
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A104

6. FELADATSOR

SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR, KVADRATIKUS ALAKOK

6.1. Feladat. Adjunk meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterében.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\ \text{(d)} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

6.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{(b)} \quad & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; & \text{(c)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \\ \text{(d)} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; & \text{(e)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -1 & -6 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}; & \text{(f)} \quad & \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.3. Feladat. Adjunk meg az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében bázist.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 1; & \text{(b)} \quad & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 2; \\ \text{(c)} \quad & A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \lambda = -1; & \text{(d)} \quad & A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 2. \end{aligned}$$

6.4. Feladat. Sajátvektora-e a v vektor az A mátrixnak?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & v = (3, 4), A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}; & \text{(b)} \quad & v = (0, 0), A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}; \\ \text{(c)} \quad & v = (5, 4, 4), A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -4 \\ -4 & 0 & 9 \\ -4 & 9 & 0 \end{pmatrix}; & \text{(d)} \quad & v = (9, -5, 8), A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -4 \\ -4 & 0 & 9 \\ -4 & 9 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.5. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra a V vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozzuk meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & V = \mathbb{R}^2, \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2; & \text{(b)} \quad & V = \mathbb{R}^2, \quad -4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2; \\ \text{(c)} \quad & V = \mathbb{R}^3, \quad 8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3; & \text{(d)} \quad & V = \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3; \\ \text{(e)} \quad & V = \mathbb{R}^3, \quad 2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3; & \text{(f)} \quad & V = \mathbb{R}^4, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4. \end{aligned}$$

6.6. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

- (a) Ha egy $(n \times n)$ -es mátrix determinánsa 1, akkor a rangja n .
- (b) Ha egy $(n \times n)$ -es mátrix determinánsa 0, akkor a rangja $n - 1$.
- (c) Ha egy $(k \times l)$ -es mátrix két sora arányos, akkor a rangja nem lehet k .
- (d) Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, melynek nincs megoldása.
- (e) Ha egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterére 5 dimenziós, akkor az egyenletrendszer legalább 5 ismeretlent tartalmaz.

- (f) Ha egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere 5 dimenziós, akkor az egyenletrendszer legalább 5 egyenletből áll.
- (g) Ha egy homogén lineáris egyenletrendszernek több változója van, mint egyenlete, akkor a megoldástere legalább 1 dimenziós.
- (h) Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az 1.
- (i) A $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátvektora a $(-1, 1, 1)$.
- (j) Ha u és v egy A mátrix sajátvektorai, akkor $u + v$ is.
- (k) Ha λ és ν sajátértékei egy A mátrixnak, akkor $\lambda + \nu$ is sajátértéke A -nak.
- (l) Ha egy kvadratikus alak mátrixának főminorai rendre -1 , -3 és -5 , akkor a kvadratikus alak negatív definit.
- (ly) Ha egy kvadratikus alak mátrixának sajátértéke az 1, akkor a kvadratikus alak pozitív definit.

A 6.7-18. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

6.7. Feladat. Egy homogén lineáris egyenletrendszernek ...

- (a) pontosan akkor van megoldása, ha az együtthatómátrixának determinánsa nem nulla.
- (b) pontosan akkor van megoldása, ha az együtthatómátrixának determinánsa nulla.
- (c) mindig van megoldása.
- (d) mindig pontosan egy megoldása van.

6.8. Feladat. Tekintsünk egy n -változós homogén lineáris egyenletrendszert, amely megoldásainak altere két dimenziós. Vegyünk egy v_1, v_2 lineárisan független vektorrendszert a megoldásainak alterében. Ekkor az u vektor pontosan akkor megoldása az egyenletrendszernek, ha u ...

- (a) skalárszorosa vagy a v_1 , vagy a v_2 vektornak.
- (b) összege a v_1 és v_2 vektoroknak.
- (c) a zérusvektorral egyenlő, azaz v_1 és v_2 egymás ellentettje.
- (d) tetszőleges lineáris kombinációja a v_1 és v_2 vektoroknak.

6.9. Feladat. Tekintsünk egy n -változós homogén lineáris egyenletrendszert, és legyen az együtthatómátrixának rangja r . Ekkor az egyenletrendszer megoldásterének dimenziója ...

- (a) mindig kisebb, mint r .
- (b) mindig nagyobb, mint r .
- (c) pontosan r .
- (d) pontosan $n - r$.

6.10. Feladat. Egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere ...

- (a) mindig tartalmazza a zérusvektort.
- (b) sohasem tartalmazza a zérusvektort.
- (c) kizárólag a zérusvektorból áll.
- (d) mindig tartalmaz a zérusvektortól különböző elemet.

6.11. Feladat.

- (a) Egy négyzetes mátrixnak mindig van legalább egy sajátértéke a valós számok között.
- (b) Ha egy négyzetes mátrixnak van legalább egy sajátértéke a valós számok között, akkor van több is.
- (c) Ha egy mátrixnak van sajátértéke a valós számok között, akkor az csak négyzetes mátrix lehet.
- (d) Ha egy mátrixnak nincs sajátértéke a valós számok között, akkor az nem lehet négyzetes mátrix.

6.12. Feladat.

- (a) Egy mátrix karakterisztikus polinomjának mindig van a valós számok körében gyöke.
- (b) Ha egy mátrix karakterisztikus polinomjának van legalább egy gyöke, akkor van több is.
- (c) Egy mátrix karakterisztikus polinomjának mindig van egynél több gyöke.
- (d) A fenti három állítás mindegyike hamis.

6.13. Feladat. Egy mátrix adott λ sajátértékéhez tartozó sajátaltere ...

- (a) kizárólag az ugyanehhez a sajátértékhez tartozó összes sajátvektorból áll.
- (b) tartalmazza az ugyanehhez a sajátértékhez tartozó összes sajátvektort.
- (c) nem tartalmazza az ugyanehhez a sajátértékhez tartozó összes sajátvektort.
- (d) tartalmazza a mátrix összes sajátértékéhez tartozó összes sajátvektort.

6.14. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének dimenziója ...

- (a) lehet nagyobb, mint 3.
- (b) mindig pontosan 3.
- (c) lehet kisebb, mint 3.
- (d) pontosan akkor lehet 3, ha van a λ sajátértékhez tartozó 3 különböző sajátvektor.

6.15. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterének dimenziója ...

- (a) mindig pontosan n .
- (b) lehet, hogy kisebb, mint n , de nagyobb, mint az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix rangja.
- (c) egyenlő az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix rangjával.
- (d) lehet kisebb, mint az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix rangja.

6.16. Feladat. Egy n -változós kvadratikus alak kanonikus alakjában ...

- (a) csak másodfokú tagok vannak, a tagok száma mindig pontosan n .
- (b) csak másodfokú tagok vannak, a tagok száma mindig kisebb, mint n .
- (c) csak másodfokú tagok vannak, a tagok száma legfeljebb n .
- (d) van elsőfokú tag, ha a kvadratikus alak szemidefinit.

6.17. Feladat. Egy kvadratikus alak mátrixa ...

- (a) transzponáláskor nem változik.
- (b) ha tartalmaz nullát, akkor a kvadratikus alak szemidefinit.
- (c) felső trianguláris mátrix, ha a kvadratikus alak pozitív definit.
- (d) mindig diagonális mátrix.

6.18. Feladat.

- (a) Negatív definit kvadratikus alak minden főminora negatív.
- (b) Pozitív definit kvadratikus alak minden főminora pozitív.
- (c) Pozitív definit kvadratikus alak főminorai felvehetnek pozitív és negatív értékeket is.
- (d) A fenti három állítás mindegyike hamis.

[■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■]

NEHEZEBB FELADATOK

6.19. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 - 14x_3 = a \end{cases}$$

6.20. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 + ax_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 5 \end{cases}$$

6.21. Feladat. Melyek igazak a következő állítások közül tetszőleges m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre? Ha nem teljesül az állítás, adjunk ellenpéldát.

- (a) Ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.

- (b) Ha $n = m$, akkor pontosan egy megoldás van.
- (c) Ha pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
- (d) Ha $n < m$, akkor nincs megoldás.
- (e) Ha $m < n$, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
- (f) Ha $n = m$ és végtelen sok megoldás van, akkor az együtthatókból álló determináns 0.
- (g) Ha $n = m$ és az együtthatókból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

6.22. Feladat. Adjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a valós paraméter értékét úgy, hogy a megoldástér dimenziója 3 legyen, valamint ekkor adjunk is meg bázist a megoldástérben.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - ax_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

6.23. Feladat. Adjuk meg az a paraméter összes olyan értékét, melyekre az alábbi mátrixnak a λ valós szám **nem** sajátértéke.

(a) $\begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ a+2 & a \end{pmatrix}, \lambda = -2;$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 2.$

6.24. Feladat. Adjunk meg olyan, 0-t nem tartalmazó mátrixot, melynek $(1, -1, 3)$ sajátvektora.

6.25. Feladat. Adjunk meg olyan, 0-t nem tartalmazó (3×3) -as mátrixot, melynek -3 sajátértéke.

6.26. Feladat. Adjunk meg olyan, 0-t nem tartalmazó mátrixot, melynek $(1, -1, 3)$ és $(2, 1, -1)$ sajátvektorai.

6.27. Feladat. Az a valós paraméter milyen értékei esetén sajátvektora a $v = (1, -1, a)$ vektor az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

mátrixnak?
