

# LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A104

3. FELADATSOR

## LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

**3.1. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss-eliminációval és elemi bázis-transzformációval is.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 10 \end{cases} & \text{(d)} \quad & \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a - 2b - 3c = 7 \\ -a + 2b + 3c = -4 \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases} & \text{(f)} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -7 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \\
 \text{(g)} \quad & \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 = 6 \\ -3x_1 - 9x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \end{cases} \\
 \text{(h)} \quad & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \\
 \text{(i)} \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**MEGOLDÁS.** A lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixára végrehajtott Gauss-elimináció utolsó lépését (mátrixát) adjuk meg, a nem csak 0-akat tartalmazó sorok első 0-tól különböző eleme 1, és ezen 1-esek felett is „kinulláztuk” az elemeket (így könnyen leolvasható a megoldás).

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right), \text{(b)} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right), \text{(c)} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{(d)} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right), \\
 \text{(e)} \quad & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \text{(f)} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right), \text{(g)} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \\
 \text{(h)} \quad & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right), \text{(i)} \quad \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

A feladat (i) részének részletes megoldása elemi bázistranszformációval:

| 0.    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | <b>b</b> | 1.    | $x_2$          | $x_3$         | $x_4$ | $x_5$         | <b>b</b> |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|----------------|---------------|-------|---------------|----------|
| $e_1$ | 2*    | -1    | 1     | 2     | 3     | 2        | $x_1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1     | $\frac{3}{2}$ | 1        |
| $e_2$ | 6     | -3    | 2     | 4     | 5     | 3        | $e_2$ | 0              | -1            | -2    | -4            | -3       |
| $e_3$ | 6     | -3    | 4     | 8     | 13    | 9        | $e_3$ | 0              | 1*            | 2     | 4             | 3        |
| $e_4$ | 4     | -2    | 1     | 1     | 2     | 1        | $e_4$ | 0              | -1            | -3    | -4            | -3       |

| 2.    | $x_2$          | $x_4$  | $x_5$          | <b>b</b>       | 3.    | $x_2$          | $x_5$          | <b>b</b>       |
|-------|----------------|--------|----------------|----------------|-------|----------------|----------------|----------------|
| $x_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0      | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $x_1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $e_2$ | 0              | 0      | 0              | 0              | $e_2$ | 0              | 0              | 0              |
| $x_3$ | 0              | 2      | 4              | 3              | $x_3$ | 0              | 4              | 3              |
| $e_4$ | 0              | $-1^*$ | 0              | 0              | $x_4$ | 0              | 0              | 0              |

Az egyenletrendszerek általános megoldása:

|     | Szabad változók | Kötött változók      | Ált. mo.                                                |
|-----|-----------------|----------------------|---------------------------------------------------------|
| (a) | —               | $x_1, x_2, x_3$      | $x_1 = x_2 = -1, x_3 = 2$                               |
| (b) | —               | $x_1, x_2, x_3$      | $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -1$                           |
| (c) | —               | —                    | nincs megoldás                                          |
| (d) | —               | $x_1, x_2, x_3$      | $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1$                            |
| (e) | $x_3$           | $x_1, x_2, x_4$      | $x_1 = -x_3, x_2 = 0, x_4 = 1$                          |
| (f) | —               | $x_1, x_2, x_3$      | $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 3$                                |
| (g) | $x_2, x_4$      | $x_1, x_3$           | $x_1 = 17 - 3x_2 + 3x_4, x_3 = 4 + x_4$                 |
| (h) | —               | $x_1, x_2, x_3, x_4$ | $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -3/2, x_4 = 1/2$              |
| (i) | $x_2, x_5$      | $x_1, x_3, x_4$      | $x_1 = -1/2 + 1/2x_2 + 1/2x_5, x_3 = 3 - 4x_5, x_4 = 0$ |

↔ **videók:** [3.1\(f\)\(h\)Gauss](#), [3.1\(f\)\(h\)EBT](#)

**3.2. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss-eliminációval és elemi bázistranszformációval is.

$$(a) \begin{cases} 3a - 4b + c - 2u + 3v = -1 \\ 2a - 3b - c + 3u + v = 11 \\ 5a - 7b + u + 4v = 10 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} a - b + u = 1 \\ a + c - v = 2 \\ b + v + w = 3 \end{cases}$$

**MEGOLDÁS.** (a) Gauss-eliminációval:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 & 1 & 11 \\ 5 & -7 & 0 & 1 & 4 & 10 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 7 & -18 & 5 & -47 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 3 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Az általános megoldás:  $a = -47 - 7c + 18u - 5v$ ,  $b = -35 - 5c + 13u - 3v$  ( $c, u, v \in \mathbb{R}$ ).

Elemi bázistranszformációval:

| 0.    | a | b  | c  | u  | v | 1.    | a | b  | u  | v | b  | 2.    | a  | b   | v  | b  |
|-------|---|----|----|----|---|-------|---|----|----|---|----|-------|----|-----|----|----|
| $e_1$ | 3 | -4 | 1  | -2 | 3 | c     | 3 | -4 | -2 | 3 | -1 | c     | 13 | -18 | 11 | 19 |
| $e_2$ | 2 | -3 | -1 | 3  | 1 | $e_2$ | 5 | -7 | 1  | 4 | 10 | u     | 5  | -7  | 4  | 10 |
| $e_3$ | 5 | -7 | 0  | 1  | 4 | $e_3$ | 5 | -7 | 1  | 4 | 10 | $e_3$ | 0  | 0   | 0  | 0  |

Az általános megoldás:  $c = 19 - 13a + 18b - 11v$ ,  $u = 10 - 5a + 7b - 4v$  ( $a, b, v \in \mathbb{R}$ ).

(b) Gauss-eliminációval:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -2 \end{array} \right).$$

Az általános megoldás:  $a = 4 - u - v - w$ ,  $b = 3 - v - w$ ,  $c = -2 + u + 2v + w$  ( $u, v, w \in \mathbb{R}$ ).

Elemi bázistranszformációval:

| 0.    | a     | b  | c | u | v  | w | b | 1.    | b     | c | u  | v  | w | b |
|-------|-------|----|---|---|----|---|---|-------|-------|---|----|----|---|---|
| $e_1$ | $1^*$ | -1 | 0 | 1 | 0  | 0 | 1 | a     | -1    | 0 | 1  | 0  | 0 | 1 |
| $e_2$ | 1     | 0  | 1 | 0 | -1 | 0 | 2 | $e_2$ | $1^*$ | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 |
| $e_3$ | 0     | 1  | 0 | 0 | 1  | 1 | 3 | $e_3$ | 1     | 0 | 0  | 1  | 1 | 3 |

$$\begin{array}{c|cccc|c} 2. & c & u & v & w & b \\ \hline a & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ b & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ e_3 & -1^* & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc|c} 3. & u & v & w & b \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 4 \\ b & 0 & 1 & 1 & 3 \\ c & -1 & -2 & -1 & -2 \end{array}$$

Az általános megoldás:  $a = 4 - u - v - w$ ,  $b = 3 - v - w$ ,  $c = -2 + u + 2v + w$  ( $u, v, w \in \mathbb{R}$ ).

↔ videók: [3.2\(a\)](#), [3.2\(b\)](#)

↔ pdf fájlok: [3.2\(a\)](#), [3.2\(b\)](#)

**3.3. Feladat.** Döntsük el, hogy  $(1, -1, 2, 3)$  megoldása-e az

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek.

**MEGOLDÁS.** Nem.

**3.4. Feladat.** Ellenőrizzük, hogy  $(1, -1, 2, 1)$  megoldása az

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek. Hogyan kapható meg épp ez a konkrét megoldás az (egyik) általános megoldásból?

**MEGOLDÁS.** Az egyenletrendszer (egy) általános megoldása:

$$x_1 = \frac{3 + x_3}{5}, \quad x_2 = \frac{-6 + 3x_3 - 5x_4}{5} \quad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}),$$

ha  $x_3 = 2$  és  $x_4 = 1$ , akkor éppen a szóbanforgó konkrét megoldást kapjuk.

**3.5. Feladat.** Határozzuk meg az  $a$  és  $b$  valós paraméterek összes olyan értékét amelyekre az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_2 + bx_3 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + bx_3 = a \end{cases}$$

**MEGOLDÁS.** Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha  $b \neq -4$  és  $a = -7$ . Ekkor  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 3$  és  $x_3 = 0$  az egyetlen megoldás.

**3.6. Feladat.** Határozzuk meg, hogy az alábbi egyenletrendszereknek az  $a$  valós paraméter függvényében hány megoldása van.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ ax_2 + (a^2 + a)x_3 = a + 1 \\ ax_3 = a - 1 \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ (a + 1)x_2 + ax_3 = a - 1 \\ (a^2 - a)x_3 = a \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ (a + 1)x_2 + ax_3 = a - 1 \\ (a^2 + 2a - 3)x_3 = a^2 - 3a + 2 \end{cases} & \text{(d)} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + (a^2 - 8)x_3 = a + 4 \end{cases} \\ \text{(e)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ x_1 + (1 - a)x_3 + (a - 1)x_4 = 2 \\ x_1 - ax_3 + (a - 2)x_4 = 1 \\ -ax_1 + ax_2 + 2ax_3 + 2x_4 = 3a - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**MEGOLDÁS.**

|     | A megoldások száma                          |     | A megoldások száma                                                                    |     | A megoldások száma                                                                      |
|-----|---------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) | $a \neq 0$ (egy mo.)<br>$a = 0$ (nincs mo.) | (b) | $a \neq 0, \pm 1$ (egy mo.)<br>$a = 0$ ( $\infty$ sok mo.)<br>$a = \pm 1$ (nincs mo.) | (c) | $a \neq -3, \pm 1$ (egy mo.)<br>$a = 1$ ( $\infty$ sok mo.)<br>$a = -3, -1$ (nincs mo.) |

|     | A megoldások száma           |     | A megoldások száma          |
|-----|------------------------------|-----|-----------------------------|
| (d) | $a \neq \pm 3$ (egy mo.)     | (e) | $a \neq 1, 2$ (egy mo.)     |
|     | $a = 3$ (nincs mo.)          |     | $a = 2$ (nincs mo.)         |
|     | $a = -3$ ( $\infty$ sok mo.) |     | $a = 1$ ( $\infty$ sok mo.) |

→ videók: [3.6\(d\)](#), [3.6\(e\)](#)

→ pdf fájlok: [3.6\(d\)](#), [3.6\(e\)](#)

**3.7. Feladat.** Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

- (a) Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor. (Igaz)
- (b) Ha egy lineáris egyenletrendszer mátrixának több oszlopa van, mint sora, akkor vagy nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van. (Igaz)
- (c) Lineáris egyenletrendszer bármely változója lehet szabad változó. (Hamis)
- (d) Van olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek végtelen sok megoldása van, és minden megoldása csak egész számokat tartalmaz. (Hamis)
- (e) Csupa nulla sort nem tartalmazó lépcsős mátrixnak nem lehet több sora, mint oszlopa. (Igaz)
- (f) Ha egy lineáris egyenletrendszer összes konstansa 0, akkor van megoldása. (Igaz)
- (g) Ha egy lineáris egyenletrendszer elemi bázistranszformációkkal való megoldása során az

$$x_2 \mid 0 \quad 0 \mid -2$$

sort kapjuk, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. (Hamis)

- (h) Ha egy lineáris egyenletrendszernek megoldása a  $(0, 0, \dots, 0)$  valós szám-n-es, akkor az egyenletrendszer homogén. (Igaz)
- (i) Van olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldása csak irracionális számot tartalmaz. (Igaz)
- (j) Létezik olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek pontosan 2018 megoldása van. (Hamis)
- (k) Ha egy lineáris egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus, akkor legalább egy megoldása van. (Hamis)
- (l) Ha egy lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixának determinánsa 0-tól különböző, akkor pontosan egy megoldása van. (Hamis)

A 3.8-18. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

**3.8. Feladat.** Az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer megoldható Cramer-szabállyal, ha ...

- (a) az  $A$  mátrix szimmetrikus, és determinánsa 0.
- (b) az  $A$  mátrix négyzetes, és determinánsa nem 0.
- (c) az  $A^T$  mátrix szimmetrikus, és determinánsa 0.
- (d) az  $A$  mátrix négyzetes, szimmetrikus és determinánsa 0.

**MEGOLDÁS.** (b)

**3.9. Feladat.** Egy adott kétismeretlenes lineáris egyenletrendszernek tudjuk, hogy pontosan egy megoldása van. Ekkor az egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakja ...

- (a) csak egy nemnulla sorból állhat.
- (b) csak két nemnulla sorból állhat.
- (c) csak három nemnulla sorból állhat.
- (d) tetszőleges sok nemnulla sorból állhat.

**MEGOLDÁS.** (b)

**3.10. Feladat.** Ha két lineáris egyenletrendszernek ugyanaz az általános megoldása, akkor ...

- (a) a két egyenletrendszer csak ugyanaz lehet.
- (b) a két egyenletrendszer nem egyezhet meg.

- (c) a két egyenletrendszerben ugyanannyi egyenlet van.  
 (d) a két egyenletrendszerben ugyanannyi különböző ismeretlen jelenik meg.

**MEGOLDÁS.** (d)

**3.11. Feladat.** Próbálgatással találtunk két megoldását egy adott lineáris egyenletrendszernek. Ekkor biztosan tudjuk, hogy ...

- (a) az egyenletrendszernek  $k$  darab megoldása van, ahol  $k > 2$  valamely konkrét pozitív egész szám.  
 (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.  
 (c) az egyenletrendszer ellentmondó.  
 (d) az egyenletrendszernek pontosan két megoldása van.

**MEGOLDÁS.** (b)

**3.12. Feladat.** Egy lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációval oldunk meg, és a bővített mátrix lépcsős alakjának utolsó sora:  $\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$ . Ekkor ...

- (a) az egyenletrendszernek  $k$  darab megoldása van, ahol  $k > 1$  valamely konkrét pozitív egész szám.  
 (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.  
 (c) az egyenletrendszer ellentmondó.  
 (d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

**MEGOLDÁS.** (b)

**3.13. Feladat.** Egy lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldunk meg, és a bővített mátrix lépcsős alakjának utolsó két sora:  $\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ . Ekkor ...

- (a) az egyenletrendszernek  $k$  darab megoldása van, ahol  $k > 1$  valamely konkrét pozitív egész szám.  
 (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.  
 (c) az egyenletrendszer ellentmondó.  
 (d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

**MEGOLDÁS.** (c)

**3.14. Feladat.** Egy lineáris egyenletrendszert elemi bázistranszformációval oldottunk meg, és az utolsó lépés után a következőt kaptuk:  $\frac{\begin{array}{c|c|c} & x_2 & \mathbf{b} \\ \hline x_1 & 1 & 5 \end{array}}{5}$ . Ekkor ...

- (a) az egyenletrendszernek  $k$  darab megoldása van, ahol  $k > 1$  valamely konkrét pozitív egész szám.  
 (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.  
 (c) az egyenletrendszer ellentmondó.  
 (d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

**MEGOLDÁS.** (b)

**3.15. Feladat.** Egy lineáris egyenletrendszert elemi bázistranszformációval oldottunk meg, és az utolsó lépés után a következőt kaptuk:  $\frac{\begin{array}{c|c|c} & x_2 & \mathbf{b} \\ \hline e_1 & 0 & -2 \\ x_1 & 1 & 5 \end{array}}{5}$ . Ekkor ...

- (a) az egyenletrendszernek  $k$  darab megoldása van, ahol  $k > 1$  valamely konkrét pozitív egész szám.  
 (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.  
 (c) az egyenletrendszer ellentmondó.  
 (d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

**MEGOLDÁS.** (c)

**3.16. Feladat.** Ha egy 5 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer 7 egyenletből áll úgy, hogy egyik egyenlet sem szerepel kétszer, akkor ...

- (a) az egyenletrendszer ellentmondó.  
 (b) az egyenletrendszernek legfeljebb egy megoldása lehet.  
 (c) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

(d) az egyenletrendszernek nulla, egy vagy végtelen sok megoldása van.

**MEGOLDÁS.** (d)

**3.17. Feladat.** Ha az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer  $A$  mátrixa négyzetes, és a determinánsa 0, akkor ...

- (a) az egyenletrendszer biztosan megoldható.
- (b) az egyenletrendszer biztosan nem oldható meg.
- (c) az egyenletrendszer csak elemi bázistranszformációval oldható meg.
- (d) az egyenletrendszer nem oldható meg Cramer-szabállyal.

**MEGOLDÁS.** (d)

**3.18. Feladat.** Az  $ax_1 + bx_2 = 0$  lineáris egyenletrendszernek ...

- (a) nincs megoldása, ha  $a = 0$ ,  $b = 1$ .
- (b) nincs megoldása, ha  $a = b = 0$ .
- (c) végtelen sok megoldása van, ha  $a = b = 1$ .
- (d) nincs megoldása, ha  $a = b = 1$ .

**MEGOLDÁS.** (c)

[■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■]

## NEHEZEBB FELADATOK

**3.19. Feladat.** Legyen  $n \geq 2$  természetes szám. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert, ahol  $a$  tetszőleges valós szám.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + \dots + x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + ax_n = 1 \end{cases}$$

**3.20. Feladat.** Általános megoldása-e az

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek a következő:  $x_1, x_3, x_4$  kötött ismeretlenek,  $x_2, x_5$  szabad ismeretlenek és

$$x_1 = -2 - 5x_2, \quad x_3 = 2 + 3x_2, \quad x_4 = 1 - x_5?$$

**3.21. Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 + 2x_6 = 3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert. Van-e olyan általános megoldása a fenti egyenletrendszernek, melyben a kötött ismeretlenek éppen

- (a)  $x_2, x_4$  és  $x_5$ ?
- (b)  $x_1, x_3$  és  $x_5$ ?

Adj meg olyan általános megoldást, melyben az  $x_1, x_3$  és  $x_5$  ismeretlenek a szabadok.