
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A104

5. FELADATSOR

VEKTORTÉR, ALTÉR, GENERÁLÁS, LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG, BÁZIS

5.1. Feladat. Állapítsuk meg, hogy az alábbi részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

- (a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$; (b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1x_2 + x_3 = 0\}$; (d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ és } x_2 = 0\}$; (f) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 0\}$;
(g) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

MEGOLDÁS. (a) altér; (b) nem altér; (c) nem altér; (d) nem altér; (e) altér; (f) altér; (g) nem altér.

↪ **videók:** [5.1\(a\)](#), [5.1\(b\)](#)

5.2. Feladat. Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének. Amennyiben $v \in U$, akkor állítsuk elő a v vektort az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.

- (a) $v = (1, -1, 1)$, $U = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$; (b) $v = (1, 1, 1)$, $U = [(1, -1, 2), (1, 0, 1)]$;
(c) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$; (d) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

MEGOLDÁS. (a) igen, $v = 1 \cdot (1, -1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1)$; (b) nem; (c) igen, $v = 1 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1) + 0 \cdot (1, 0, 1)$; (d) nem.

↪ **videó:** [5.2\(c\)\(d\)](#)

↪ **pdf fájl:** [5.2\(c\)\(d\)](#)

5.3. Feladat. A rang meghatározása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az adott vektortérben.

- (a) $(1, 2, -3)$, $V = \mathbb{R}^3$; (b) $(1, -1, 1), (0, 0, 0)$, $V = \mathbb{R}^3$; (c) $(2, 4, -2), (3, 6, -3)$, $V = \mathbb{R}^3$;
(d) $(1, 1, 2), (1, 1, 3)$, $V = \mathbb{R}^3$; (e) $(1, 2), (1, 3)$, $V = \mathbb{R}^2$.

MEGOLDÁS.

	Linárisan független	Generátorrendszer	Bázis
(a)	igen	nem	nem
(b)	nem	nem	nem
(c)	nem	nem	nem
(d)	igen	nem	nem
(e)	igen	igen	igen

↪ **pdf fájl:** [5.3\(c\)\(e\)](#)

5.4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját, és döntsük el, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

- (a) $(1, -1, 1, 2), (1, 2, 1, 2), (-1, 0, 1, -2), (1, 3, 5, 2)$;
(b) $(1, -1, 2, -1), (2, 2, 1, 0), (3, 1, 3, -1), (1, 7, -4, 3)$;
(c) $(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 1)$;
(d) $(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 0)$;
(e) $(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)$;
(f) $(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (-1, 2, 1, 1), (0, 3, -1, 4), (1, 4, 0, 4)$;
(g) $(-1, 3, 1, 2), (-8, 3, 1, -2), (2, 6, 2, 11), (-2, 3, 1, 1)$;

(h) $(5, -2, -8, 4), (3, 1, 1, -2), (6, 1, -1, -4), (3, 3, 7, 1)$.

MEGOLDÁS.

	Rang	Linárisan független	Generátorrendszer	Bázis
(a)	3	nem	nem	nem
(b)	2	nem	nem	nem
(c)	3	igen	nem	nem
(d)	2	nem	nem	nem
(e)	4	nem	igen	nem
(f)	3	nem	nem	nem
(g)	3	nem	nem	nem
(h)	4	igen	igen	igen

↪ videók: [5.4\(a\)](#), [5.4\(g\)](#)

↪ pdf fájl: [5.4\(c\)\(e\)\(h\)](#)

5.5. Feladat. Az α paraméter függvényében döntsük el az alábbi vektorrendszerről, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

- (a) $(1, -4, 3, 2), (-1, 4, -2, -4), (3, -12, \alpha, 10)$;
- (b) $(1, -1, 2), (2, -1, -1), (1, 0, \alpha^2), (2, -1, \alpha + 4)$;
- (c) $(1, 2, 1, 2), (-1, -1, 0, -1), (2, -1, \alpha^2, \alpha + 4)$;
- (d) $(1, 2, -1, -1), (-1, -1, 3, 3), (2, 5, \alpha, \alpha), (1, 0, \alpha^2 - \alpha - 5, -5)$;
- (e) $(1, -1, 2), (2, -1, -1), (1, 0, \alpha^2), (2, -1, \alpha + 4)$.

MEGOLDÁS. (a) Ha $\alpha = 7$, akkor lineárisan függő, egyébként lineárisan független, de nem generátorrendszer, így bázis sem lehet.

(b) A vektorrendszer minden α valós számra lineárisan függő, generátorrendszer, így nem bázis.

(c) A vektorrendszer minden α valós számra lineárisan független, de nem generátorrendszer, így bázis sem lehet.

(d) Ha $\alpha \neq 0, 1$, akkor vektorrendszer bázis, azaz lineárisan független generátorrendszer. Ha $\alpha \in \{0, 1\}$, akkor nem lineárisan független, nem generátorrendszer és nem bázis.

(e) A vektorrendszer minden α valós számra generátorrendszer, de nem lineárisan független.

↪ videók: [5.5\(a\)](#), [5.5\(d\)](#)

↪ pdf fájl: [5.5\(a\)](#)

5.6. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér V alterének dimenzióját, valamint adjunk meg benne bázist.

- (a) $V = [(1, -1, 1, 2), (1, 2, 1, 2), (-1, 0, 1, -2), (1, 3, 5, 2)]$;
- (b) $V = [(1, -1, 2, -1), (2, 2, 1, 0), (3, 1, 3, -1), (1, 7, -4, 3)]$;
- (c) $V = [(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 1)]$;
- (d) $V = [(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 0)]$;
- (e) $V = [(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)]$;
- (f) $V = [(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (-1, 2, 1, 1), (0, 3, -1, 4), (1, 4, 0, 4)]$.

MEGOLDÁS. (a) $\dim(V) = 3$, bázis V -ben: $(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$;

(b) $\dim(V) = 2$, bázis V -ben: $(1, 0, 5/4, -1/2), (0, 1, -3/4, 1/2)$;

(c) $\dim(V) = 3$, bázis V -ben: $(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)$;

(d) $\dim(V) = 2$, bázis V -ben: $(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, 1)$;

(e) $\dim(V) = 4$, bázis V -ben: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$;

(f) $\dim(V) = 3$, bázis V -ben: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)$.

↪ videó: [5.6\(d\)](#)

↪ pdf fájl: [5.6\(a\)\(e\)](#)

5.7. Feladat. Adjuk meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban.

- (a) $v = (0, 0, 0)$, bázis: $(3, -2, 1), (-2, 5, 7), (2, 1, 2)$;
 (b) $v = (1, -1, 2)$, bázis: $(1, 2, 3), (-1, 1, -2), (0, 2, 1)$;
 (c) $v = (2, 1, -1)$, bázis: $(-4, -2, 2), (1, 2, 4), (-1, 3, 9)$;
 (d) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, -1, 3), (2, -1, 4), (3, -1, 4)$;
 (e) $v = (6, 12, -2)$, bázis: $(3, 5, -7), (-5, -3, 7), (7, 3, 5)$;
 (f) $v = (1, 1, 1)$, bázis: $(4, 6, 7), (-3, 5, 7), (2, 5, 6)$.

MEGOLDÁS. A v vektor koordinátasora:

(a) $(0, 0, 0)$; (b) $(0, -1, 0)$; (c) $(-1/2, 0, 0)$; (d) $(3, -4, 2)$; (e) $(3, 2, 1)$; (f) $(-2/3, -1/3, 4/3)$.

↪ videó: **5.7(e)**

↪ pdf fájlok: **5.7(c)(d)**, **5.7(e)**

5.8. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánst.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

MEGOLDÁS. (a) a mátrix rangja 1, nem 0 értékű aldetermináns: (1) ;

(b) a mátrix rangja 2, nem 0 értékű aldetermináns: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) a mátrix rangja 3, nem 0 értékű aldetermináns: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

↪ videó: **5.8(a)(b)**

↪ pdf fájl: **5.8(a)(b)**

5.9. Feladat. Határozzuk meg a következő mátrix rangját az a valós paraméter függvényében:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 2a & -1 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

MEGOLDÁS. (a)

$$Az \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrix rangja} = \begin{cases} 2, & \text{ha } a = 3, \\ 3, & \text{különben.} \end{cases}$$

(b)

$$Az \begin{pmatrix} 2a & -1 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ mátrix rangja} = \begin{cases} 2, & \text{ha } a = 1, \\ 4, & \text{különben.} \end{cases}$$

↪ pdf fájl: **5.9(a)**

5.10. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

- (a) Ha egy vektortér valamely részhalmaza zárt az összeadásra, akkor az altér. **(Hamis)**
 (b) Bármely vektortér bármely altere zárt vektorok kivonására nézve. **(Igaz)**
 (c) Ha egy vektortérnek van 0 -tól különböző eleme, akkor végtelen sok eleme van. **(Igaz)**
 (d) Bármely vektortérnek van altere. **(Igaz)**
 (e) A $v_1, \dots, v_n$ vektorok bármely lineáris kombinációja eleme az általuk generált altérnek. **(Igaz)**

- (f) Bármely V vektortér és v_1, v_2, v_3 vektor esetén $v_1 + v_2 - v_3 \in [v_1, v_2, v_3]$. (Igaz)
- (g) Bármely V vektortér és v_1, v_2, v_3 vektor esetén $v_1 + v_2 - v_3 \in [v_1, v_2]$. (Hamis)
- (h) Ha egy vektorrendszer tartalmazza a $\underline{0}$ vektort, akkor lineárisan függő. (Igaz)
- (i) Lineárisan függő vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan függő. (Hamis)
- (j) Az egy vektorból álló vektorrendszerek mind lineárisan függetlenek. (Hamis)
- (k) $\mathbb{R}^5$ -ben bármely 6 tagú vektorrendszer lineárisan függő. (Igaz)
- (l) $\mathbb{R}^5$ -ben nincs 4 tagú generátorrendszer. (Igaz)
- (ly) $\mathbb{R}^n$ -beli vektorrendszer rangja mindig kisebb, vagy egyenlő, mint n . (Igaz)
- (m) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a rangja megegyezik az elemszámával. (Igaz)
- (n) Ha V -nek van n elemű bázisa, akkor nincs $n+1$ elemű lineárisan független vektorrendszere. (Igaz)
- (o) Ha V -ben van n elemű lineárisan független vektorrendszer, akkor a dimenziója n . (Hamis)
- (p) Ha V -ben van n elemű lineárisan független vektorrendszer, illetve n elemű generátorrendszer is, akkor n dimenziós. (Igaz)
- (q) Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú. (Igaz)
- (r) Legyen a V vektortérben a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független, az $u_1, \dots, u_n$ pedig generátorrendszer. Ekkor $k \leq n$. (Igaz)
- (s) Ha a V vektortér egy bázisa v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , és a v vektor koordinátasora ebben a bázisban $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$, akkor v tagja a bázisnak. (Igaz)
- (t) Az $\mathbb{R}^3$ vektortér $(1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, -1, 3)$ bázisában a $(2, -2, 5)$ vektor koordinátasora $(1 \ 0 \ 1)$. (Igaz)

Az 5.11-22. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

5.11. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ és $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0\}$ alterek $\mathbb{R}^3$ -ben, ekkor ...

- (a) $U \subseteq V$, de $U \not\subseteq V$ (b) $V \subseteq U$, de $V \not\subseteq U$ (c) $U \leq V$ (d) $V \leq U$

MEGOLDÁS. (d)

5.12. Feladat. Tetszőleges $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén ...

- (a) az u_1, u_2, u_3 vektorrendszer lineárisan független.
(b) az u_1 vektorrendszer lineárisan független.
(c) az u_1, u_2, u_3, u_4 vektorrendszer lineárisan függő.
(d) az u_1, u_2 vektorrendszer lineárisan függő.

MEGOLDÁS. (c)

5.13. Feladat. Az a, b, c, d paraméterek között legalább hány különböző értékűnek kell lennie, hogy az $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ vektorrendszer lineárisan független legyen?

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

MEGOLDÁS. (b)

5.14. Feladat. Tetszőleges $U \leq \mathbb{R}^3$ altér esetén, melyik állítás NEM teljesül?

- (a) $0 \in U$.
(b) Ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.
(c) Van olyan $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, amelyre $[u_1, u_2] = U$.
(d) Ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $[u_1, u_2] \subseteq U$.

MEGOLDÁS. (c)

5.15. Feladat. Tetszőleges $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokat írjuk be egy mátrix soraiba, majd a mátrixot hozzuk lépcsős alakra. A lépcsős alakú mátrix nemnulla sorait jelölje $v_1, \dots, v_j$.

- (a) Ha $j < k$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer lineárisan független.
(b) Ha $k = j$, akkor az $v_1, \dots, v_j$ vektorrendszer lineárisan függő.
(c) Ha $k > n$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$ bázisa.
(d) Az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer rangja j .

MEGOLDÁS. (d)

5.16. Feladat. Az alábbiak közül melyik halmaz nem egy 3-dimenziós vektortér?

- (a) $\mathbb{R}^3$
(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i = 0\}$
(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : (x_1 + x_2)(x_3 - x_4 + 2x_5) = 0\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 : (x_1 - x_2)^2 + (x_3 + 2x_4)^2 + (2x_5 + x_6)^2 = 0\}$

MEGOLDÁS. (c)

5.17. Feladat. Az alábbiak közül hány dimenziós nem lehet egy 3 különböző vektor által kifeszített vektortér?

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

MEGOLDÁS. (a)

5.18. Feladat. Egy $(n \times n)$ -es mátrix minden eleme 1. Legalább hány darab 1-est kell 0-ra cserélnünk, hogy a mátrix sorvektorai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkossák?

- (a) $n - 2$ (b) $n - 1$ (c) n (d) $n(n - 1)/2$

MEGOLDÁS. (b)

5.19. Feladat. Tudjuk, hogy $U, V \leq \mathbb{R}^n$, továbbá, hogy $U \cap V = \{0\}$, ekkor ...

- (a) $\dim U + \dim V \leq n$. (b) $\dim U + \dim V = n$.
(c) $\dim U + \dim V > n$. (d) az előzőek közül egyik sem biztos.

MEGOLDÁS. (a)

5.20. Feladat. Melyik állítás NEM teljesül?

- (a) Van olyan mátrix, amelynek rangja 0.
(b) Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor A rangja legfeljebb $\max(m, n)$.
(c) Nincs olyan $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, amelynek a rangja $\max(m, n)$.
(d) Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor A rangja legfeljebb $\min(m, n)$.

MEGOLDÁS. (c)

5.21. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sorvektorai alkotják az $U \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét. Az alábbiak közül melyik egyezik meg az U altér dimenziójával?

- (a) Az A mátrix determinánsa.
(b) Az A mátrix rangja.
(c) Az A mátrix nyoma (a főátlóban lévő elemek összege).
(d) Az előbbiek közül egyik sem.

MEGOLDÁS. (b)

5.22. Feladat. Ha a $v \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátasora az u_1, u_2, u_3 bázisban $(1, 0, 1)$, akkor ...

- (a) $v \in [u_1, u_2]$.
(b) az u_1, v, u_3 vektorrendszer is bázis.
(c) az u_1 koordinátasora a v, u_2, u_3 bázisban $(1, 0, -1)$.
(d) az u_1 koordinátasora a v, u_2, u_3 bázisban ugyanaz, mint a v, u_3, u_2 bázisban.

MEGOLDÁS. (c)

[■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■]

NEHEZEBB FELADATOK

5.23. Feladat. Legyen u, v, w három vektor egy vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

5.24. Feladat. Legyen

- (a) $U = [(1, -2, 1, -1), (-1, 1, 1, 1), (1, -3, 3, -1)]$, $V = [(-1, 0, 3, 1), (1, -4, 5, -1), (1, 3, -4, 2)]$;
(b) $U = [(1, -2, 1, -1), (-1, 1, 1, 1), (1, -3, 3, -1)]$, $V = [(-1, 0, 3, 1), (1, -4, 5, -1), (-2, 2, 2, 2)]$;

két altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek. Igaz-e, hogy $U = V$?

5.25. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ és $V = [(1, 2, 1)]$ altérek $\mathbb{R}^3$ -ban. Igaz-e, hogy $U = V$?

5.26. Feladat. Legyen

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 + x_4 = 0\},$$

$$V = [(1, 2, 4, -5), (2, 1, 3, -4)].$$

Igaz-e, hogy $U = V$?

5.27. Feladat. Döntsük el, hogy az a valós paraméter mely értékei esetén lesz eleme a $v_a = (-1, -3, a+1)$ vektor az $\mathbb{R}^3$ vektortér U altérének:

- (a) $U = [(1, 2, -a), (1, 1, 0), (1, a+2, -2)]$; (b) $U = [(1, -1, 1), (1, 0, 1-a), (-1, a+1, -2)]$.

5.28. Feladat. Hány maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánsa van az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixnak?
