblázatra fogjuk végrehajtani:

0.	$\mathbf{x}_1$	$\ldots$	$\mathbf{x}_n$	$\mathbf{b}_1$	$\ldots$	$\mathbf{b}_\ell$
e_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}	b_{11}	$\ldots$	$b_{1\ell}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
e_m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}	b_{m1}	$\ldots$	$b_{m\ell}$

Szabályok:
- az „e”-ket szeretnénk lecserélni „**x**”-ekre, így
- a generáló elem csak az a_{ij}-k közül kerülhet ki.

4.2. Példa. Oldjuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenletet.

Ha X megoldása a mátrixegyenletnek, akkor $X \in \mathbb{R}^{4\times3}$. Az EBT-hez szükséges induló táblázat az alábbi lesz:

0.	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
e_1	1	-1	2	1	-1	1	0
e_2	1	0	1	-1	1	2	1

Az EBT során az alábbi táblázatok szerepelnek:

0.	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{e}_1$	1^*	-1	2	1	-1	1	0
$\mathbf{e}_2$	1	0	1	-1	1	2	1

1.	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{x}_1$	-1	2	1	-1	1	0
$\mathbf{e}_2$	1^*	-1	-2	2	1	1

2.	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{x}_1$	1	-1	1	2	1
$\mathbf{x}_2$	-1	-2	2	1	1

A cserét teljesen végrehajtottuk, a mátrixegyenlet megoldható. Az utolsó táblázatból a megoldásokat is leolvashatjuk. Legyen $X = (x_{ij})_{4\times 3}$. Ekkor x_{1j} és x_{2j} $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ „kötött ismeretlenek” lesznek, az x_{3j} és x_{4j} $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ ismeretlenek pedig „szabadok”:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 1 - x_{31} + x_{41}, & x_{21} &= 2 + x_{31} + 2x_{41}, \\ x_{12} &= 2 - x_{32} + x_{42}, & x_{22} &= 1 + x_{32} + 2x_{42}, \\ x_{13} &= 1 - x_{33} + x_{43}, & x_{23} &= 1 + x_{33} + 2x_{43}. \end{aligned}$$

A mátrixegyenlet általános megoldása:

$$X = \begin{pmatrix} 1 - 1 \cdot x_{31} - (-1) \cdot x_{41} & 2 - x_{32} + x_{42} & 1 - x_{33} + x_{43} \\ 2 - (-1) \cdot x_{31} - (-2) \cdot x_{41} & 1 + x_{32} + 2x_{42} & 1 + x_{33} + 2x_{43} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix},$$

ahol $x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43}$ tetszőleges valós számok.

4.3. Megjegyzés. Tegyük fel, hogy az $AX = B$ mátrixegyenlet megoldható ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$), az EBT-eljárás induló $(0.)$ és befejező $(w.)$ táblázata legyen az alábbi:

0.	$\mathbf{x}_1$	$\dots$	$\mathbf{x}_n$	$\mathbf{b}_1$	$\dots$	$\mathbf{b}_\ell$
$\mathbf{e}_1$	a_{11}	$\dots$	a_{1n}	b_{11}	$\dots$	$b_{1\ell}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{e}_m$	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}	b_{m1}	$\dots$	$b_{m\ell}$

$\dots$

$w.$	$\mathbf{x}_{j_{s+1}}$	$\dots$	$\mathbf{x}_{j_n}$	$\mathbf{b}_1$	$\dots$	$\mathbf{b}_\ell$
$\mathbf{x}_{i_1}$	$a'_{i_1 j_{s+1}}$	$\dots$	$a'_{i_1 j_n}$	$b'_{i_1 1}$	$\dots$	$b'_{i_1 \ell}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{x}_{i_s}$	$a'_{i_s j_{s+1}}$	$\dots$	$a'_{i_s j_n}$	$b'_{i_s 1}$	$\dots$	$b'_{i_s \ell}$
$\mathbf{e}_{i_{s+1}}$	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{e}_{i_m}$	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0

- Az $\mathbf{x}_i$ változó az X megoldásmátrix x_{ij} változóit „jelképezi”.
- A változók értékét úgy határozhatjuk meg, mint az egyenletrendszer megoldása esetén. Tehát a példában az $\mathbf{x}_3$ és $\mathbf{x}_4$ „szabad változók” lesznek, így X minden oszlopának harmadik és negyedik eleme szabadon választható.
- A konstansok meghatározásakor a megfelelő oszlop kontansait a jobboldali konstansok megfelelő oszlopa határozza meg, például a második oszlophoz csak a jobboldali konstansok második oszlopát kell figyelembe venni.

A mátrixegyenletnek pontosan akkor nincs megoldása, ha az elemi bázistranszformáció során van ellentmondó sor, ami a következő alakú lehet:

$w.$	$\mathbf{x}_{j_1}$	$\dots$	$\mathbf{x}_{j_k}$	$\mathbf{b}_1$	$\dots$	$\mathbf{b}_\ell$
.	.	$\dots$	.	.	$\dots$	.
$\mathbf{e}_i$	0	$\dots$	0	c_1	$\dots$	c_ℓ
.	.	$\dots$	.	.	$\dots$	.

,

ahol a c-k közül legalább egy nem nulla, VAGY

$w.$	$\mathbf{b}_1$	$\dots$	$\mathbf{b}_\ell$
.	.	$\dots$	.
$\mathbf{e}_i$	c_1	$\dots$	c_ℓ
.	.	$\dots$	.

,

ahol a „c”-k közül legalább egy nem nulla. Azaz a változók oszlopai már „elfogytak”, de maradt e_i sorában nem nulla elem.

Ha a mátrixegyenlet megoldása során a következő táblázatot kapjuk:

	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{x}_1$	1	2	2
$\mathbf{x}_3$	2	−1	3
$\mathbf{x}_2$	1	−1	−1

,

akkor nincs szabad ismeretlen (és nincs ellentmondó sor), így pontosan egy megoldás van.

A megoldás leolvasásakor ügyeljünk, hogy a sorokat megfelelő sorrendbe írjuk a megoldásmátrixba, azaz ebben az esetben:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.4. Példa. Előállhat-e a következő táblázat egy mátrixegyenlet megoldása során?

$w.$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{x}_1$	2	2	−1
$\mathbf{x}_2$	2	0	3
e_3	0	0	0

Igen, ha az A mátrix (3×2), a B pedig (3×3) méretű, akkor az $AX = B$ mátrixegyenletnél az X mátrix, ha létezik, (2×3) típusú.

Hány megoldás van? Az e_3 címkéjű sorban minden elem nulla, így nincs ellentmondó sor. Mivel nincs szabad ismeretlen, pontosan egy megoldás van: $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.2. Az $XA = B$ alakú mátrixegyenletek

A megoldás alapjául szolgáló ötlet az alábbi:

$$XA = B \quad \overset{\sqcup^T}{\Longleftrightarrow} \quad A^T X^T = B^T.$$

Azaz,

1. először oldjuk meg az $A^T Y = B^T$ mátrixegyenletet (a korábban tárgyalt módon),
2. ha Y megoldása, akkor az eredeti egyenlet megoldása $X = Y^T$ lesz.

4.5. Példa. Oldjuk meg az

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

mátrixegyenletet ($X \in \mathbb{R}^{3\times 4}$).

„Transzponáljuk az egyenletet”:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

0.	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
e_1	1^*	1	2	4	9	7	8
e_2	0	2	1	3	7	7	4
e_3	1	1	1	3	6	6	6
e_4	1	-1	1	1	2	0	4

1.	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{y}_1$	1	2	4	9	7	8
e_2	2	1^*	3	7	7	4
e_3	0	-1	-1	-3	-1	-2
e_4	-2	-1	-3	-7	-7	-4

2.	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{y}_1$	-3	-2	-5	-7	0
$\mathbf{y}_3$	2	3	7	7	4
e_3	2^*	2	4	6	2
e_4	0	0	0	0	0

3.	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_2$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{y}_1$	1	1	2	3
$\mathbf{y}_3$	1	3	1	2
$\mathbf{y}_2$	1	2	3	1
e_4	0	0	0	0

Nem sikerült minden „**e**”-t ”**y**”-ra cserélni, de a megmaradt „**e**”-k sorában minden elem 0, tehát nincs ellentmondó sor. Ekkor a megoldás a korábbi módon olvasható le az utolsó táblázatból. A transzponált mátrixegyenlet megoldás a következő:

$$
\begin{aligned}
y_{11} &= 1 - y_{41}, & y_{21} &= 2 - y_{41}, & y_{31} &= 3 - y_{41},\\
y_{12} &= 2 - y_{42}, & y_{22} &= 3 - y_{42}, & y_{32} &= 1 - y_{42},\\
y_{13} &= 3 - y_{43}, & y_{23} &= 1 - y_{43}, & y_{33} &= 2 - y_{43},
\end{aligned}
$$

ahol y_{4j} $(j = 1, 2, 3)$ teszőlegesen választható, azaz

$$
Y = \begin{pmatrix} 1 - y_{41} & 2 - y_{42} & 3 - y_{43} \\ 2 - y_{41} & 3 - y_{42} & 1 - y_{43} \\ 3 - y_{41} & 1 - y_{42} & 2 - y_{43} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{pmatrix}.
$$

Az

$$
X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.
$$

mátrixegyenletet megoldása pedig

$$
X = Y^T = \begin{pmatrix} 1 - y_{41} & 2 - y_{41} & 3 - y_{41} & y_{41} \\ 2 - y_{42} & 3 - y_{42} & 1 - y_{42} & y_{42} \\ 3 - y_{43} & 1 - y_{43} & 2 - y_{43} & y_{43} \end{pmatrix},
$$

ahol y_{4j} $(j = 1, 2, 3)$ teszőleges valós számok.

4.6. Megjegyzés. Speciális típusú mátrixegyenletek az A mátrix inverzének felhasználásával is megoldhatók, ld. 5.16. Megjegyzés.

5. Mátrixok inverze

Videó: Mátrixok inverzének kiszámolásáról

5.1. Definíció (mátrix inverze)**.** Legyen A négyzetes mátrix, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Azt mondjuk, hogy a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **inverze** A-nak, ha $AB = E_n$ és $BA = E_n$.

5.2. Megjegyzés. Nem minden négyzetes mátrixnak van inverze. Ha az A mátrixnak inverze a B mátrix, akkor $1 = |E_n| = |AB| = |A| \cdot |B|$ következtében $|A| \neq 0$.

5.3. Definíció (nemelfajuló és invertálható mátrixok)**.** Ha az A mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixot **nemelfajulónak** nevezzük. Ha az A mátrixnak létezik inverze, azt mondjuk, hogy az A mátrix **invertálható**.

5.4. Példa. (a) Az $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix nemelfajuló, mivel $|E_2| = 1 \neq 0$.

(b) Az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix invertálható, mivel $A \cdot A = E_2$.

5.5. Tétel. Az A négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha determinánsa nem 0. Azaz az A négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha nemelfajuló.

5.6. Megjegyzés. Ha egy mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelmű. Az A mátrix inverzét (ha az létezik) A^{-1} jelöli.

5.1. Inverz számolás adjungált aldeterminánsokkal

5.7. Tétel. Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrixnak létezik inverze, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsa.

5.8. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 17 \\ 19 & 23 & 29 \\ 31 & 37 & 41 \end{pmatrix}$. Ekkor $|A| = -40 \neq 0$ következtében A invertálható:

$$A^{-1} = \frac{1}{-40} \cdot \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 23 & 29 \\ 37 & 41 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 19 & 29 \\ 31 & 41 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 19 & 23 \\ 31 & 37 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 13 & 17 \\ 37 & 41 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 11 & 17 \\ 31 & 41 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 37 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 13 & 17 \\ 23 & 29 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & 17 \\ 19 & 29 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 19 & 23 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-40} \cdot \begin{pmatrix} -130 & 96 & -14 \\ 120 & -76 & 4 \\ -10 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{12}{5} & \frac{7}{20} \\ -3 & \frac{19}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{20} \end{pmatrix}.$$

5.9. Megjegyzés. Ha az A mátrix (2×2)-es az aldeterminánsok (1×1)-esek, így ha $|A|\neq 0$, akkor a mátrix inverze könnyen megkapható. Erre a speciális esetre felírjuk a 5.7. Tételben szereplő formulát:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^{T}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

5.2. Inverz számítása EBT-vel

5.10. Megjegyzés. Hogyan számolhatjuk egy mátrix inverzét, amennyiben az létezik?

Ha az A $(n\times n)$-es mátrix invertálható, akkor A^{-1} az $AX=E_n$ mátrixegyenlet (egyetlen) megoldása. Azaz a mátrixegyenletre tanult módszer segítségével kiszámítható a mátrix inverze. Az A $(n\times n)$-es mátrix pontosan akkor nem invertálható, ha ellentmondó sort kapunk az $AX=E_n$ mátrixegyenlet megoldása során.

Az $AX=E_n$ egy speciális mátrixegyenlet, így a korábbi elemi bázistranszformációs lépések kis módosításával egyszerűbben is meg lehet oldani.

1. A mátrix elemeit táblázatba foglaljuk, a sorokat az $e_1,e_2,\dots$, az oszlopokat pedig a $v_1,v_2,\dots$ szimbólumokkal címkézzük.
2. Generálóelemet választunk ($a_{ij}\neq 0$), majd elemi bázistranszformációt hajtunk végre:
   - most nem hagyunk el oszlopot (ld. Új szabályok!),
   - az a_{ij} elem sor- és oszlopcímkéi felcserélődnek,
   - mindig „e”-t cserélünk „v”-re.
3. Addig ismételjük a 2. lépést, amig alkalmas generáló elemet tudunk választani.
4. Ha az „e”-k és a „v”-k helyet cseréltek, akkor a mátrixnak van inverze, a sorokat és az oszlopokat a címkék eredeti sorrendjének megfelelően átrendezve az inverz is látható.
5. Ha még azelőtt elakadunk, hogy az „e”-k és a „v”-k helyet cseréltek volna, akkor a mátrixnak nincs inverze.

Új szabályok!

A generáló elem oszlopát nem hagyjuk el, az új táblázatba a következő elemek kerülnek ebbe az oszlopba:

- a generáló elem helyébe annak reciproka kerül: $a'_{ij}=1/a_{ij}$,
- a generáló elem oszlopának többi elemét osztjuk a generáló elem (-1)-szeresével: $a'_{i'j}=a_{i'k}/(-a_{ij})$ $(i'\neq i)$.

5.11. Példa. Tekintsük az $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot.

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1^*	2	0	1
e_2	2	1	2	−1
e_3	0	2	1	2
e_4	−1	0	2	1

1.	e_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	2	0	1
e_2	−2	−3	2	−3
e_3	0	2	1^*	2
e_4	1	2	2	2

2.	e_1	v_2	e_3	v_4
v_1	1	2	0	1
e_2	−2	−7	−2	−7
v_3	0	2	1	2
e_4	1	−2	−2	-2^*

3.	e_1	v_2	e_3	e_4
v_1	3/2	1	−1	1/2
e_2	−11/2	**0**	5	−7/2
v_3	1	0	−1	1
v_4	−1/2	1	1	−1/2

Elakadtunk, így az A mátrixnak nincs inverze.

5.12. Példa. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixot. Invertálható-e az A mátrix?

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	2	1^*	0	0
e_2	1	2	1	0
e_3	0	1	2	1
e_4	0	0	1	2

1.	v_1	e_1	v_3	v_4
v_2	2	1	0	0
e_2	−3	−2	1^*	0
e_3	−2	−1	2	1
e_4	0	0	1	2

2.	v_1	e_1	e_2	v_4
v_2	2	1	0	0
v_3	−3	−2	1	0
e_3	4	3	−2	1^*
e_4	3	2	−1	2

3.	v_1	e_1	e_2	e_3
v_2	2	1	0	0
v_3	−3	−2	1	0
v_4	4	3	−2	1
e_4	-5^*	−4	3	−2

4.	e_4	e_1	e_2	e_3
v_2	2/5	−3/5	6/5	−4/5
v_3	−3/5	2/5	−4/5	6/5
v_4	4/5	−1/5	2/5	−3/5
v_1	−1/5	4/5	−3/5	2/5

Minden „e”-t ki tudtunk cserélni „v”-re, ezért A-nak van inverze, a címkék sorrendjét visszaállítva azt kapjuk, hogy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.3. Inverz számítása Gauss-eliminációval

A 5.10. Megjegyzésben leírtuk, hogy egy A $(n \times n)$-es mátrix inverzének meghatározása az $AX = E_n$ mátrixegyenlet megoldásával megkapható. Továbbá a 4.1. Megjegyzésben szerepelt korábban, hogy a mátrixegyenletek megoldása visszavezethető LER-rendszerek megoldására. Tehát ebben az esetben is alkalmazható a LER-ek megoldására a Gauss-elimináció, így az inverz is meghatározható ezzel a módszerrel, ha létezik.

5.13. Tétel. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix és

$$(A|E_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Gauss-elimináció elemi átalakításainak segítségével az A $n \times n$-es mátrix helyén az E_n egységmátrixot próbáljuk kialakítani.

- Ha $(A|E_n) \sim (E_n|B)$, akkor A invertálható és $B = A^{-1}$.
- Ha $(A|E_n) \not\sim (E_n|\bigstar)$, azaz nem tudjuk kialakítani az egységmátrixot, akkor A nem invertálható.

5.14. Példa. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -15 \end{pmatrix}$ mátrixot, határozzuk meg az inverzét, ha létezik.

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim \cdots \sim}{\text{elemi átalakítások}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 46 & -33 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -33 & 24 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Tehát invertálható a mátrix, az inverz leolvasható:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 46 & -33 & 7 \\ -33 & 24 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

5.15. Példa. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -16 \end{pmatrix}$ mátrixot, határozzuk meg az inverzét, ha létezik.

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{elemi átalakítások}}{\sim \cdots \sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Az utolsó sor vonal előtti része csak 0-t tartalmaz, így nem alakítható ki az egységmátrix, tehát A-nak nincs inverze. Megjegyezzük, hogy az A mátrix determinánsának értéke pontosan akkor 0, ha az elemi átalakítások után kapott mátrix értéke 0, mivel a vonal előtti mátrix 0 sort tartalmaz, így a determinánsa 0, tehát A determinánsa is 0.

5.16. Megjegyzés. Legyen A $(n \times n)$-es invertálható mátrix, és B $(n \times k)$-as mátrix. Tekintsük az $AX = B$ mátrixegyenletet. Az egyenlet megoldható, és a megoldás a következőképpen is megkapható: a mátrixegyenlet mindkét oldalát megszorozzuk balról A^{-1}-gyel, mivel $A^{-1}A = E$ és $EX = X$, így a mátrixegyenletnek pontosan egy megoldása van: $X = A^{-1}B$.

Ha A $(n \times n)$-es invertálható mátrix, és B $(k \times n)$-es mátrix, akkor az előzőhöz hasonlóan az $XA = B$ mátrixegyenlet is megoldható, egyetlen megoldása a következő alakú: $X = BA^{-1}$.

Természetesen, ha A nem invertálható, akkor ez a módszer nem alkalmazható.

5.4. Az inverzre vonatkozó azonosságok

5.17. Tétel (az invertálás azonosságai)**.** Legyen A és B tetszőleges $(n \times n)$-es invertálható mátrix, ekkor
(a) $(A^{-1})^{-1} = A$,
(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5.18. Definíció (négyzetes mátrix negatív kitevős hatványa)**.** Ha A invertálható mátrix, akkor az inverz létezését felhasználva definiálhatók A negatív kitevős hatványai:

$$A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1}}_{\text{k db}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

5.19. Definíció (mátrix nulladik hatványa)**.** Tetszőleges A $(n \times n)$-es invertálható mátrix esetén $A^0 = E_n$.

5.20. Tétel (a hatványozás azonosságai)**.** Legyen A tetszőleges invertálható mátrix, és $m, k \in \mathbb{Z}$, ekkor
(a) $A^{m+k} = A^m A^k$,
(b) $(A^m)^k = A^{mk}$.

6. A Leontief-féle Input/Output modell

Videó: A Leontief-modellről (elmélet)

6.1. Példa. Tegyük fel, hogy egy gazdaság 3 fő ágazatból áll: mezőgazdaság, ipar és szállítás. Az egyes ágazatok 1 egységnyi termék előállításához mindhárom ágazat termékeit felhasználják:

	Egységnyi termékre eső felhasználás		
	Mezőgazdaság	Ipar	Szállítás
Mezőgazdaság	0.30	0.30	0.20
Ipar	0.20	0.10	0.20
Szállítás	0.00	0.20	0.20

a táblázat oszlopai megmutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól. A fenti gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathsf{M} & \mathsf{I} & \mathsf{Sz} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathsf{M} \\ \mathsf{I} \\ \mathsf{Sz} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array},$$

amelynek oszlopai megmutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

6.2. Definíció (ráfordítási mátrix)**.** Egy gazdaság egyes ágazatai közötti kapcsolatokat leíró mátrixot a gazdaság **ráfordítási mátrixnak** hívjuk. A ráfordítási mátrix oszlopai mutatják, hogy 1 egységnyi termék előállításához mennyi termékre van szükség az egyes ágazatoktól.

6.3. Megjegyzés (Row, or column, that is the question.)**.** Amennyiben a sorok mutatják, hogy az egyes ágazatoknak mennyi nyersanyagra van szüksége, akkor mindent transzponálni kell. Mindig tisztában kell lenni azzal, hogy sorokban vagy oszlopokban gondolkodunk!

6.4. Példa.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathsf{M} & \mathsf{I} & \mathsf{Sz} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathsf{M} \\ \mathsf{I} \\ \mathsf{Sz} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ha 1 egységnyi M, 3 egységnyi I és 2 egységnyi Sz terméket szeretnénk legyártani, akkor mennyi termékre van szükség? Például az M termékből $1 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 = 1.7$ egységnyi szükséges, azonban ezen termékeket is elő kell állítani, és ahhoz szintén valamennyi terméket fel kell használni, stb.

6.1. Nettó és bruttó kibocsátás

6.5. Definíció (nettó kibocsátás)**.** A **nettó kibocsátás** az a termékmennyiség, amelyet az adott gazdaságnak elő kell állítania (felfogható megrendelésként).

6.6. Definíció ((nettó kibocsátáshoz tartozó) bruttó kibocsátás)**.** Az a termékmennyiség a **bruttó kibocsátás**, amelyet a gazdaságnak ÖSSZESEN elő kell állítania ahhoz, hogy a nettó kibocsátást elő tudja állítani.

Probléma: Hogyan lehet meghatározni a bruttó kibocsátást?

6.7. Definíció (A Leontief-féle Input/Output modell)**.** Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, amely n darab ágazatot foglal magában és ráfordításai mátrixa $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ekkor

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{bruttó kibocsátás}} = \underbrace{C\mathbf{x}}_{\text{közbülső kibocsátás}} + \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{nettó kibocsátás}},$$

ahol $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$.

6.8. Megjegyzés (a Leontief-féle Input/Output modellhez)**.** Mivel $\mathbf{x} = E_n\mathbf{x}$, ezért

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d} \Longleftrightarrow E_n\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d} \Longleftrightarrow E_n\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d} \Longleftrightarrow (E_n - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = (E_n - C)^{-1}\mathbf{d},$$

ha $E_n - C$ invertálható.

6.9. Definíció (Leontief-inverz)**.** Legyen $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Az $E_n - C$ mátrix inverzét, amennyiben létezik, a C mátrix **Leontief-inverzének** nevezzük.

6.10. Megjegyzés. Megvizsgáljuk milyen magyarázat adható a 6.8. Megjegyzésben megadott formulára.

	Elérendő kibocsátás	Szükséges termékm.
1. kör	$\mathbf{d}$	$C\mathbf{d}$
2. kör	$C\mathbf{d}$	$C(C\mathbf{d}) = C^2\mathbf{d}$
3. kör	$C^2\mathbf{d}$	$C(C^2\mathbf{d}) = C^3\mathbf{d}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ekkor az $\mathbf{x}$ bruttó kibocsátás:

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + C\mathbf{d} + C^2\mathbf{d} + \cdots = (E + C + C^2 + \dots)\mathbf{d}.$$

Mivel a mértani sorozat összegképletét felhasználva $(E-C)(E+C+C^2+\cdots+C^m) = E - C^{m+1}$, ezért $(E-C)^{-1} \approx E + C + \cdots + C^m$, ha a C mátrixnak létezik a Leontief inverze, és $C^m \to 0$ $(m \to \infty)$.

6.11. Tétel. Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek n ágazata van $(n \in \mathbb{N})$, valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n\times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor az $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ egyenletnek akkor és csak akkor van tetszőleges $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ megoldása, ha $(E - C)^{-1}$ létezik, minden eleme nemnegatív, és $C^m \to 0$, ha $m \to \infty$.

6.12. Definíció (működőképesség)**.** Ha $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, ahol az $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ egyenletnek tetszőleges $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}$ esetén van $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ megoldása, azaz $\mathcal{G}$ tetszőleges megrendelést ki tud elégíteni (elvileg), akkor **működőképesnek** nevezzük.

6.13. Megjegyzés. Feladatmegoldásnál a működőképesség vizsgálatánál csak azt ellenőrizük, hogy teljesül-e, hogy az $(E - C)^{-1}$ Leontief-inverz minden eleme nemnegatív.

6.14. Tétel. Legyen C egy gazdaság ráfordítási mátrixa, $\mathbf{d}$ a nettó kibocsátás vektora. Ha C és $\mathbf{d}$ minden komponense nemnegatív, valamint a gazdaság működőképes, akkor az $\mathbf{x}$ bruttó kibocsátás:

$$\mathbf{x} = (E - C)^{-1}\mathbf{d},$$

ezen (oszlop)vektor minden komponense nemnegatív, és $\mathbf{x}$ az egyetlen megoldása az $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ egyenletnek.

6.15. Példa. Tekintsük a 6.1. Példában látott gazdaságot, amelynek ráfordítási mátrixa: $C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$, és $(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix}$, tehát a gazdaság működőképes. Ha 1 egységnyi M, 3 egységnyi I és 2 egységnyi Sz terméket szeretnénk legyártani, akkor a nettó kibocsátás a $\mathbf{d}^T = (1, 3, 2)$ vektorral adható meg. Határozzuk meg a bruttó kibocsátást:

$$\mathbf{x} = (E_3 - C)^{-1}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1.62 & 0.67 & 0.57 \\ 0.38 & 1.33 & 0.43 \\ 0.10 & 0.33 & 1.36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.62 + 2.01 + 1.14 \\ 0.38 + 3.99 + 0.86 \\ 0.10 + 0.99 + 2.72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.77 \\ 5.23 \\ 3.81 \end{pmatrix}.$$

6.16. Megjegyzés. (a) Ha egy gazdaság ráfordítási mátrixának Leontief-inverze tartalmaz negatív elemet, akkor a gazdaság nem működőképes: adott termékmennyiség előállításához összességében végtelen sok terméket fogyasztana el.

(b) Ha egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0.7 & 0.3 \\ 1.1 & 0.1 & 1.2 \\ 1.2 & 1.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

akkor a gazdaság nem produktív (nem is működőképes), hiszen ...

6.17. Példa. Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa $C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg a $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ nettó kibocsátáshoz tartozó összkibocsátást.

A C mátrix Leontief-inverze: $(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 0.7 & -0.6 \\ -0.2 & -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10. & 11.25 & 19.375 \\ 10. & 13.75 & 23.125 \\ 10. & 12.5 & 23.75 \end{pmatrix}$. Így a bruttó kibocsátás vektora: $(E_3 - C)^{-1}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 10. & 11.25 & 19.375 \\ 10. & 13.75 & 23.125 \\ 10. & 12.5 & 23.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.625 \\ 46.875 \\ 46.25 \end{pmatrix}$.

6.18. Példa. Működőképes-e az a gazdaság, amelynek ráfordítási mátrixa: $C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.18 \end{pmatrix}$? A C mátrix Leontief-inverze: $(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -295.71 & -320 & -264.29 \\ -232.86 & -250 & -207.14 \\ -185.71 & -200 & -164.29 \end{pmatrix}$. A gazdaság nem működőképes.

6.19. Példa. Változtassuk meg egy kicsit a ráfordítási mátrixot az előző példához képest és vizsgáljuk, hogy mennyire változik a végeredmény (ez az úgynevezett érzékenység-vizsgálat). Esetünkben a helyzet menthető. Legyen

$$C' = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.17391 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $(E_3 - C')^{-1} = \begin{pmatrix} 597\,519. & 643\,480. & 528\,571. \\ 468\,324. & 504\,350. & 414\,286. \\ 371\,429. & 400\,000. & 328\,571. \end{pmatrix}$. A gazdaság így működőképes, de nem túl hatékonyan működik, hiszen 1-1 megrendelt termék előállításához gondoljuk meg, hogy mennyi köztes termék kell...

6.2. Költség és profit

6.20. Megjegyzés. Néhány kérdés a ráfordítási mátrixszal kapcsolatban:

- Működőképes-e a gazdaság?
- Adott termékmennyiség előállítása során mennyi terméket kell legyártani?
- Ha az árak ismertek, hogy lehet meghatározni az egyes ágazatok profitját?
- Milyen árak mellett lehet az összprofitot maximalizálni?
- Milyen egyensúlyi helyzetei vannak a gazdaságnak?

6.21. Példa. Legyen a $\mathcal{G}$ gazdaság ráfordítási mátrixa: $C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$, és legyen az ágazatok termékeinek árvektora $\mathbf{v} = (1\ 2\ 3)$ (azaz, az első termék 1, a második 2, a harmadik pedig 3 egységbe kerül). Határozzuk meg az egyes ágazatok egységnyi termékének előállításakor keletkező költséget. Világos, hogy az első, második, illetve harmadik ágazat egységnyi termékének előllításakor rendre

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 &= 1.6, \\ 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 &= 1.7, \\ 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.2 &= 1.6 \end{aligned}$$

egységnyi kiadás keletkezik.

6.22. Tétel. Ha C egy gazdaság ráfordítási mátrixa és $\mathbf{v}$ az árvektor, akkor az egyes ágazatok **költségeit** a $\mathbf{v}C$ vektor tartalmazza. A **profit(vektor)** pedig $\mathbf{v} - \mathbf{v}C = \mathbf{v}(E - C)$.

6.23. Példa (a 6.21. Péda folytatása)**.** Az előbbi példában a profitvektor:

$$\mathbf{v}(E_3 - C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 & 1.4 \end{pmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a második és harmadik ágazat nyereséges, az első ágazat pedig veszteséges.

6.24. Definíció (produktív gazdaság)**.** A $\mathcal{G}$ gazdaság **produktív**, ha minden ágazatban keletkezik hozzáadott érték, minden ágazat realizál profitot.

6.25. Tétel (produktivitás)**.** Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek n ágazata van ($n \in \mathbb{N}$), valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor ha a $\mathcal{G}$ gazdaság működőképes, akkor meg lehet úgy határozni a $\mathbf{v}$ árvektort, hogy $\mathbf{v}(E_n - C)$ minden komponense pozitív, azaz minden ágazat nyereséges, tehát a gazdaság produktív.

6.26. Példa. Ha a 6.21. Példánkban az árvektor $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2.9 \end{pmatrix}$, akkor már minden ágazat nyereséges lesz: $\mathbf{v}'(E_3 - C) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ -0.3 & 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.04 & 1.12 \end{pmatrix}$. Míg a $\mathbf{v}$ árvektorral a gazdaság nem volt produktív, a $\mathbf{v}'$ árvektorral produktív lett. A C mátrix Leontief-inverze: $(E_3 - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 3.1 & 1.8 & 1.7 \\ 1.8 & 2.4 & 1.7 \\ 1.7 & 1.7 & 2.5 \end{pmatrix}$.

7. Vektorterek

Videó: Vektorterek (bevezetés)

7.1. Valós szám-n-esek

7.1. Definíció (Valós szám-n-esek halmaza)**.** Legyen n természetes szám. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemeit **valós szám-n-eseknek** nevezzük: $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, ahol $a_1, \ldots, a_n$ valós számok. Tetszőleges i indexre $(1 \leqslant i \leqslant n)$ a_i az $\mathbf{a}$ valós szám-n-es i-edik **komponense**.

7.2. Példa. (a) $\mathbb{R}^2$ a valós számpárok halmaza, pl.: $(1, 2), (3, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$,
(b) $\mathbb{R}^3$ a valós számhármasok halmaza, pl.: $(\pi, \sqrt{3}, \sin\frac{\pi}{16}) \in \mathbb{R}^3$.

7.3. Definíció (valós szám-n-esek egyenlősége)**.** Az $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n)$ valós szám-n-esek pontosan akkor egyenlők, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \overset{\text{def.}}{\iff} a_k = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

7.4. Példa. (a) $(-1, 2) \neq (-1, 2, 3)$, mert különböző a komponensek száma,
(b) $(-1, 2, 3.14) \neq (-1, 2, \pi)$, mert a komponensek száma ugyan egyenlő, de a két valós szám-3-as harmadik komponensei különbözőek,
(c) végül, $(6, 28, 496, 8128) = (2(2^2 - 1), 2^2(2^3 - 1), 2^4(2^5 - 1), 2^6(2^7 - 1))$.

7.5. Definíció (vektorok összeadása és skalárral való szorzás)**.** Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemein definiáljuk az összeadást, és a skalárokkal (= valós számokkal) történő szorzást a következő módon. Ha $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) \overset{\text{def.}}{=} (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$
$$\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) \overset{\text{def.}}{=} (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

7.6. Példa. (a) $(1, \sqrt{2} - 1, 3, 0.4) + (2, 1, 0, -1.2) = (3, \sqrt{2}, 3, -0.8)$,
(b) $0 \cdot (1, -1, \sqrt{2}, \pi) = (0, 0, 0, 0)$.

7.7. Definíció (Valós vektortér)**.** Az így kapott $(\mathbb{R}^n; +, \alpha\cdot(\alpha \in \mathbb{R}))$ struktúrát nevezzük a **(valós) szám-n-esek vektorterének**.

7.8. Jelölés. Vektorterek: V, U, ..., elemeik a vektorok (u, v, w, ...). Skalárok: $\mathbb{R}$ elemei (α, β, γ, ...).

7.9. Definíció (zérusvektor)**.** Az $\mathbb{R}^n$ vektortér csupa 0-ból álló vektorát zérusvektornak nevezzük, és $\underline{0}$-val jelöljük, $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$.

7.2. Valós vektorterek

7.10. Tétel (a valós szám-n-esek vektorterének elemi tulajdonságai)**.** Legyen $V = \mathbb{R}^n$. Ekkor tetszőleges $u, v, w \in V$ vektorra és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárra érvényesek a következők:
1. $u + v = v + u$ (a vektorok összeadása kommutatív),

2. $(u+v)+w = u+(v+w)$ (a vektorok összeadása asszociatív),
3. $\underline{0}+u = u+\underline{0} = u$,
4. $(-1)\cdot u+u = u+(-1)\cdot u = \underline{0}$,
5. $\alpha\cdot(\beta\cdot u) = (\alpha\beta)\cdot u$,
6. $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u+\alpha\cdot v$,
7. $(\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$,
8. $1\cdot u = u$.

7.11. Tétel. Tetszőleges $v\in V$ vektorra és $\alpha\in\mathbb{R}$ skalárra $\alpha\cdot v=\underline{0}$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha=0$ vagy $v=\underline{0}$.

7.12. Definíció ((valós) vektorterek elemi tulajdonságai)**.** A $(V;+,\alpha\cdot\ (\alpha\in\mathbb{R}))$ struktúra **(valós) vektortér**, ha tetszőleges $u,v,w\in V$ vektorra és $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ skalárra érvényesek a következők:

1. $u+v = v+u$ (a vektorok összeadása kommutatív),
2. $(u+v)+w = u+(v+w)$ (a vektorok összeadása asszociatív),
3. $\underline{0}+u = u+\underline{0} = u$,
4. $(-1)\cdot u+u = u+(-1)\cdot u = \underline{0}$,
5. $\alpha\cdot(\beta\cdot u) = (\alpha\beta)\cdot u$,
6. $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u+\alpha\cdot v$,
7. $(\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$,
8. $1\cdot u = u$.

7.13. Tétel. Legyen V valós vektortér. Tetszőleges $v\in V$ vektorra és $\alpha\in\mathbb{R}$ skalárra $\alpha\cdot v=\underline{0}$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha=0$ vagy $v=\underline{0}$.

7.3. Alterek

7.14. Definíció (altér)**.** A V vektortér U nemüres részhalmaza **altere** V-nek, ha zárt az összeadásra és a valós számmal történő szorzásra nézve, azaz bármely két U-beli vektor összege U-ban van (ha $u,v\in U$, akkor $u+v\in U$) és tetszőleges valós számmal szorozva bármely U-beli vektort ismét U-beli vektort kapunk (ha $u\in U$ és $\alpha\in\mathbb{R}$, akkor $\alpha\cdot u\in U$). Jel.: $U\leqslant V$.

7.15. Megjegyzés. Ha $\underline{0}\notin U$, akkor U nem altér.

7.16. Megjegyzés. Az alterek maguk is (valós) vektorterek, így bármi, amit vektorterekről mondunk, vonatkozni fog azok altereire is.

7.17. Példa. (a) Tetszőleges V vektortérben $\{\underline{0}\}$ és V alterek (**triviális alterek**).

(b) A $V=\mathbb{R}^2$ vektortérben az $U=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1,x_2\geqslant 0\right\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2,3)\in U$, $-1\in\mathbb{R}$, de $(-1)\cdot(2,3)=(-2,-3)\notin U$ (azaz U nem zárt a skalárokkal való szorzásra).

- Az $\mathbb{R}^2$ vektortér azonosítható a síkkal, ekkor U éppen az 1. síknegyed.

(c) A $V=\mathbb{R}^2$ vektortérben az $U=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1x_2\geqslant 0\right\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2,4),(-3,-2)\in U$, de $(2,4)+(-3,-2)=(-1,2)\notin U$ (azaz U nem zárt a vektorok összeadására vonatkozóan).

7.18. Megjegyzés (egy kis geometria: a sík)**.** A 2-dimenziós síkon, azaz $\mathbb{R}^2$-ben az alterek a következők:

- a teljes sík maga,
- az origón ($O=(0,0)$-án) átmenő egyenesek,
- az origót tartalmazó egyelemű halmaz.

7.19. Tétel (alterek (komplexus) összege és metszete)**.** Ha U_1 és U_2 alterei a V vektortérnek, akkor az

$$U_1+U_2 = \{u_1+u_2 \mid u_1\in U_1, u_2\in U_2\},$$
$$U_1\cap U_2 = \{u\in V \mid u\in U_1 \text{ és } u\in U_2\}$$

részhalmazok alterei V-nek.

7.20. Definíció ((komplexus) összeg)**.** Az U_1+U_2 alteret az U_1 és U_2 **alterek (komplexus) összegének** nevezzük.

7.4. Lineáris kombináció

Videó: A lineáris kombináció

7.21. Definíció (lineáris kombináció)**.** A V vektortér $v_1, \dots, v_n$ vektorainak az $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokkal képzett **lineáris kombinációja** az $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \in V$ vektor.

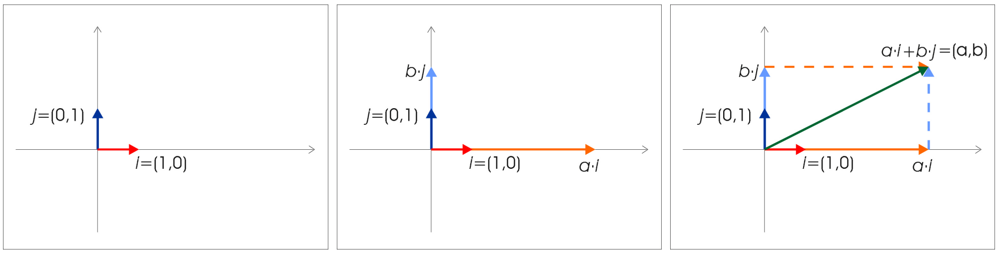
7.22. Példa. A $v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, 1)$ vektorok $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$ és $\alpha_3 = 5$ skalárokkal képzett lineáris kombinációja:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 = 2 \cdot (1, 1, -1) + (-3) \cdot (0, 1, 1) + 5 \cdot (0, 1, 1) = (2, 4, 0),$$

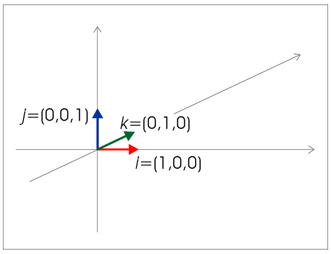
vagyis a $(2, 4, 0)$ vektor előáll az $(1, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 1, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként.

7.23. Megjegyzés. Ha U altere a V vektortérnek, akkor tetszőleges $v_1, \dots, v_n \in U$ vektorok tetszőleges lineáris kombinációja is U-beli vektor.

7.24. Megjegyzés (a vektorterek „mérése”)**.** *1. Megközelítés.* A síkon (az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérben) 2 vektor szükséges és elegendő is ahhoz, hogy ezek lineáris kombinációjaként az összes többi vektort előállítsuk (ld. 4. ábra). A térben azonban 3 vektor kell ehhez (ld. 5. ábra).

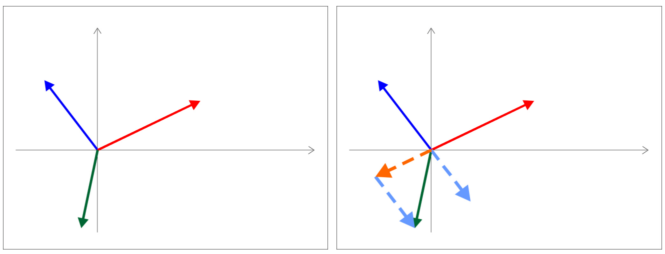


4. ábra. Vektorok $\mathbb{R}^2$-ben (a)



5. ábra. Vektorok $\mathbb{R}^3$-ban

2. Megközelítés. A síkon bárhogy adunk meg 3 vektort, azok között lesz olyan, amely a másik kettő által „kifeszített” síknak (vagy egyenesnek) az eleme (ld. 6. ábra), míg térben ez nem teljesül. Ezen gondolatmenet precízzé tétele vezet a *lineáris függetlenség* fogalmához.



6. ábra. Vektorok $\mathbb{R}^2$-ben (b)

7.25. Definíció (generált altér)**.** Legyen V valós vektortér. A $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorok által **generált altér** a legszűkebb olyan altér, amely tartalmazza a $v_1, \dots, v_n$ vektorokat. Jel.: $[v_1, \dots, v_n]$.

7.26. Tétel. Legyen V vektortér, $v_1, \dots, v_n \in V$. Ekkor a $v_1, \dots, v_n$ vektorok által generát altér elemei éppen a $v_1, \dots, v_n$ vektorok összes lineáris kombinációit tartalmazó halmaz, azaz

$$[v_1, \dots, v_n] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

7.27. Definíció (generátorrendszer)**.** A $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorrendszer **generátorrendszer** a V vektortérben, ha $V = [v_1, \dots, v_n]$.

7.28. Példa. Legyen $V = \mathbb{R}^4$ és $u = (1, -1, 0, 0)$, $v = (2, 3, 0, 0)$. Ekkor

$$\begin{aligned}[u, v] &= \{\alpha \cdot u + \beta \cdot v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, -\alpha, 0, 0) + (2\beta, 3\beta, 0, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha + 2\beta, -\alpha + 3\beta, 0, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, \beta, 0, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Az u, v vektorrendszer nem generátorrendszer.

7.29. Példa. Döntsük el, hogy a $v = (2, 0, 3)$ vektor eleme-e a $V = \mathbb{R}^3$ vektortér $U = [(1, -1, 1), (1, 1, 2)]$ alterének.

Az előző tétel szerint $(2, 0, 3) \in [(1, -1, 1), (1, 1, 2)]$ pontosan akkor teljesül, ha a $(2, 0, 3)$ vektor előáll az $(1, -1, 1), (1, 1, 2)$ vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis, ha vannak olyan α és β skalárok, hogy $(2, 0, 3) = \alpha \cdot (1, -1, 1) + \beta \cdot (1, 1, 2)$, azaz $(2, 0, 3) = (\alpha + \beta, -\alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$. A $(2, 0, 3) = (\alpha + \beta, -\alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$ vektoregyenlőség pedig azt jelenti, hogy

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 2, \\ -\alpha & + & \beta & = & 0, \\ \alpha & + & 2\beta & = & 3. \end{array}\right.$$

EBT-vel oldjuk meg a LER-t:

0.	α	β	**b**
e_1	1^*	1	2
e_2	-1	1	0
e_3	1	2	3

1.	β	**b**
α	1	2
e_2	2	2
e_3	1^*	1

2.	**b**
α	1
e_2	0
β	1

Az egyenletrendszer megoldható, azaz $v \in U$, sőt, $v = 1 \cdot (1, -1, 1) + 1 \cdot (1, 1, 2)$.

Az

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 2, \\ -\alpha & + & \beta & = & 0, \\ \alpha & + & 2\beta & = & 3. \end{array}\right.$$

LER megoldása Gauss-eliminációva:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer megoldható, azaz $v \in U$, sőt, $v = 1 \cdot (1, -1, 1) + 1 \cdot (1, 1, 2)$.

7.30. Példa. Igaz-e, hogy a $v = (8, 76, 51, 74) \in \mathbb{R}^4$ vektor eleme az $U = [u_1, \dots, u_5] \leqslant \mathbb{R}^4$ altérnek, ahol $u_1 = (0, 8, 9, 6)$, $u_2 = (1, 2, 2, 2)$, $u_3 = (1, 4, 5, 6)$, $u_4 = (1, 8, 4, 8)$, $u_5 = (1, 8, 6, 7)$?

A szükséges lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát (EBT-táblázatát) közvetlenül fel tudjuk írni:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & v \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & 4 & 8 & 8 & 76 \\ 9 & 2 & 5 & 4 & 6 & 51 \\ 6 & 2 & 6 & 8 & 7 & 74 \end{array}\right) \end{array} \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 19/52 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15/26 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/52 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 29/52 & 7 \end{array}\right)$$

$$v \in U \quad \text{és} \quad v = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 7 \cdot u_4 + 0 \cdot u_5$$

7.5. Lineáris függőség

Videó: Lineáris függőség és függetlenség

7.31. Definíció (triviális lineáris kombináció)**.** Legyen V valós vektortér, $v_1,\ldots,v_n \in V$. Ekkor a $0\cdot v_1+\cdots+0\cdot v_n$ lineáris kombinációt, a $v_1,\ldots,v_n$ vektorok **triviális lineáris kombinációjának** nevezzük.

7.32. Definíció (lineáris függő vektorrendszer)**.** A V valós vektortérbeli $v_1,\ldots,v_n$ vektorrendszer **lineárisan függő**, ha van olyan nemtriviális lineáris kombinációjuk, amely a zérusvektorral egyenlő, azaz vannak olyan $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyek nem mind 0-ák, de $\alpha_1\cdot v_1+\cdots+\alpha_n\cdot v_n=\underline{0}$.

7.33. Példa. Legyen V az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér. Az $(1,1,1),(0,0,0)$ vektorrendszer lineárisan függő: $0\cdot(1,1,1)+1\cdot(0,0,0)=(0,0,0)$.

7.34. Tétel (a lineáris függőség „alapesetei”)**.** (a) Ha egy vektorrendszer tartalmazza a $\underline{0}$ vektort, akkor lineárisan függő.

(b) Ha egy vektorrendszer két vektora arányos, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

7.35. Tétel. Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorrendszer valamelyik vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként.

7.36. Példa. Legyen V az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér. (a) A $(3,3,3),(-5,-5,-5)$ vektorrendszer lineárisan függő: $5\cdot(3,3,3)+3\cdot(-5,-5,-5)=(0,0,0)$.

(b) A $(2,0,1,8),(0,4,0,4),(-6,16,-3,-8)$ vektorrendszer lineárisan függő: $(-3)\cdot(2,0,1,8)+4\cdot(0,4,0,4)=(-6,16,-3,-8)$.

7.37. Tétel. Lépcsős alakú mátrix nem csupa 0 soraiból alkotott vektorrendszer nem lineárisan függő.

7.6. Lineáris függetlenség

7.38. Definíció (lineárisan független vektorrendszer)**.** Legyen V valós vektortér, $v_1,\ldots,v_n \in V$. A $v_1,\ldots,v_n$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha nem lineárisan függő.

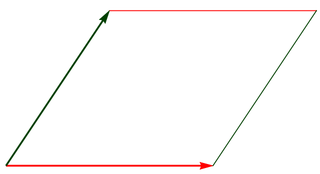
7.39. Megjegyzés. Azaz,

- ha a $\alpha_1\cdot v_1+\ldots+\alpha_n\cdot v_n=\underline{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$,
- ha a $v_1,\ldots,v_n$ vektorok lineáris kombinációja csak úgy állítja elő a $\underline{0}$ vektort, ha minden skalár nulla.

7.40. Példa. (a) Az $(1,1,1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha $\alpha\cdot(1,1,1)=(0,0,0)$, akkor szükségképpen $\alpha=0$.

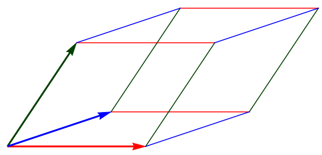
(b) Az $(1,-1,0),(0,1,1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha $\underbrace{\alpha\cdot(1,-1,0)+\beta\cdot(0,1,1)}_{(\alpha,-\alpha+\beta,\beta)}=(0,0,0)$, akkor az első komponens miatt $\alpha=0$, a harmadik miatt pedig $\beta=0$.

7.41. Példa (lineáris függetlenség $\mathbb{R}^2$-ben)**.** Ha $v_2\neq\underline{0}$, akkor $\mathbb{R}^2$-ben a v_1,v_2 vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha nincs olyan α skalár, amelyre $v_1=\alpha\cdot v_2$ teljesül. Azaz, a két vektor nem esik egy egyenesbe.



7.42. Megjegyzés. Az előző állítás nemcsak $\mathbb{R}^2$-ben, hanem $\mathbb{R}^n$-ben is érvényes.

7.43. Példa (lineáris függetlenség $\mathbb{R}^3$-ban)**.** A térben a v_1,v_2,v_3 helyvektorok által alkotott vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha az általuk meghatározott paralelepipedon térfogata nem 0, azaz nem esnek egy síkba. Az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben a v_1,v_2,v_3 vektorok által kifeszített paralelepipedon V térfogata kiszámítható



a vektorok komponenseiből kialakított (3×3)-as mátrix determinánsának segítségével. Ha $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ és $v_3 = (a_3, b_3, c_3)$, valamint $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, akkor $V = |D|$ (abszolútérték). Továbbá, $V \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha a v_1, v_2, v_3 vektorrendszer lineárisan független.

Az előzőeket általánosítva kapjuk az alábbi állítást.

7.44. Tétel (a lineáris függetlenség és a determináns)**.** Az $\mathbb{R}^n$-beli $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a vektorok komponenseiből alkotott $(n \times n)$-es mátrix determinánsa nem 0.

7.7. Vektorrendszerek rangja

Videó: Vektorrendszerek rangja

7.7.1. Részrendszerek

7.45. Tétel (lin. független vektorr. részrendszerei)**.** Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely részrendszere is az.

7.46. Következmény. Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor a teljes vektorrendszer is az.

7.47. Példa. Egy lineárisan függő vektorrendszer részrendszerei között már lehetnek lineárisan függetlenek. Például a $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 1, 2)$ vektorrendszer lineárisan függő, azonban az $(1, 1, 1)$ részrendszere lineárisan független, sőt az $(1, 1, 1), (1, 1, 2)$ vektorrendszer is lineárisan független.

7.7.2. Maximális lineárisan független részrendszerek

7.48. Definíció (maximális lineárisan független részrendszer)**.** Vektorrendszer **maximális lineárisan független részrendszerének** nevezzük egy olyan lineárisan független részrendszerét, amely már nem bővíthető tovább úgy, hogy a részrendszer továbbra is lineárisan független maradjon.

7.49. Példa. A $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 1, 2)$ vektorrendszernek maximális lineárisan független részrendszere az $(1, 1, 1), (1, 1, 2)$ vektorrendszer, de nem az egyetlen, mivel $(2, 2, 2), (1, 1, 2)$ is az.

7.50. Definíció (vektorrendszer rangja)**.** Vektorrendszer **rangjának** nevezzük a maximális lineárisan független részrendszereinek közös elemszámát. Tehát a vektorrendszer rangja r, ha kiválasztható r-elemű lineárisan független részrendszer, de $(r + 1)$-elemű már nem.

7.51. Példa. (a) A $(0, 0, 0)$ vektorrendszer rangja 0.

(b) Az $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$ vektorrendszer rangja 1.

(c) Az $(1, 1, 1)^T, (1, -1, 1), (2, -2, 2)$ vektorrendszer rangja 2. Maximális lineárisan független részrendszerei: $(1, 1, 1), (1, -1, 1)$ és $(1, 1, 1), (2, -2, 2)$.

(d) Az $(1, 1, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 2)$ vektorrendszer rangja 3, mivel a vektorrendszer lineárisan független.

7.52. Tétel. Legyen V valós vektortér.

- A $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorrendszer rangja legfeljebb n, és pontosan akkor n, ha a vektorrendszer lineárisan független.
- Ha egy vektorrendszer rangja r, akkor r darab lineárisan független vektort kiválasztva belőle, a vektorrendszer minden tagja előáll ezek lineáris kombinációjaként.
- Vektorrendszer rangja nem változik, ha
  - bővítjük egy olyan vektorral, amely előáll a vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként.
  - elhagyunk belőle egy olyan vektort, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

– valamely vektorához hozzáadjuk egy másik vektorának többszörösét, vagy ha valamely vektorát 0-tól különböző valós számmal szorozzuk meg.

7.53. Tétel. Legyen V valós vektortér, $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n \in V$. Ha a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként előáll az $u_1, \dots, u_k$ vektorok mindegyike, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer rangja kisebb vagy egyenlő, mint a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangja.

7.7.3. Rangszámítás Gauss-eliminációval

7.54. Tétel (rangszámítás Gauss-eliminációval)**.** Az $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer rangját meghatározhatjuk Gauss-eliminációval:

- A vektorrendszer vektorait beírjuk egy mátrix soraiba vagy oszlopaiba.
- Gauss-eliminációval meghatározzuk a mátrix lépcsős alakját.
- A lépcsős alakban szereplő nem csupa 0 sorok száma adja meg a vektorrendszer rangját.

7.55. Megjegyzés. Ha a Gauss-elimináció elvégzése után nemcsak a vektorrendszer rangjára vagyunk kíváncsiak, hanem egy maximális lineárisan független részrendszert is szeretnénk megadni, akkor, ha a mátrix soraiba írjuk a vektorokat, akkor a sorokon, ha az oszlopaiba, akkor az oszlopokon végezzük az elemi átalakításokat. Továbbá a Gauss-elimináció elvégézése után figyelnünk kell, hogy a lépcsős alak nem csupa 0 sorainak/oszlopainak melyik eredeti vektor felel meg, mert a sorcsere/oszlopcsere esetén változhat a sorrend.

7.56. Példa. Számítsuk ki az $(1, -1, 1, 1)$, $(-1, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 2, 2)$, $(-1, 1, 1, 1)$, $(-1, 2, 3, 3)$, $(0, -1, 0, 0)$ vektorrendszer rangját.

- A vektorokat az A mátrix soraiba írjuk:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Az $(1, -1, 1, 1)$, $(-1, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 2, 2)$, $(-1, 1, 1, 1)$, $(-1, 2, 3, 3)$, $(0, -1, 0, 0)$ vektorrendszer rangja 3.
- A megoldás során sorcserét is hajtottunk végre, az első három vektor nem alkot maximális lineárisan független részrendszert.
- Egy maximális lineárisan független részrendszere például: $(1, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1), (-1, 1, 1, 1)$.

7.7.4. Rangszámítás EBT-vel

7.57. Tétel. Rangszámítás EBT-vel:

- A vektorokat beírjuk az EBT-táblázat **oszlopaiba**, majd elemi bázistranszformációt hajtunk végre, ameddig tudunk.
- A generáló elem oszlopát el lehet hagyni, sőt akár a sorokat is!
- A sorokba bevitt oszlopcímkék adják az eredeti vektorrendszer egy maximális lineárisan független részrendszerét, a számuk pedig a rangot.

7.58. Példa. Számítsuk ki a $v_1 = (1, -1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1, -1, -1)$, $v_4 = (1, 2, 4, 0, 2)$, $v_5 = (3, 0, 2, 0, 0)$ vektorrendszer rangját, és adjunk meg benne maximális lineárisan független részrendszert.

0.	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	1^*	-1	1	1	3
e_2	-1	1	2	2	0
e_3	2	1	1	4	2
e_4	1	0	-1	0	0
e_5	2	1	-1	2	0

1.	v_2	v_3	v_4	v_5
e_2	0	3	3	3
e_3	3	-1	2	-4
e_4	1^*	-2	-1	-3
e_5	3	-3	0	-6

2.	v_3	v_4	v_5
e_2	3^*	3	3
e_3	5	5	5
e_5	3	3	3

3.	v_4	v_5
e_3	0	0
e_5	0	0

A vektorrendszer rangja 3, egy maximális lineárisan független részrendszere:

$$v_1 = (1, -1, 2, 1, 2), v_2 = (-1, 1, 1, 0, 1), v_3 = (1, 2, 1, -1, -1).$$

7.8. Bázis és dimenzió

Videó: Bázis és dimenzió

7.8.1. Bázis

7.59. Definíció (bázis)**.** Legyen V valós vektortér. A vektortér lineárisan független generátorrendszerét V **bázisának** nevezzük.

7.60. Példa. A következő vektorrendszerek bázist alkotnak a megadott vektorterekben.
- Az $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorrendszer a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben (e bázis a **standard bázis** $\mathbb{R}^n$-ben).
- Bármely három nem egy síkba eső vektor a térben.
- Az $(\sqrt{2}, 1, 1), (1, \sqrt{3}, 1), (1, 1, \sqrt{5})$ vektorrendszer $\mathbb{R}^3$-ban.

7.61. Definíció (véges dimenziós/végesen generált vektortér)**.** A V vektorteret **véges dimenziósnak**/**végesen generáltnak** nevezzük, ha van véges generátorrendszere.

7.62. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér véges dimenziós, mivel az $e_1, \dots, e_n$ standard bázis generátorrendszere.

7.8.2. Dimenzió

7.63. Tétel. Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.

7.64. Definíció (dimenzió)**.** A V véges dimenziós vektortér **dimenzióján** bázisainak közös elemszámát értjük.

7.65. Megjegyzés. Az előző tétel alapján ez a szám egyértelműen meghatározott, és nem függ a bázis választásától.

7.66. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ vektortér n-dimenziós, az $e_1, \dots, e_n$ **standard bázis** bázisa e vektortérnek:

$$e_\ell = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad (1 \leqslant \ell \leqslant n).$$

7.67. Jelölés. A V végesen generált valós vektortér dimenzióját $\dim(V)$ jelöli. Pl.: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ és $\dim(\{\underline{0}\}) = 0$.

7.68. Tétel (dimenzió és rang)**.** Legyen V valós vektortér, $v_1, \dots, v_n \in V$. A $[v_1, \dots, v_n]$ altér dimenziója megegyezik a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer rangjával. A $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerei bázisai ezen altérnek.

7.69. Tétel (lineárisan független vektorrendszerek és bázisok)**.** Ha a V vektortér dimenziója n, akkor
- bármely n-elemű lineárisan független vektorrendszere bázisa V-nek,
- bármely n-elemű generátorrendszere bázisa V-nek.

7.8.3. Bázisok alterekben

Bázis megadása generált altérben (EBT-vel). Legyen $U = [v_1, \dots, v_k]$ altér a V valós vektortérben.
1. EBT-vel meghatározzuk, hogy (maximálisan) hány darab vektor vonható be a bázisba a $v_1, \dots, v_k$ vektorok közül.
2. Bázisba bevont vektorok bázist alkotnak az U altérben, számuk az altér dimenziójával egyezik meg.

vagy

Bázis megadása generált altérben (Gauss-eliminációval). Legyen $U = [v_1, \dots, v_k]$ altér a V valós vektortérben.
1. A generátorrendszer vektorait beírjuk az A mátrix soraiba.
2. A sorokon végzett (!) elemi átalakításokkal meghatározzuk a mátrix lépcsős alakját.
3. A nem csupa 0 sorvektorok az U altér egy bázisát adják.

7.70. Példa. Legyen $U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$, ahol

$$u_1 = (-5, 7, 16, 7, 1),\ u_2 = (1, 2, 1, 2, -1),\ u_3 = (1, 8, 13, 8, -7),\ u_4 = (-1, 1, 2, 1, 1),\ u_5 = (1, 1, -2, 1, 1).$$

Határozzuk meg U dimenzióját.

0.	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
e_1	-5	1^*	1	-1	1
e_2	7	2	8	1	1
e_3	16	1	13	2	-2
e_4	7	2	8	1	1
e_5	1	-1	-7	1	1

1.	u_1	u_3	u_4	u_5
e_2	17	6	3	-1^*
e_3	21	12	3	-3
e_4	17	6	3	-1
e_5	-4	-6	0	2

2.	u_1	u_3	u_4
e_3	-30	-6	-6
e_4	0	0	0
e_5	30	6	6^*

3.	u_1	u_3
e_3	0	0
e_4	0	0

Az $u_1, \ldots, u_5$ vektorrendszer rangja 3, az u_2, u_4, u_5 vektorok lineárisan függetlenek, amelyek az U altér bázisát alkotják, $\dim(U) = 3$.

7.71. Példa. Legyen $U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]$, ahol

$$u_1 = (-5, 7, 16, 7, 1),\ u_2 = (1, 2, 1, 2, -1),\ u_3 = (1, 8, 13, 8, -7),\ u_4 = (-1, 1, 2, 1, 1),\ u_5 = (1, 1, -2, 1, 1).$$

Határozzuk meg U dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 & 16 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 13 & 8 & -7 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az $u_1, \ldots, u_5$ vektorrendszer rangja 3, az $(1, 0, 0, 0, -2), (0, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0, -1) \in U$ vektorok lineárisan függetlenek, amelyek az U altér bázisát alkotják, $\dim(U) = 3$.

7.72. Tétel (lin. függetlenség, generátorrendszer, bázis és rang)**.** Legyen V n-dimenziós vektortér és $v_1, \ldots, v_k \in V$ vektorrendszer, melynek rangja r. Ekkor a következők érvényesek:

1. $r \leqslant n, k$,
2. a vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $r = k$,
3. a vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere V-nek, ha $r = n$,
4. a vektorrendszer pontosan akkor bázisa V-nek, ha $r = k = n$.

7.73. Példa. Döntsük el, hogy az ($\mathbb{R}^4$-beli)

$$(1, -1, 2, 1), (-3, 1, 0, 2), (1, 1, -1, 2), (-1, 1, 1, 5)$$

vektorrendszer lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e $\mathbb{R}^4$-ben.

Az $\mathbb{R}^4$ vektortér dimenziója 4 ($n = 4$), a vektorrendszernek 4 eleme van ($k = 4$). Ki kellene számolni még a vektorrendszer rangját ($r = 3$).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A vektorrendszer rangja $r = 3$. A vektorrendszer nem lineárisan független, nem generátorrendszer és nem bázis.

7.74. Tétel. Legyenek U_1 és U_2 alterek a V vektortérben, amelyekre $U_1 \subseteq U_2$ teljesül. Ekkor

- $\dim(U_1) \leqslant \dim(U_2)$,
- $U_1 = U_2$ pontosan akkor teljesül, ha $\dim(U_1) = \dim(U_2)$.

7.75. Definíció ((komplexus) összeg)**.** Ha U_1 és U_2 alterek a V valós vt.-ben, akkor (komplexus) összegük:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}.$$

7.76. Tétel. Ha $U_1, U_2 \leqslant V$, akkor $U_1 + U_2 \leqslant V$.

7.77. Tétel (alterek összegének generátorrendszere)**.** Ha $U_1 = [u_1, \ldots, u_m]$ és $U_2 = [v_1, \ldots, v_n]$ alterek a V vektortérben, akkor

$$U_1 + U_2 = [u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n].$$

7.78. Tétel (alterek dimenziótétele)**.** Legyenek U_1 és U_2 alterek a V végesen generált valós vektortérben. Ekkor $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2)$.

7.8.4. Koordinátasor

Videó: Vektorok koordinátasora

7.79. Tétel. Legyen $\mathcal{B}\colon v_1, \dots, v_n$ bázisa a V valós vektortérnek. Ekkor tetszőleges $v \in V$ vektorhoz pontosan egy olyan $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ valós szám-n-es létezik, amelyre

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

teljesül.

7.80. Definíció (koordinátasor)**.** A $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ valós szám-n-est a v vektor $\mathcal{B}\colon v_1, \dots, v_n$ bázisra vonatkozó **koordinátasorának** nevezzük és $[v]_{\mathcal{B}}$-vel jelöljük.

7.81. Példa. A $V = \mathbb{R}^n$ valós vektortérben a $v = (a_1, \dots, a_n)$ vektor koordinátasora a standard bázisra vonatkozóan $(a_1, \dots, a_n)$, mivel

$$v = \underbrace{a_1 \cdot e_1}_{(a_1,0,\dots,0)} + \dots + \underbrace{a_n \cdot e_n}_{(0,\dots,0,a_n)},$$

azaz $[v]_{\text{st.}} = (a_1, \dots, a_n)$.

7.82. Példa. Határozzuk meg a $v = (1, 1, 1)$ vektor koordinátasorát a

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}\colon\ e_1 = (1,0,0), && e_2 = (0,1,0), && e_3 = (0,0,1), \\ &\mathcal{B}'\colon\ v_1 = (1,-1,2), && v_2 = (2,-1,7), && v_3 = (1,-2,0) \end{aligned}$$

bázisokban.

(Koordinátasor a $\mathcal{B}$ bázisban.) Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, amelyekre

$$(1,1,1) = \alpha \cdot (1,0,0) + \beta \cdot (0,1,0) + \gamma \cdot (0,0,1) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

teljesül. Ekkor $\alpha = \beta = \gamma = 1$, a v vektor koordináta sora a $\mathcal{B}$ bázisban $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Koordinátasor a $\mathcal{B}'$ bázisban.) Olyan α, β, γ valós számokat keresünk, melyekre

$$(1,1,1) = \alpha \cdot (1,-1,2) + \beta \cdot (2,-1,7) + \gamma \cdot (1,-2,0).$$

Ez az egyenlőség a következő LER-re vezet:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 1, \\ -\alpha & - & \beta & - & 2\gamma & = & 1, \\ 2\alpha & + & 7\beta & & & = & 1. \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right)$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $\alpha = 18$, $\beta = -5$, $\gamma = -7$. Ezért a v vektor koordinátasora a $\mathcal{B}'$ bázisban:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 18 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

7.8.5. Miért EBT az EBT?

7.83. Tétel (EBT)**.** Legyen $v_1, \dots, v_n$ bázis a V vektortérben, valamint legyen $u \in V$, amelynek koordinátasora ebben a bázisban $(a_1, \dots, a_n)^T$, azaz $u = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n$. Ekkor a

$$v_1, \dots, v_{\ell-1}, u, v_{\ell+1}, \dots, v_n$$

vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha $a_\ell \neq 0$.

Ha a $v \in V$ vektor koordinátasora a $v_1, \dots, v_n$ bázisban $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, akkor a $v_1, \dots, v_{\ell-1}, u, v_{\ell+1}, \dots, v_n$ bázisban v koordinátasora:

$$\left(\frac{\alpha_1 a_\ell - \alpha_\ell a_1}{a_\ell}, \dots, \frac{\alpha_{\ell-1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell-1}}{a_\ell}, \frac{\alpha_\ell}{a_\ell}, \frac{\alpha_{\ell+1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell+1}}{a_\ell}, \dots, \frac{\alpha_n a_\ell - \alpha_\ell a_n}{a_\ell} \right).$$

„Koordináták a régi bázisban”

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & u & & v & \\ \hline
v_1 & \dots & a_1 & \dots & \alpha_1 & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
v_{\ell-1} & \dots & a_{\ell-1} & \dots & \alpha_{\ell-1} & \dots \\
v_\ell & \dots & a_\ell & \dots & \alpha_\ell & \dots \\
v_{\ell+1} & \dots & a_{\ell+1} & \dots & \alpha_{\ell+1} & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
v_n & \dots & a_n & \dots & \alpha_n & \dots
\end{array}$$

„Koordináták az új bázisban”

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & & v_\ell & & v & \\ \hline
v_1 & \dots & -a_1/a_\ell & \dots & (\alpha_1 a_\ell - \alpha_\ell a_1)/a_\ell & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
v_{\ell-1} & \dots & -a_{\ell-1}/a_\ell & \dots & (\alpha_{\ell-1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell-1})/a_\ell & \dots \\
u & \dots & 1/a_\ell & \dots & \alpha_\ell/a_\ell & \dots \\
v_{\ell+1} & \dots & -a_{\ell+1}/a_\ell & \dots & (\alpha_{\ell+1} a_\ell - \alpha_\ell a_{\ell+1})/a_\ell & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
v_n & \dots & -a_n/a_\ell & \dots & (\alpha_n a_\ell - \alpha_\ell a_n)/a_\ell & \dots
\end{array}$$

7.84. Megjegyzés. Az induló bázisunk —ált.— az $e_1, \dots, e_n$ standard bázis, mert abban egyszerű leolvasni a koordinátákat.

7.9. Mátrixok rangja(i)

Videó: Mátrixok rangja(i)

7.9.1. Sor-, oszlop- és determinánsrang

7.85. Definíció (Mátrix rangjai: sor- és oszloprang)**.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, azaz legyen A valós mátrix, melynek m sora és n oszlopa van.

- Az A mátrix **sorrangja** a mátrix sorai, mint $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, által alkotott vektorrendszer rangja (jel.: $r_s(A)$).
- Az A mátrix **oszloprangja** a mátrix oszlopai, mint $\mathbb{R}^m$-beli vektorok, által alkotott vektorrendszer rangja (jel.: $r_o(A)$).

7.86. Definíció (Mátrix rangai: determinánsrang)**.** Az A mátrix **determinánsrangja** a mátrixból kiválasztható legnagyobb méretű nemeltűnő aldetermináns rendje (jel.: $r_d(A)$).

Az A mátrix determinánsrangja r, ha A-nak **van olyan** r-rendű aldeterminánsa, amelynek értéke nem 0, és minden r-nél nagyobb rendű aldeterminánsa már 0.

7.87. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 & 14 & 10 & 15 \\ 5 & -3 & 2 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -12 & 3 & -4 & 5 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 6}$. A sorok és oszlopok „metszetében” álló elemekből alkotott 3-rendű aldetermináns értéke -70. A k-rendű aldeterminánsok száma ($k = 3, 4, 5, 6$) rendre: $700 = \binom{7}{3}\binom{6}{3}$, $525 = \binom{7}{4}\binom{6}{4}$, $126 = \binom{7}{5}\binom{6}{5}$, $7 = \binom{7}{6}\binom{6}{6}$.

7.88. Tétel (Rangszámtétel)**.** Tetszőleges A valós mátrixra $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$ teljesül.

7.89. Definíció (mátrix rangja)**.** Az $r_s(A)$, $r_o(A)$ és $r_d(A)$ rangok közös értékét az A mátrix **rangjának** nevezzük (jel.: $r(A)$).

$$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 4 & 14 & 10 & 15 \\ 5 & \boxed{-3} & 2 & \boxed{8} & \boxed{10} & 3 \\ 3 & \boxed{2} & 1 & \boxed{6} & \boxed{5} & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & \boxed{-12} & 3 & \boxed{-4} & \boxed{5} & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \frac{41}{26} & \frac{35}{26} & \frac{11}{26} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \frac{9}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{17}{26} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \frac{15}{26} & \frac{35}{26} & \frac{37}{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.9.2. Mátrix rangjának kiszámítása

7.90. Tétel. Mátrix rangjának kiszámítása Gauss-eliminációval:

- Gauss-eliminációt hajtunk végre a mátrixon.
- A lépcsős alakban szereplő nem-0 sorok száma adja meg a mátrix rangját.

7.91. Tétel. Mátrix rangjának kiszámítása EBT-vel:

- A mátrixon EBT-t hajtunk végre. A generáló elem oszlopát el lehet hagyni, sőt akár a sorokat is!
- A bázisba bevitt oszlopvektorok száma adja a rangot.

7.92. Megjegyzés. (a) Mátrixok rangját ugyanúgy számoljuk, mint a vektorrendszerek rangját.
(b) Ha Gauss-eliminációval számoljuk a mátrix rangját, akkor a mátrix sorrangját határozzuk meg.
(c) Ha EBT-vel számoljuk a mátrix rangját, akkor a mátrix oszloprangját határozzuk meg.

7.93. Példa. Határozzuk meg az A mátrix rangját, és adjunk meg maximális méretű nem nulla aldeterminánst a mátrixban, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 & -11 \end{pmatrix}.$$

Először Gauss-eliminációval számolunk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

A könnyebb számolás érdekében a 2. sort cseréljük fel a 3. sorral, majd a 4.-kel is. Ekkor a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a lépcsős alakban 3 nem nulla sor szerepel, így a (sor)rang 3. Egy maximális méretű nem nulla aldeterminánst pedig úgy kaphatunk, ha a lépcsős alaknak megfelelő eredeti sorokat és oszlopokat megkeressük. Ebben az esetben az 1., 3., 4., sorok (a sorcserék miatt), és az 1., 2., 3. oszlopok által meghatározott determináns lesz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 & -11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Meghatározzuk EBT-vel a mátrix rangját, és megadunk egy maximális méretű nemeltűnő determinánst a mátrixban. A számolás során a generáló elem sora és oszlopa is elhagyható.

0.	a_1	a_2	a_3	a_4
e_1	1^*	1	3	-2
e_2	0	-3	-1	7
e_3	1	2	4	-5
e_4	2	4	9	-11

1.	a_2	a_3	a_4
e_2	-3	-1^*	7
e_3	1	1	-3
e_4	2	3	-7

2.	a_2	a_4
e_3	-2^*	4
e_4	-7	14

3.	a_4
e_4	0

A mátrix (oszlop)rangját a bázisba bekerült oszlopvektorok száma adja, ami 3. Mivel $r(A) = r_d(A) = 3$, így 3-rendű a legnagyobb méretű nem nulla aldetermináns, ami kiválasztható a mátrixból. Az EBT-táblázat azt is megmutatja, hogy mely sorokat és oszlopokat lehet választanunk:

3.	a_4
e_4	0

Mivel az a_1, a_2, a_3 került be a bázisba, ezért az 1., 2., 3. oszlopokat választhatjuk. Továbbá az e_1, e_2, e_3 bázisvektorok helyére vittük be ezeket a vektorokat, így az 1., 2., 3. sorokat tekinthetjük. A kiválasztott sorok és oszlopok által meghatározott aldetermináns maximális méretű nem nulla aldetermináns lesz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 9 & -11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Megfigyelhetjük, hogy nem ugyanazt a maximális méretű aldeterminánst kaptuk, mint a Gauss-elimináció során, de a mérete, ami a determináns rangot adja, most is 3.

7.94. Megjegyzés. Mivel a mátrix rangjánál láttuk, hogy a sor- és az oszloprang megegyezik, így ha csak a vektorrendszer rangját szeretnénk kiszámítani, akkor mindegy, hogy sorokba vagy oszlopokba írjuk a vektorokat, akár Gauss-eliminációval, akár EBT-vel számolunk. Vannak azonban olyan esetek, amikor számít, hogy **sorokba vagy oszlopokba írjuk a vektorokat**.

- Oszlopokba kell írni a vektorokat, ha ...
  - azt vizsgáljuk eleme-e a v vektor a $v_1, \dots, v_k$ vektorok által generált altérnek, és ha eleme, akkor meg is kell adnunk a v-t a $v_1, \dots, v_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.
  - a v vektor koordinátasorát határozzuk meg egy adott bázisban.
  - EBT-vel határozzuk meg egy generált altér bázisát.
- Sorokba kell írni a vektorokat, ha ...
  - Gauss-eliminációval határozzuk meg egy generált altér bázisát.

7.10. Portfólió-analízis

Videó: Portfólió-analízis

7.95. Példa. Tegyük fel, hogy egy bank 4 különböző eszközbe fektet be (réz, búza, arany és kakaó). Az ügyfeleinek ezen befektetésekből 3 különböző befektetési jegyet kínál, melyekben a fenti eszközök más-más súllyal szerepelnek. Az alábbi mátrix mutatja a három különböző befektetési jegy összetételét —az összes befektetett pénz arányában:

$$\begin{array}{c} \\ BJ_1 \\ BJ_2 \\ BJ_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Réz} & \text{Búza} & \text{Arany} & \text{Kakaó} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & -0.2 & 0.1 \\ -0.4 & 0.8 & 0.3 & 0.3 \\ 0.04 & 0.63 & 0.12 & 0.21 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lehetséges-e a fenti befektetési jegyekből olyan portfóliót összeállítani, ami egyenértékű azzal, mintha minden pénzünket rézbe fektettük volna?

A matematikai modell: A befektetési jegyeknek vektorok feleltethetők meg az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} BJ_1 &\rightsquigarrow v_1 = (0.6, 0.5, -0.2, 0.1)^T, \\ BJ_2 &\rightsquigarrow v_2 = (-0.4, 0.8, 0.3, 0.3)^T, \\ BJ_3 &\rightsquigarrow v_3 = (0.04, 0.63, 0.12, 0.21)^T, \\ \\ BJ_4 &\rightsquigarrow v_4 = (1, 0, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

A matematikai probléma: $v_4 \overset{?}{\in} [v_1, v_2, v_3]$. A megoldás:

0.	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	0.6	−0.4	0.04	1
e_2	0.5	0.8	0.63	0
e_3	−0.2	0.3	0.12	0
e_4	**0.1**	0.3	0.21	0

1.	v_2	v_3	v_4
e_1	−2.2	−1.22	1
e_2	**−0.7**	−0.42	0
e_3	0.9	0.54	0
v_1	3	2.1	0

2.	v_3	v_4
e_1	**0.1**	1
v_2	0.6	0
e_3	0	0
v_1	0.3	0

3.	v_4
v_3	10
v_2	−6
e_3	0
v_1	−3

$$v_4 = (-3) \cdot v_1 + (-6) \cdot v_2 + 10 \cdot v_3$$

A válasz: Lehetséges a fenti befektetési jegyekből olyan portfóliót összeállítani, ami egyenértékű azzal, mintha minden pénzünket rézbe fektettük volna.

Mi a válasz akkor, ha a bank nem enged negatív pozíciókat felvenni a befektetési jegyekből?

A válasz ebben az esetben az, hogy nem lehetséges a fenti befektetési jegyekből olyan portfóliót összeállítani, ami egyenértékű azzal, mintha minden pénzünket rézbe fektettük volna. A v_4 egyértelműen állítható elő a v_1, v_2 és v_3 vektorok lineáris kombinációjaként.

7.11. Kronecker és Capelli tétele

Videó: Kronecker–Capelli-tétel

7.96. Tétel (Kronecker–Capelli-tétel)**.** Az

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $r(A) = r(A \mid \mathbf{b})$, ahol $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ (a LER mátrixa) és $(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$ (a LER bővített mátrixa).

7.97. Példa.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \end{array} \right.$$

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$r(A \mid \mathbf{b}) = r(A) = 2$$

Az egyenletrendszer megoldható.

7.98. Példa.

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 7 \end{cases}$$

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$r(A \mid \mathbf{b}) = 3 \quad \text{és} \quad r(A) = 2$$

Az egyenletrendszer nem megoldható.

7.99. Megjegyzés. Ha $r(A \mid \mathbf{b}) \neq r(A)$, akkor $r(A \mid \mathbf{b}) = r(A) + 1$.

7.12. Homogén lineáris egyenletrendszerek

Videó: Homogén lineáris egyenletrendszerek

7.12.1. HLER-ek

7.100. Definíció (homogén lineáris egyenletrendszer (HLER))**.** Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Az $A\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha $\mathbf{b} = (0, \ldots, 0)$. Azaz, ha lineáris egyenletrendszerünk

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m,1} \cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & 0 \end{cases}$$

alakú.

7.101. Jelölés. Az $A\mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ HLER megoldásainak halmazát U_A-val jelöljük.

7.102. Megjegyzés. Az $A\mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ HLER megoldásainak U_A halmaza az alábbi tulajdonságokkal bír:
- $\underline{0} \in U_A$ ($\underline{0}$ a **triviális megoldása** a HLER-nek),
- ha $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in U_A$, akkor $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \in U_A$ (U_A zárt az összeadásra),
- ha $\mathbf{c} \in U_A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda \cdot \mathbf{c} \in U_A$ (U_A zárt a skalárokkal való szorzásra).

7.103. Tétel. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.

7.104. Tétel. Lineáris egyenletrendszer megoldásai pontosan akkor alkotnak alteret, ha a lineáris egyenletrendszer homogén.

7.105. Példa. Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

HLER-t. Határozzuk meg U_A-t, ahol A az egyenletrendszer mátrixa.

A HLER bővített mátrixának lépcsős alakja:

$$(A \mid \underline{0}) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

- A bővített mátrix utolsó oszlopa az elemi átalakítások során nem változik, így akár el is hagyható.
- A lépcsős alakból MINDEN leolvasható: két kötött (x_1 és x_3) és két szabad (x_2 és x_4) változó ismeretlene van, továbbá
$$U_A = \{(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$
- Az U_A altérben bázist kapunk, ha ügyesen választjuk meg a szabad ismeretlenek értékét:
  - $x_2 = 1$, $x_4 = 0$: $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$,
  - $x_2 = 0$, $x_4 = 1$: $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$.

  A v_1, v_2 vektorrendszer bázis az U_A altérben, így dimenziója 2.

7.106. Definíció (fundamentális megoldásrendszer)**.** HLER megoldásai alterének bázisát a HLER **fundamentális megoldásrendszerének** nevezzük.

7.107. Példa. A $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ vektorrendszer fundamentális megoldásrendszere az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

HLER-nek.

7.108. Tétel. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Az $A\mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszernek $r = r(A)$ darab kötött és $n - r$ darab szabad ismeretlene van, ezért az U_A altér dimenziója $n - r$. Ha a szabad ismeretlenek $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_n}$, akkor az alábbi $(n - r)$-esekhez tartozó

$$\begin{array}{lllll} x_{i_{r+1}} = 1 & x_{i_{r+2}} = 0 & \dots & x_{i_n} = 0 & v_1 = (\dots, 1, \dots, 0, \dots, 0, \dots) \\ x_{i_{r+1}} = 0 & x_{i_{r+2}} = 1 & \dots & x_{i_n} = 0 & v_2 = (\dots, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots) \\ & & & & \vdots \\ x_{i_{r+1}} = 0 & x_{i_{r+2}} = 0 & \dots & x_{i_n} = 1 & v_{n-r} = (\dots, 0, \dots, 0, \dots, 1, \dots) \end{array}$$

megoldások fundamentális megoldásrendszert alkotnak. Azaz, ha a szabad ismeretlenek helyébe ezeket az értékeket helyettesítjük, és meghatározzuk a kötött ismeretlenek értékét, akkor ezek a konkrét megoldás-vektorok az U_A megoldástér egy bázisát alkotják.

7.109. Példa. Tekintsük az $A\mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ HLER-t, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 9 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 14 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Négy kötött (x_1, x_3, x_4, x_5) és négy szabad ismeretlen van (x_2, x_6, x_7, x_8), az U_A altér dimenziója $n - r(A) = 8 - 4 = 4$. A HLER egy fundamentális megoldásrendszere:

$$\begin{array}{lll} x_2 = 1, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0 & \rightsquigarrow & v_1 = (-1, \mathbf{1}, 0, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ x_2 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 0 & \rightsquigarrow & v_2 = (11, \mathbf{0}, 0, -2, -14, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 0 & \rightsquigarrow & v_3 = (1, \mathbf{0}, 0, 0, -5, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), \\ x_2 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 1 & \rightsquigarrow & v_4 = (3, \mathbf{0}, -2, -1, -6, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}). \end{array}$$

7.110. Példa. Legyen $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, és $A\mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszer. Ekkor a következők teljesülnek:
- Az egyenletrendszer 4 egyenletből áll, és 5 ismeretlenes.
- Az egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben, tehát a megoldásaltér (U_A) legfeljebb 5 dimenziós.
- A megoldásaltér bázisa legfeljebb 5 elemű.
- Mivel a HLER kevesebb egyenletet tartalmaz, mint ismeretlent, mindig lesz szabad ismeretlen.
- Ha $r(A) = 3$, akkor 3 kötött ismeretlen van.
- Ha $r(A) = 3$, akkor 2 szabad ismeretlen van, így a megoldásaltér bázisa 2 elemű, azaz U_A 2 dimenziós.

7.111. Megjegyzés. Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $|A| \neq 0$, akkor $r(A) = n$. Ebben az esetben az $A\mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ HLER esetén minden ismeretlen kötött, tehát egyetlen megoldása a $\underline{0}$ vektor.

7.112. Példa. Legyen $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, és $A\mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ homogén lineáris egyenletrendszer. Ekkor a következők teljesülnek:
- Ha $|A| \neq 0$, akkor csak triviális megoldása van az egyenletrendszernek.
- Ha $|A| \neq 0$, akkor nincs szabad ismeretlen.
- Ha $|A| \neq 0$, akkor a megoldásaltér 0 dimenziós.
- Ha $|A| \neq 0$, akkor a megoldásaltér 1 elemű.
- Ha $|A| = 0$, akkor van szabad ismeretlen.
- Ha $|A| = 0$, akkor a megoldásaltér legalább 1 dimenziós.
- Ha $|A| = 0$, akkor a megoldásaltér bázisa legalább 1 elemű.

7.12.2. Alterek megadása

7.113. Tétel. Legyen U altér a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben. Ekkor vannak olyan $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorok, amelyekre $U = [v_1, \dots, v_k]$ teljesül.

7.114. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -3 \\ -6 & 6 & -6 & -3 \\ 8 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Ekkor U_A altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, amelynek fundamentális megoldásrendszere a $v_1 = (13/18, -5/5, -37/18, 1)$ vektorrendszer, ezért $U_A = [v_1]$.

7.115. Tétel. Legyen U altér a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben. Ekkor van olyan m természetes szám és $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, hogy $U = U_A$.

7.116. Példa. Legyen $U = \{(a, b, c, d) \mid a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\}$. Ekkor U altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérben és

$$\begin{aligned} U &= \{(a, b, c, d) \mid a = b - 2c \text{ és } c = d - a + b\} \\ &= \{(a, b, c, d) \mid a - b + 2c = 0 \text{ és } a - b + c - d = 0\} = U_A, \end{aligned}$$

ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.13. Sajátérték, sajátvektor

Videó: Sajátértékek és sajátvektorok

7.117. Definíció (mátrix sajátértéke)**.** Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az A $(n \times n)$-es valós mátrixnak **sajátértéke** a λ valós szám, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \underline{0}$ vektor, melyre $A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T$ teljesül ($\rightsquigarrow$ v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor).

7.118. Definíció (mátrix sajátvektora)**.** Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az A $(n \times n)$-es valós mátrixnak **sajátvektora** a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, ha van olyan λ valós szám, melyre $A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T$ teljesül ($\rightsquigarrow$ v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor).

7.119. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, ekkor

- a $\lambda = 3$ valós szám sajátértéke A-nak, mivel a $v = (0, -1, 1)$ vektorra

  $$A \cdot v^T = A \cdot (0, -1, 1)^T = (0, -3, 3)^T = 3 \cdot (0, -1, 1)^T = 3 \cdot v^T$$

  teljesül.
- a $v = (2, -3, 2)$ vektor sajátvektora A-nak, mivel

  $$A \cdot v^T = A \cdot (2, -3, 2)^T = (2, -3, 2)^T = 1 \cdot (2, -3, 2)^T = 1 \cdot v^T.$$

  A v vektor a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozik.

7.120. Megjegyzés (a sajátértékek meghatározása)**.** Tegyük fel, hogy a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor sajátvektora az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, mégpedig a $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Ekkor

$$A \cdot v^T = \lambda \cdot v^T \iff A \cdot v^T = \lambda \cdot E_n \cdot v^T \iff (A - \lambda \cdot E_n) \cdot v^T = \underline{0}^T.$$

Ez azt jelenti, hogy v **nemtriviális** megoldása az $(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ HLER-nek. Ha $|A - \lambda \cdot E_n| \neq 0$ teljesülne, akkor (a Cramer-szabály következtében) a HLER-nek pontosan egy megoldása lenne, a triviális ($\mathbf{x} = \underline{0}$). Így az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix determinánsa 0.

7.121. Tétel. Az A mátrixnak a λ valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha $|A - \lambda \cdot E_n| = 0$.

7.122. Definíció (karakterisztikus polinom)**.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A $p_A = |A - x \cdot E_n|$ polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

7.123. Tétel (sajátértékek és a karakterisztikus polinom)**.** A λ valós szám pontosan akkor sajátértéke az A valós négyzetes mátrixnak, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

7.124. Példa. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

Az A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_A = |A - x \cdot E_2| = \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 35 - x & 45 \\ -6 & 2 - x \end{vmatrix} = x^2 - 37x + 340.$$

Az $x^2 - 37x + 340 = 0$ egyenlet megoldásai: 20 és 17. Így A sajátértékei: $\lambda_1 = 20$ és $\lambda_2 = 17$.

7.125. Példa. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

Az A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$p_A = |A - x \cdot E_2| = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

Az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása, ezért az A mátrixnak nincsenek valós sajátértékei.

7.126. Megjegyzés. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja n-ed fokú polinom, így legfeljebb n valós sajátértéke van A-nak.

7.127. Definíció (sajátaltér)**.** Valós mátrix adott sajátértékhez tartozó sajátvektorai a zérusvektorral együtt alteret alkotnak. Ezen altér az adott sajátértékhez tartozó **sajátaltér**. A λ sajátértékhez tartozó sajátalteret U_λ jelöli.

7.128. Tétel (sajátaltér bázisa)**.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisa éppen az $(A - \lambda \cdot E)\mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ HLER egy fundamentális megoldásrendszere.

7.129. Példa. Adjuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékéhez tartozó sajátalterét.

- Az A mátrix karakterisztikus polinomja: $p_A = |A - x \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 2 - x & 5 & 5 \\ 0 & 3 - x & 1 \\ 0 & -2 & 0 - x \end{vmatrix} = -(x-2)^2(x-1).$
- Az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 1$.
- Az U_{λ_1}, azaz a $\lambda_1 = 2$-höz tartozó sajátaltér meghatározása.

Az U_{λ_1} sajátaltér meghatározása. Meg kell oldani az $(A - \lambda_1 \cdot E_3) \cdot \mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ HLER-t, melynek mátrixa

$$A - \lambda_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A megoldások altere a $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér. Mivel a lépcsős alakból leolvasható, hogy $x_2 = -x_3$, és x_1, x_3 szabad ismeretlenek, így:

$$U_{\lambda_1} = \{(x_1, -x_3, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

melynek egy bázisa az $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ vektorrendszer.

7.130. Megjegyzés. VIGYÁZAT: $\underline{0} \in U_{\lambda_1}$, de $\underline{0}$ nem sajátvektor!

7.13.1. Munkanélküliségi ráta és a sajátvektorok

A következő példában a sajátérték-sajátvektor fogalom segítségével határozzuk meg a 1.17. Példában szereplő munkaerő-állomány eloszlásának egyensúlyi helyzetét.

7.131. Példa. Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet a következő mátrix írja le (1 éves időtávon):

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

A mátrix alapján egy év alatt a dolgozók 80%-a dolgozó marad, 20%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 60%-a talál munkát és 40%-a marad munkanélküli. Van-e olyan munkanélküliségi ráta, ami nem változik? Azaz találunk-e olyan v vektort, amelyre $Av^T = v^T$, ahol v első komponense a dolgozók szám, második komponense pedig a munkanélkülieké. Tehát először vizsgáljuk, hogy $\lambda = 1$ sajátértéke-e A-nak, ha igen, akkor meg kell adnunk az U_λ sajátalteret. Mivel $|A - 1 \cdot E_2| = \begin{vmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.6 \end{vmatrix} = 0$, így $\lambda = 1$ sajátérték.

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A lépcsős alakból leolvasható, hogy $x_1 = 3x_2$, így: $U_\lambda = \{(3x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$. Tehát az egyensúlyi helyzet esetén a munkanélküliségi ráta: $\frac{x_2}{3x_2+x_2} = \frac{1}{4} = 25\%$.

7.13.2. Leontief modell és a sajátértékek

A 6.11. Tételt bővíthetjük egy ekvivalens feltétellel a sajátérétkek vizsgálatának segítségével.

7.132. Tétel. Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek n ágazata van ($n \in \mathbb{N}$), valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n \times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor az $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ egyenletnek akkor és csak akkor van tetszőleges $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ megoldása, ha a következő ekvivalens feltételek valamelyike teljesül:

- $(E - C)^{-1}$ létezik, minden eleme nemnegatív, és $C^m \to 0$, ha $m \to \infty$.
- C minden sajátértékének abszolútértéke kisebb, mint 1.

Mivel az $\mathbf{x} = C\mathbf{x}+\mathbf{d}$ egyenlet megoldhatóságából következik a gazdaság működőképessége (ld. 6.12. Definíció), így a mátrix sajátértékei alapján is meghatározható a működőképesség.

8. Kvadratikus alakok

Videó: Kvadratikus alakok I.

8.1. Definíció (kvadratikus alakok)**.** A homogén másodfokú többváltozós polinomok által definiált polinomfüggvényeket **kvadratikus alakoknak** nevezzük.

8.2. Példa. Kvadratikus alakok:

$$\begin{aligned}
x_1^2, &\quad q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q(x_1) = x_1^2,\\
-x_1^2 - x_3^2, &\quad q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_3^2,\\
x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3, &\quad q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3,\\
x_1x_2 + x_2x_3, &\quad q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3.
\end{aligned}$$

Az alábbi polinomok nem definiálnak kvadratikus alakokat: x_1^3, $\quad -x_1^2 - x_3$, $\quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + 3x_1x_3$.

8.3. Példa. Tekintsük az $x_1^2+x_2^2-3x_1x_3$ 3-változós homogén másodfokú polinomot. A hozzá tartozó kvadratikus alak:

$$q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3.$$

Pl.: ha $v = (1,2,3)$, akkor $q(v) = 1^2 + 2^2 - 3\cdot 1\cdot 3 = -4$.

8.4. Megjegyzés. (a) A q n-változós kvadratikus alak $\mathbb{R}^n$-beli vektorokhoz valós számokat rendel.
(b) Az n-változós homogén másodfokú polinomok általános alakja:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1^2 & + & 2a_{1,2}x_1x_2 & + & 2a_{1,3}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1,n}x_1x_n\\
 & + & a_{2,2}x_2^2 & + & 2a_{2,3}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2,n}x_2x_n\\
 & & & + & a_{3,3}x_3^2 & + & \cdots & + & 2a_{3,n}x_3x_n\\
 & & & & & & & & \vdots\\
 & & & & & & & + & a_{n,n}x_n^2
\end{array}$$

azaz

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2a_{j,k}x_jx_k.$$

8.5. Definíció (kvadratikus alak mátrixa)**.** A $\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2a_{j,k}x_jx_k$ polinomhoz tartozó

$$q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2a_{j,k}x_jx_k$$

kvadratikus alak mátrixa az $A_q = (a_{i,j})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, ahol $a_{k,j} = a_{j,k}$ $(1 \leqslant j < k \leqslant n)$.

8.6. Példa. Legyen $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_3$. Ekkor q mátrixa:

$$A_q = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0\\ 3/2 & 2 & 5/2\\ 0 & 5/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

8.7. Megjegyzés. *Kvadratikus alak mátrixa mindig szimmetrikus mátrix.*

8.8. Tétel. (a) Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (n-változós) kvadratikus alak, melynek mátrixa $A_q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ekkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$q(v) = v \cdot A_q \cdot v^T$$

teljesül.

(b) Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixra a $q_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ v \mapsto v \cdot A \cdot v^T$ leképezés kvadratikus alak, melynek mátrixa A.

(c) Ha az A és B ($n \times n$)-es szimmetrikus mátrixok különbözőek, akkor $q_A \neq q_B$.

8.9. Példa. Legyen $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2$. Ekkor q mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

és

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A_q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ha $v = (3, 1, 4)^T$, akkor

$$7{-}q(v) = \underbrace{(3,1,4)\cdot A_q}_{(21,4,-7)} \cdot (3,1,4)^T 8{-}{=}\ (21, 4, -7)\cdot(3,1,4)^T = 39.$$

8.1. Kanonikus alak

8.10. Definíció (majdnem kanonikus alak)**.** A $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 2a_{j,k}x_jx_k$ kvadratikus alak **majdnem kanonikus alakú**, ha $a_{j,k} = 0$ ($1 \leqslant j < k \leqslant n$).

8.11. Tétel. A q kvadratikus alak pontosan akkor majdnem kanonikus alakú, ha mátrixa diagonális.

8.12. Példa. A

$$-2x_1^2, \quad 2x_1^2 + 3x_2^2, \quad 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2, \quad x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

kvadratikus alakok majdnem kanonikus alakúak.

8.13. Definíció (szimmetrizált elemi átalakítások)**.** Az A szimmetrikus mátrix **szimmetrizált elemi átalakításai** az alábbiak:

1. az A mátrix i-edik és j-edik sorának cseréje, majd az A mátrix i-edik és j-edik oszlopának cseréje,
2. az A mátrix i-edik sorát szorozzuk egy $c \neq 0$ valós számmal, majd az A mátrix i-edik oszlopának szorzása a c számmal,
3. az A mátrix i-edik sorának c-szeresét hozzáadjuk a j-edik sorához, majd az A mátrix i-edik oszlopának c-szeresét hozzáadjuk a j-edik oszlopához ($c \in \mathbb{R}$).

8.14. Tétel. Tetszőleges A szimmetrikus mátrix szimmetrizált elemi átalakításokkal diagonális alakra hozható úgy, hogy a diagonális mátrix főátlójában -1-esek, 1-esek és 0-ák vannak.

8.15. Példa. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Ekkor

$$A \underset{[2]+(-2)\times[1]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{[3]+(-3)\times[1]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \underset{[3]+(-1)\times[2]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \underset{1/\sqrt{6}\cdot[3]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

azaz $A \overset{\text{sz.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8.16. Tétel. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixok. Ha $A \overset{\text{sz.}}{\sim} B$, akkor q_A és q_B értékkészlete megegyezik, valamint ugyanannyi helyen veszik fel értékül a 0-át.

8.17. Megjegyzés. Ha a $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix diagonális, $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, ahol $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$, akkor a következő esetek lehetségesek:

(1) $a_1 = \cdots = a_n = 1$, ekkor
$$q_D = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$
$q(v) \geqslant 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \underline{0}$,

(2) $a_1 = \cdots = a_n = -1$, ekkor
$$q_D = -x_1^2 - \cdots - x_n^2,$$
$q(v) \leqslant 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \mathbf{0}$,

(3) $a_1 = \cdots = a_p = 1$, $a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$ $(0 \leqslant p < n)$, ekkor
$$q_D = x_1^2 + \cdots + x_p^2,$$
$q(v) \geqslant 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = (0, \ldots, 0, *, \ldots, *)$, ahol az első p komponens 0,

(4) $a_1 = \cdots = a_m = -1$, $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$ $(0 \leqslant m < n)$, ekkor
$$q_D = -x_1^2 - \cdots - x_m^2,$$
$q(v) \leqslant 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = (0, \ldots, 0, *, \ldots, *)$, ahol az első m komponens 0,

(5) $a_1 = \cdots = a_p = 1$, $a_{p+1} = \cdots = a_{p+m} = -1$, $a_{p+m+1} = \cdots = a_n = 0$ $(0 < p, m < n)$, ekkor
$$q_D = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+m}^2$$
és q értékkészlete $\mathbb{R}$.

8.18. Példa. A q kvadratikus mátrixa legyen $A_q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. A korábbi számolás alapján $A_q \overset{\text{sz.}}{\sim} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Az előző jelöléseket használva $p = 1$, $m = 2$, ezért q_D értékkészlete $\mathbb{R}$, tehát q_D, és így q is az (5) esethez tartozik.

Videó: Kvadratikus alakok II.

8.2. Kvadratikus alakok osztályozása

8.19. Definíció (kvadratikus alakok osztályozása)**.** Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak. Ekkor

1. q **pozitív definit**, ha $q(v) \geqslant 0$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \underline{0}$,
2. q **negatív definit**, ha $q(v) \leqslant 0$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \mathbf{0}$,
3. q **pozitív szemidefinit**, ha $q(v) \geqslant 0$ $(v \in \mathbb{R}^n)$, és van olyan $v \neq \underline{0}$, amelyre $q(v) = 0$,
4. q **negatív szemidefinit**, ha $q(v) \leqslant 0$ $(v \in \mathbb{R}^n)$, és van olyan $v \neq \underline{0}$, amelyre $q(v) = 0$,
5. q **indefinit**, ha q értékkészlete $\mathbb{R}$.

8.20. Tétel (Sylvester Tehetetlenségi Tétele)**.** (a) Tetszőleges $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak esetén q mátrixa szimmetrizált elemi átalakításokkal diagonális alakra hozható, sőt olyan $D \in \{-1, 0, 1\}^{n\times n}$ diagonális mátrix is van, amelyre $A_q \overset{\text{sz.}}{\sim} D$ teljesül.

(b) Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak. Ha $D_1, D_2 \in \{-1, 0, 1\}^{n\times n}$ olyan diagonális mátrixok, amelyekre $D_1 \overset{\text{sz.}}{\sim} A_q \overset{\text{sz.}}{\sim} D_2$ teljesül, akkor a D_1 és D_2 mátrixok főátlójában lévő (-1)-esek, 1-esek és 0-ák száma megegyezik.

8.21. Definíció (kanonikus alak)**.** Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak. Ekkor

$$A_q \overset{\text{sz.}}{\sim} D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

A $q_D = y_1^2 + \dots y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+m}^2$ kvadratikus alakot q **kanonikus alakjának** nevezzük.

8.22. Példa. Legyen $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$ kvadratikus alak. Ekkor q mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{sz.}}{\sim} \dots \overset{\text{sz.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így q kanonikus alakja: $y_1^2 + y_2^2$, azaz q pozitív szemidefinit.

8.23. Tétel (osztályozás kanonikus alakban)**.** Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak, melynek kanonikus alakja: $y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+m}^2$.

1. Ha $p = n$, akkor q pozitív definit.
2. Ha $p < n$ és $m = 0$, akkor q pozitív szemidefinit.
3. Ha $m = n$, akkor q negatív definit.
4. Ha $m < n$ és $p = 0$, akkor q negatív szemidefinit.
5. Ha $p, m > 0$, akkor q indefinit.

8.24. Tétel (kanonikus és majdnem kanonikus)**.** Legyen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak, melynek majdnem kanonikus alakja: $a_1y_1^2 + \dots + a_ny_n^2$. Ekkor q kanonikus alakja $y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+m}^2$, ahol $p = |\{i \mid a_i > 0\}|$ és $m = |\{i \mid a_i < 0\}|$.

8.25. Példa. Legyen q az a kvadratikus alak, amelynek mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$ $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$ és

$$A_q \underset{[1]+1\times[2]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{[2]+(-1/2)\times[1]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5/2 \\ 1 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{[3]+(-1/4)\times[2]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & -1/4 \end{pmatrix} \underset{[3]+(-5/2)\times[2]}{\overset{\text{sz.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Így q majdnem kanonikus alakja $4y_1^2 - y_2^2 + 6y_3^2$, aminek következtében q kanonikus alakja $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, azaz q indefinit.

8.26. Példa. Legyen q az a kvadratikus alak, amelynek mátrixa $A_q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Ekkor

$$q(0,1,1) = (0,1,1) \cdot A_q \cdot (0,1,1)^T = (5,-2,-2) \cdot (0,1,1)^T = -4,$$
$$q(1,1,0) = (1,1,0) \cdot A_q \cdot (1,1,0)^T = (2,2,1) \cdot (1,1,0)^T = 4,$$

így q indefinit.

8.3. Főminorok

8.27. Definíció (főminor)**.** Legyen $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ négyzetes mátrix. Ekkor A **főminorjainak** nevezzük az

$$|a_{1,1}|, \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinánsokat, azaz a mátrix „bal felső sarkában” elhelyezkedő aldeterminánsait.

8.28. Példa. Az $A = (i \cdot j - |i - j|)_{4\times 4}$ mátrix főminorjai:

$$|1| = 1, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 8, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 11 \\ 1 & 6 & 11 & 16 \end{vmatrix} = 20.$$

8.29. Tétel (főminorok és PDKA-k)**.** A q kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha A_q minden főminora pozitív.

8.30. Tétel (főminorok és NDKA-k)**.** A q kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha A_q főminorjai váltakozó előjelűek és az első főminor negatív.

8.31. Megjegyzés. Ha az A mátrix k-adik főminora d_k, akkor a $-A$ mátrix k-adik főminora $(-1)^k d_k$. Ha a q kvadratikus alak pozitív definit, akkor a $-q$ kvadratikus alak negatív definit, melynek mátrixa $-A$.

8.32. Példa. A $q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(u,x,y,z) \mapsto 16u^2 + 2ux + 12uy + 22uz + x^2 + 2xy + 2xz + 4y^2 + 10yz + 9z^2$ kvadratikus alak pozitív definit, mivel mátrixa $A_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 11 \\ 1 & 6 & 11 & 16 \end{pmatrix}$, melynek minden főminora pozitív. (Vö.: $q = (x+y+z+u)^2 + 3(y+8/6z+5/3u)^2 + 8/3(z+5/4u)^2 + 5/2u^2$.)

8.33. Példa. A $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z)^T \mapsto -x^2 - 2xy - 2y^2 - 2xz - 4yz - 3z^2$ kvadratikus alak negatív definit, mivel mátrixa $A_q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, melynek főminorai: -1, 1 és -1. (Vö.: $q = -(x+y+z)^2 - (y+z)^2 - z^2$.)

8.4. Leontief modell és a főminorok

A 7.132. Tételt (és így a 6.11 Tételt is) bővíthetjük újabb ekvivalens feltétellel a főminorok vizsgálatának segítségével.

8.34. Tétel. Legyen $\mathcal{G}$ olyan gazdaság, melynek n ágazata van ($n \in \mathbb{N}$), valamint legyen $C \in (\mathbb{R}_0^+)^{n\times n}$ a ráfordítási mátrixa e gazdaságnak. Ekkor az $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ egyenletnek akkor és csak akkor van tetszőleges $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ megoldása, ha a következő ekvivalens feltételek valamelyike teljesül:
- $(E - C)^{-1}$ létezik, minden eleme nemnegatív, és $C^m \to 0$, ha $m \to \infty$.
- C minden sajátértékének abszolútértéke kisebb, mint 1.
- Az $E - C$ mátix k. főminorai mind pozitívak tetszőleges $k = 1, \dots, n$ esetén.

Mivel az $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ egyenlet megoldhatóságából következik a gazdaság működőképessége (ld. 6.12. Definíció), így az $E - C$ mátrix főminorai alapján is eldönthető a működőképesség.

9. Operációkutatás/Lineáris programozás

Videó: Operációkutatás (bevezetés)

A gyakorlatban felmerülő konkrét problémák általában nem egyszerű lineáris egyenletrendszerekre vezetnek, hanem legtöbbször speciális feltételek is adottak:

- egyenletek helyett például egyenlőtlenségek szerepelhetnek,
- a változók általában nem negatívak.

Ráadásul legtöbbször nem az összes megoldást keressük, hanem egy bizonyos szempontból optimális megoldást. Ilyen problémák megoldásával foglalkozik az operációkutatás. Mi az operációkutatáson belül, a **lineáris programozással** megoldható feladatokkal fogunk foglalkozni.

9.1. Standard és LKA feladatok

9.1. Példa. Egy gyárban 3 féle terméket gyártanak: széket (S), asztalt (A), ajtót (J), melyekhez 2 féle nyersanyag szükséges: faforgács (F) és ragasztó (R). Az egyes termékekhez szükséges nyersanyagmennyiségeket az alábbi mátrix tartalmazza:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathrm{F} & \mathrm{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{S} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{J} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A cégnek a székeken 10 Ft, az asztalokon 4 Ft, az ajtókon pedig 3 Ft nyeresége van, míg a raktáraiban 100 egységnyi faforgácsa és 50 egységnyi ragasztója van. Melyik termékből mennyit állítson elő, hogy a profit maximális legyen?

A probléma az alábbi feladatra vezet: keressük azon x_1, x_2, x_3 valós számokat (most tekintsünk el attól, hogy egészeket keresünk, hiszen az x_i-k a termékek darabszámát jelölik), amelyekre:

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leqslant & 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leqslant & 50 \\ x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0 \end{array}$$

teljesül. Ezen $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ megoldások közül szeretnénk meghatározni egy olyat, amelyre a profit értéke,

$$10x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

maximális.

9.2. Definíció (alapfeladat)**.** A lineáris programozás az alábbi alakú problémákkal foglalkozik:

$$\begin{array}{rcccrcl} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leqslant (\geqslant) & b_1 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leqslant (\geqslant) & b_m \\ & & & & x_i & \leqslant (\geqslant) & c_i \ (i \in I) \\ & & & & x_j & & \in \mathbb{R} \ (j \in J) \\ \hline c_1x_1 & + & \dots & + & c_nx_n & \to & \min \ (\max) \end{array}$$

Azaz, lineáris egyenletek helyett (lineáris) egyenlőtlenségek szerepelnek, valamint némely változókra (x_i $(i \in I)$) alsó, illetve felső korlátok adottak, más változókra pedig nincs semmilyen korlát (x_j $(j \in J)$). Ezen kívül adott egy függvény (az úgynevezett **célfüggvény**), és olyan megoldást keresünk, amelyre az adott függvény minimális (maximális) értéket vesz fel.

Az Alapfeladat átalakítása. A probléma megoldásához először átalakítjuk a feltételeket, a következőképpen:
- *A jobboldali konstansok legyenek nemnegatívak.*
- *A többváltozós egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeljenek.*
- *MINDEN x_ℓ $(\ell \in I \cup J)$ változóra egy feltétel vonatkozzon csak: $x_\ell \geqslant 0$.*
- *A célfüggvényt minimalizálni kelljen (ne maximalizálni).*

Az átalakítások legtöbbször természetesen adódnak, nézzünk most néhány példát.

9.3. Példa. (a) Ha egy egyenlőtlenség jobb oldala negatív, szorozzuk meg (-1)-gyel:

$$x_1 - 2x_3 + x_3 \geqslant -3 \iff -x_1 + 2x_3 - x_3 \leqslant 3.$$

(b) Egyenlőtlenségeket új (nemnegatív) változók bevezetésével alakítsuk egyenletté:
- $x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 3 \iff x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$ $(x_4 \geqslant 0)$,
- $x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 3 \iff x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$ $(x_4 \geqslant 0)$.

(c) Korlát nélküli változókat helyettesítsük két nem negatív változó különbségével: $x_\ell = y_1 - y_2$ $(y_1, y_2 \geqslant 0)$.
(d) Ha a célfüggvényt maximalizálni kell, akkor szorozzuk meg (-1)-gyel: $10x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max \iff -10x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to \min$.

Ezen átalakítások előbb-utóbb véget érnek, vagyis ha valamit egy átalakítással kijavítunk, azzal nem rontunk el valami mást. Elvégezve a megfelelő átalakításokat, a feladat speciális alakú lesz: *standard feladat.*

9.4. Definíció (standard feladat)**.** Az alábbi alakú problémát nevezzük **standard feladatnak**:

$$\begin{array}{ccccccl}
a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & & & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
 & & & & x_\ell & \geqslant & 0\ (1 \leqslant i \leqslant n) \\
\hline
c_1x_1 & + & \dots & + & c_nx_n & \to & \min\ (\max)
\end{array}$$

ahol $b_1, \dots, b_m \geqslant 0$.

9.5. Megjegyzés. Standard feladat esetén
- MINDEN változóra nemnegativitási feltétel vonatkozik,
- a célfüggvényt MINIMALIZÁLJUK,
- a változókra vonatkozó nemnegativitási feltételek kivételével csak egyenletek szerepelnek, NEMNEGATÍV jobboldallal.

9.6. Definíció (lehetséges kanonikus alakú feladat)**.** Az alábbi alakú standard feladatokat hívjuk **lehetséges kanonikus alakú feladatoknak** (röviden LKAF):

$$\begin{array}{ccccccccl}
x_1 & + & a_{11}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{1n}x_{m+n} & = & b_1 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
x_m & + & a_{m1}x_{m+1} & + & \dots & + & a_{mn}x_{m+n} & = & b_m \\
 & & & & & & x_\ell & \geqslant & 0\ (1 \leqslant i \leqslant m+n) \\
\hline
 & & c_1x_{m+1} & + & \dots & + & c_nx_{m+n} & \to & \min\ (\max)
\end{array}$$

ahol $b_1, \dots, b_m \geqslant 0$.

9.7. Megjegyzés. Azaz a LKAF-ban minden egyenlethez tartozik egy változó, amely csak az adott egyenletben szerepel (még a célfüggvényben sem!), és az adott egyenletben az együtthatója 1, ezek az úgynevezett **kiemelt változók** vagy **bázisváltozók**.

9.8. Példa. A következő feladat lehetséges kanonikus alakú feladat:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
-2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & & - & 2x_6 & = & 3 \\
2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & - & 3x_6 & = & 4 \\
3x_1 & & & - & 3x_3 & & & + & x_5 & - & 2x_6 & = & 5 \\
 & & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geqslant & 0 \\
\hline
2x_1 & & & + & 3x_3 & & & + & 5x_6 & & & \to & \min
\end{array}$$

Ugyanis:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrl} x_2 & & & - & 2x_1 & - & 2x_3 & - & 2x_6 & = & 3 \\ & x_4 & & + & 2x_1 & + & x_3 & - & 3x_6 & = & 4 \\ & & x_5 & + & 3x_1 & - & 3x_3 & - & 2x_6 & = & 5 \\ & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6} & \geqslant & 0 \\ \hline & & & & 2x_1 & + & 3x_3 & + & 5x_6 & \to & \min \end{array}$$

kiemelt változók/bázisváltozók: x_2, x_4, x_5.

9.9. Megjegyzés. A LKAF egy fontos jellemzője, hogy könnyen leolvasható belőle az egyenletrendszer egy megoldása, az ún.**bázismegoldás**.

9.10. Definíció (bázismegoldás)**.** **Bázismegoldásnak** nevezzük a LKAF-ban foglalt egyenletrendszer azon megoldását, amikor a kiemelt változók/bázisváltozók az rendre a jobboldali konstansokkal egyenlők, a többi változó pedig 0 értéket vesz fel, azaz $x_i = b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ és $x_j = 0$ $(m+1 \leqslant j \leqslant m+n)$.

9.11. Példa. A 9.8. Példa esetén:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrl} x_2 & & & - & 2x_1 & - & 2x_3 & - & 2x_6 & = & 3 \\ & x_4 & & + & 2x_1 & + & x_3 & - & 3x_6 & = & 4 \\ & & x_5 & + & 3x_1 & - & 3x_3 & - & 2x_6 & = & 5 \\ & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6} & \geqslant & 0 \\ \hline & & & & 2x_1 & + & 3x_3 & + & 5x_6 & \to & \min \end{array}$$

a bázismegoldás: $x_2 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_1 = x_3 = x_6 = 0$.

9.2. A Szimplex algoritmus

A módszer lényege, hogy a lehetséges kanonikus alakú feladatokat elemi bázistranszformációk sorozatával oldjuk meg: első lépésként felírjuk a feladat **szimplex tábláját**. A táblázat sorai az egyenleteknek felelnek meg, a sorok címkéi most nem a bázis vektorok, hanem a kiemelt változók/bázisváltozók, a célfüggvény együtthatóit pedig egy külön sorba írjuk.

9.12. Példa. A 9.8. Példa szimplex táblája:

0.	x_1	x_3	x_6	**b**
x_2	-2	-2	-2	3
x_4	2	1	-3	4
x_5	3	-3	-2	5
z	2	3	5	0

A Szimplex algoritmus lényege, hogy a fenti táblázatban megfelelő generáló elemet választva egyre közelebb kerülünk az optimális megoldáshoz.

(Mikor ér véget az algoritmus?) Az szimplex algoritmus kétféle eredménnyel érhet véget:

1. Ha a célfüggvényben nincs negatív együttható, akkor a bázismegoldás optimális. A célfüggvény optimumának (-1)-szerese a jobb alsó sarokban szereplő szám.
2. Ha a célfüggvényben van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, akkor a célfüggvény alulról nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán, tehát bármilyen kis értéket felvehet.

A 9.8. Példa LKAF-a az 1. esetre példa.

9.13. Példa. Az

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ & & x_1, x_2 & \geqslant & 0 \\ \hline & - & x_2 & \to & \min \end{array}$$

LKAF esetén a célfüggvény alulról nem korlátos, tehát $z(x_1, x_2) = -x_2$ célfüggvény bármilyen kis értéket felvehet. A LKAF szimplex táblája:

0.	x_2	**b**
x_1	-1	0
z	-1	0

A célfüggvény negatív együtthatójú oszlopában nincs pozitív szám, így a 2. eset áll fenn.

A generáló elem kiválasztása többféleképpen történhet, a legegyszerűbb algoritmus:

- Ha a célfüggvénynek nincs negatív együtthatója, vagy van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, akkor az algoritmus véget ért (ld.: „az algoritmus vége”).
- Ha nem teljesülnek az előző feltételek, akkor van olyan negatív célfüggvény-együttható, melynek oszlopában szerepel pozitív szám:
  1. keressük meg ezen célfüggvény-együtthatók közül a legkisebbet,
  2. majd az oszlopában válasszuk azt a pozitív együtthatót generáló elemnek, melynek kiválasztása esetén a jobboldali konstansok egyike sem válik negatívvá, ehhez azt az elemet kell választani, ahol a konstans/együttható hányados a legkisebb lesz.

9.14. Példa.

0.	x_4	x_5	x_6	x_7	**b**	a $b_i/a_{i,j}$ arány
x_1	1	2	1	−1	3	3/1
x_2	−1	0	2	2	4	4/2
x_3	3	−1	3^*	1	5	5/3
z	−1	1	$\underline{-3}$	2	−2	

⇝ A −3 a legkisebb olyan negatív célfüggvény-együttható, amelynek oszlopában szerepel pozitív szám.

⇝ Az utolsó oszlop tartalmazza a konstans/együttható hányadosokat, ezek közül a 3-hoz tartozó hányados a legkisebb, így azt választjuk generáló elemnek.

⇝ Ha a −3 oszlopában más generáló elemet választottunk volna, akkor a konstans oszlopban a következő lépésben megjelennének negatív számok.

Generáló elemet addig kell választanunk, míg az algoritmus véget nem ér (ld.: „az algoritmus vége”).

9.15. Megjegyzés.

- Az algoritmus hibája az, hogy nem feltétlenül ér véget véges sok lépésben, szerencsére ez csak úgy fordulhat elő, hogy végtelen ciklusba kerülünk.
- A generáló elem kiválasztásának stratégiájával az algoritmus gyorsítható, valamint a végtelen is ciklusok elkerülhetők.

9.16. Példa. Oldjuk meg az

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & & + & x_3 & & & = & 3 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\
 & & & & & x_1, x_2, & x_3, x_4 & \geqslant & 0 \\
\hline
 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & \to & \min
\end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladatot szimplex algoritmus segítségével.

0.	x_3	x_4	**b**
x_1	14—*	0	3
x_2	2	2	8
z	$\underline{-2}$	−1	0

⇝

1.	x_1	x_4	**b**
x_3	1	0	3
x_2	−2	26—*	2
z	2	$\underline{-1}$	6

⇝

2.	x_1	x_2	**b**
x_3	1	0	3
x_4	−1	1/2	1
z	1	1/2	7

Nincs negatív célfüggvény-együttható, ezért a bázismegoldás: $\mathbf{x} = (0, 0, 3, 1)$ optimális, a célfüggvény értéke ezen a helyen: $z(\mathbf{x}) = -7$.

9.17. Példa. Oldjuk meg az

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & & & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\
 & & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 8 \\
 & & & & & x_1, x_2, & x_3, x_4 & \geqslant & 0 \\
\hline
 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & \to & \min
\end{array}$$

lehetséges kanonikus alakú feladatot szimplex algoritmus segítségével.

0.	x_3	x_4	**b**
x_1	14—*	−1	3
x_2	2	−3	8
z	$\underline{-2}$	−1	0

⇝

1.	x_1	x_4	**b**
x_3	1	−1	3
x_2	−2	−1	2
z	2	−3	6

Mivel a célfüggvényben van olyan negatív együttható, melynek oszlopában nincs pozitív szám, így a célfüggvény alulról nem korlátos, bármilyen kis értéket felvehet.

10. Tematika és ajánlott irodalom

A 10A103 kódú Lineáris algebra (közgazdászoknak) tárgy tematikája, valamint az előadáshoz és a gyakorlathoz ajánlott irodalmakat találja itt a kedves olvasó.

10.1. Tematika

Másod- és harmadrendű determinánsok. Az n-edrendű determináns bevezetése, a sor szerinti kifejtési tétel. A determinánsok elemi tulajdonságai, transzponálás, dualitási elv. Cramer-szabály.

Vektorterek. Lineáris függőség és függetlenség. Vektorrendszer rangja, vektortér bázisa, dimenziója. Mátrix rangja, rangszámtétel és következményei. Kronecker–Capelli-tétel.

Az általános lineáris egyenletrendszer megoldása. Gauss-elimináció, Cramer-szabályra való visszavezetés. Homogén lineáris egyenletrendszerek. Megoldástér, fundamentális rendszerek.

Bázisátmenet, elemi bázistranszformáció és alkalmazásai.

Műveletek mátrixokkal. A szorzatmátrix rangja, determinánsok szorzástétele. Inverzmátrix. Mátrix-egyenletek megoldása.

Sajátérték, sajátvektor.

Közgazdasági alkalmazás: ágazati kapcsolatok mérlege.

Lineáris algebrai előkészület az operációkutatás későbbi tanulásához.

Kvadratikus alakok. Kanonikus alak, kvadratikus alakok osztályozása, pozitív definit, pozitív szemidefinit, indefinit alakok.

10.2. Ajánlott irodalom

- **Megyesi László**: *Lineáris algebra*, Polygon (2007)
- **Megyesi László**: *Lineáris algebrai feladatok*, SZTE jegyzet (1999)