
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A104

5. FELADATSOR

VEKTORTÉR, ALTÉR, GENERÁLÁS, LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG, BÁZIS

5.1. Feladat. Állapítsuk meg, hogy az alábbi részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

- (a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$; (b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1x_2 + x_3 = 0\}$; (d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ és } x_2 = 0\}$; (f) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 0\}$;
(g) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

5.2. Feladat. Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének. Amennyiben $v \in U$, akkor állítsuk elő a v vektort az U alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként.

- (a) $v = (1, -1, 1)$, $U = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$; (b) $v = (1, 1, 1)$, $U = [(1, -1, 2), (1, 0, 1)]$;
(c) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$; (d) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

5.3. Feladat. A rang meghatározása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az adott vektortérben.

- (a) $(1, 2, -3)$, $V = \mathbb{R}^3$; (b) $(1, -1, 1), (0, 0, 0)$, $V = \mathbb{R}^3$; (c) $(2, 4, -2), (3, 6, -3)$, $V = \mathbb{R}^3$;
(d) $(1, 1, 2), (1, 1, 3)$, $V = \mathbb{R}^3$; (e) $(1, 2), (1, 3)$, $V = \mathbb{R}^2$.

5.4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját, és döntsük el, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben.

- (a) $(1, -1, 1, 2), (1, 2, 1, 2), (-1, 0, 1, -2), (1, 3, 5, 2)$;
(b) $(1, -1, 2, -1), (2, 2, 1, 0), (3, 1, 3, -1), (1, 7, -4, 3)$;
(c) $(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 1)$;
(d) $(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 0)$;
(e) $(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)$;
(f) $(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (-1, 2, 1, 1), (0, 3, -1, 4), (1, 4, 0, 4)$;
(g) $(-1, 3, 1, 2), (-8, 3, 1, -2), (2, 6, 2, 11), (-2, 3, 1, 1)$;
(h) $(5, -2, -8, 4), (3, 1, 1, -2), (6, 1, -1, -4), (3, 3, 7, 1)$.

5.5. Feladat. Az a paraméter függvényében döntsük el az alábbi vektorrendszerrel, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

- (a) $(1, -4, 3, 2), (-1, 4, -2, -4), (3, -12, a, 10)$;
(b) $(1, -1, 2), (2, -1, -1), (1, 0, a^2), (2, -1, a + 4)$;
(c) $(1, 2, 1, 2), (-1, -1, 0, -1), (2, -1, a^2, a + 4)$;
(d) $(1, 2, -1, -1), (-1, -1, 3, 3), (2, 5, a, a), (1, 0, a^2 - a - 5, -5)$;
(e) $(1, -1, 2), (2, -1, -1), (1, 0, a^2), (2, -1, a + 4)$.

5.6. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér V alterének dimenzióját, valamint adjunk meg benne bázist.

- (a) $V = [(1, -1, 1, 2), (1, 2, 1, 2), (-1, 0, 1, -2), (1, 3, 5, 2)]$;
(b) $V = [(1, -1, 2, -1), (2, 2, 1, 0), (3, 1, 3, -1), (1, 7, -4, 3)]$;
(c) $V = [(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 1)]$;
(d) $V = [(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 0)]$;
(e) $V = [(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)]$;
(f) $V = [(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (-1, 2, 1, 1), (0, 3, -1, 4), (1, 4, 0, 4)]$.

5.7. Feladat. Adjuk meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban.

- (a) $v = (0, 0, 0)$, bázis: $(3, -2, 1), (-2, 5, 7), (2, 1, 2)$;
 (b) $v = (1, -1, 2)$, bázis: $(1, 2, 3), (-1, 1, -2), (0, 2, 1)$;
 (c) $v = (2, 1, -1)$, bázis: $(-4, -2, 2), (1, 2, 4), (-1, 3, 9)$;
 (d) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, -1, 3), (2, -1, 4), (3, -1, 4)$;
 (e) $v = (6, 12, -2)$, bázis: $(3, 5, -7), (-5, -3, 7), (7, 3, 5)$;
 (f) $v = (1, 1, 1)$, bázis: $(4, 6, 7), (-3, 5, 7), (2, 5, 6)$.

5.8. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánst.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.9. Feladat. Határozzuk meg a következő mátrix rangját az a valós paraméter függvényében:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 2a & -1 & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

5.10. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

- (a) Ha egy vektortér valamely részhalmaza zárt az összeadásra, akkor az altér.
 (b) Bármely vektortér bármely altere zárt vektorok kivonására nézve.
 (c) Ha egy vektortérnek van 0 -tól különböző eleme, akkor végtelen sok eleme van.
 (d) Bármely vektortérnek van altere.
 (e) A $v_1, \dots, v_n$ vektorok bármely lineáris kombinációja eleme az általuk generált altérnek.
 (f) Bármely V vektortér és v_1, v_2, v_3 vektor esetén $v_1 + v_2 - v_3 \in [v_1, v_2, v_3]$.
 (g) Bármely V vektortér és v_1, v_2, v_3 vektor esetén $v_1 + v_2 - v_3 \in [v_1, v_2]$.
 (h) Ha egy vektorrendszer tartalmazza a 0 vektort, akkor lineárisan függő.
 (i) Lineárisan függő vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan függő.
 (j) Az egy vektorból álló vektorrendszerek mind lineárisan függetlenek.
 (k) $\mathbb{R}^5$ -ben bármely 6 tagú vektorrendszer lineárisan függő.
 (l) $\mathbb{R}^5$ -ben nincs 4 tagú generátorrendszer.
 (ly) $\mathbb{R}^n$ -beli vektorrendszer rangja mindig kisebb, vagy egyenlő, mint n .
 (m) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a rangja megegyezik az elemszámával.
 (n) Ha V -nek van n elemű bázisa, akkor nincs $n + 1$ elemű lineárisan független vektorrendszere.
 (o) Ha V -ben van n elemű lineárisan független vektorrendszer, akkor a dimenziója n .
 (p) Ha V -ben van n elemű lineárisan független vektorrendszer, illetve n elemű generátorrendszer is, akkor n dimenziós.
 (q) Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.
 (r) Legyen a V vektortérben a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független, az $u_1, \dots, u_n$ pedig generátorrendszer. Ekkor $k \leq n$.
 (s) Ha a V vektortér egy bázisa v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , és a v vektor koordinátasora ebben a bázisban $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$, akkor v tagja a bázisnak.
 (t) Az $\mathbb{R}^3$ vektortér $(1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, -1, 3)$ bázisában a $(2, -2, 5)$ vektor koordinátasora $(1 \ 0 \ 1)$.

Az 5.11-22. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

5.11. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ és $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0\}$ alterek $\mathbb{R}^3$ -ben, ekkor ...

- (a) $U \subseteq V$, de $U \not\subseteq V$ (b) $V \subseteq U$, de $V \not\subseteq U$ (c) $U \leq V$ (d) $V \leq U$

5.12. Feladat. Tetszőleges $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén ...

- (a) az u_1, u_2, u_3 vektorrendszer lineárisan független.
 (b) az u_1 vektorrendszer lineárisan független.
 (c) az u_1, u_2, u_3, u_4 vektorrendszer lineárisan függő.
 (d) az u_1, u_2 vektorrendszer lineárisan függő.

5.13. Feladat. Az a, b, c, d paraméterek között legalább hány különböző értékűnek kell lennie, hogy az $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ vektorrendszer lineárisan független legyen?

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

5.14. Feladat. Tetszőleges $U \leq \mathbb{R}^3$ altér esetén, melyik állítás NEM teljesül?

- (a) $0 \in U$.
 (b) Ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén.
 (c) Van olyan $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, amelyre $[u_1, u_2] = U$.
 (d) Ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $[u_1, u_2] \subseteq U$.

5.15. Feladat. Tetszőleges $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokat írjuk be egy mátrix soraiba, majd a mátrixot hozzuk lépcsős alakra. A lépcsős alakú mátrix nemnulla sorait jelölje $v_1, \dots, v_j$.

- (a) Ha $j < k$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer lineárisan független.
 (b) Ha $k = j$, akkor az $v_1, \dots, v_j$ vektorrendszer lineárisan függő.
 (c) Ha $k > n$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$ bázisa.
 (d) Az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer rangja j .

5.16. Feladat. Az alábbiak közül melyik halmaz nem egy 3-dimenziós vektortér?

- (a) $\mathbb{R}^3$
 (b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i = 0\}$
 (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : (x_1 + x_2)(x_3 - x_4 + 2x_5) = 0\}$
 (d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 : (x_1 - x_2)^2 + (x_3 + 2x_4)^2 + (2x_5 + x_6)^2 = 0\}$

5.17. Feladat. Az alábbiak közül hány dimenziós nem lehet egy 3 különböző vektor által kifeszített vektortér?

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

5.18. Feladat. Egy $(n \times n)$ -es mátrix minden eleme 1. Legalább hány darab 1-est kell 0-ra cserélnünk, hogy a mátrix sorvektorai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkossák?

- (a) $n - 2$ (b) $n - 1$ (c) n (d) $n(n - 1)/2$

5.19. Feladat. Tudjuk, hogy $U, V \leq \mathbb{R}^n$, továbbá, hogy $U \cap V = \{0\}$, ekkor ...

- (a) $\dim U + \dim V \leq n$. (b) $\dim U + \dim V = n$.
 (c) $\dim U + \dim V > n$. (d) az előzőek közül egyik sem biztos.

5.20. Feladat. Melyik állítás NEM teljesül?

- (a) Van olyan mátrix, amelynek rangja 0.
 (b) Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor A rangja legfeljebb $\max(m, n)$.
 (c) Nincs olyan $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, amelynek a rangja $\max(m, n)$.
 (d) Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor A rangja legfeljebb $\min(m, n)$.

5.21. Feladat. Egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix sorvektorai alkotják az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét. Az alábbiak közül melyik egyezik meg az U altér dimenziójával?

- (a) Az A mátrix determinánsa.
- (b) Az A mátrix rangja.
- (c) Az A mátrix nyoma (a főátlóban lévő elemek összege).
- (d) Az előbbiek közül egyik sem.

5.22. Feladat. Ha a $v \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátasora az u_1, u_2, u_3 bázisban $(1, 0, 1)$, akkor ...

- (a) $v \in [u_1, u_2]$.
- (b) az u_1, v, u_3 vektorrendszer is bázis.
- (c) az u_1 koordinátasora a v, u_2, u_3 bázisban $(1, 0, -1)$.
- (d) az u_1 koordinátasora a v, u_2, u_3 bázisban ugyanaz, mint a v, u_3, u_2 bázisban.



NEHEZEBB FELADATOK

5.23. Feladat. Legyen u, v, w három vektor egy vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

5.24. Feladat. Legyen

- (a) $U = [(1, -2, 1, -1), (-1, 1, 1, 1), (1, -3, 3, -1)]$, $V = [(-1, 0, 3, 1), (1, -4, 5, -1), (1, 3, -4, 2)]$;
- (b) $U = [(1, -2, 1, -1), (-1, 1, 1, 1), (1, -3, 3, -1)]$, $V = [(-1, 0, 3, 1), (1, -4, 5, -1), (-2, 2, 2, 2)]$;

két altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek. Igaz-e, hogy $U = V$?

5.25. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ és $V = [(1, 2, 1)]$ altérek $\mathbb{R}^3$ -ban. Igaz-e, hogy $U = V$?

5.26. Feladat. Legyen

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + 2x_2 + x_4 = 0\},$$

$$V = [(1, 2, 4, -5), (2, 1, 3, -4)].$$

Igaz-e, hogy $U = V$?

5.27. Feladat. Döntsük el, hogy az a valós paraméter mely értékei esetén lesz eleme a $v_a = (-1, -3, a+1)$ vektor az $\mathbb{R}^3$ vektortér U altérének:

- (a) $U = [(1, 2, -a), (1, 1, 0), (1, a+2, -2)]$;
- (b) $U = [(1, -1, 1), (1, 0, 1-a), (-1, a+1, -2)]$.

5.28. Feladat. Hány maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánsa van az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixnak?
