
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A104

3. FELADATSOR

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

3.1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss-eliminációval és elemi bázis-transzformációval is.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 10 \end{cases} & \text{(d)} \quad & \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a - 2b - 3c = 7 \\ -a + 2b + 3c = -4 \end{cases} \\ \text{(e)} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases} & \text{(f)} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -7 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \\ \text{(g)} \quad & \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 = 6 \\ -3x_1 - 9x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \end{cases} \\ \text{(h)} \quad & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \\ \text{(i)} \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

3.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss-eliminációval és elemi bázis-transzformációval is.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 3a - 4b + c - 2u + 3v = -1 \\ 2a - 3b - c + 3u + v = 11 \\ 5a - 7b + u + 4v = 10 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} a - b + u = 1 \\ a + c - v = 2 \\ b + v + w = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

3.3. Feladat. Döntsük el, hogy $(1, -1, 2, 3)$ megoldása-e az

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek.

3.4. Feladat. Ellenőrizzük, hogy $(1, -1, 2, 1)$ megoldása az

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek. Hogyan kapható meg épp ez a konkrét megoldás az (egyik) általános megoldásból?

3.5. Feladat. Határozzuk meg az a és b valós paraméterek összes olyan értékét amelyekre az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_2 + bx_3 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + bx_3 = a \end{cases}$$

3.6. Feladat. Határozzuk meg, hogy az alábbi egyenletrendszereknek az a valós paraméter függvényében hány megoldása van.

$$(a) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ ax_2 + (a^2 + a)x_3 = a + 1 \\ ax_3 = a - 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ (a + 1)x_2 + ax_3 = a - 1 \\ (a^2 - a)x_3 = a \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ (a + 1)x_2 + ax_3 = a - 1 \\ (a^2 + 2a - 3)x_3 = a^2 - 3a + 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + (a^2 - 8)x_3 = a + 4 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ x_1 + (1 - a)x_3 + (a - 1)x_4 = 2 \\ x_1 - ax_3 + (a - 2)x_4 = 1 \\ -ax_1 + ax_2 + 2ax_3 + 2x_4 = 3a - 1 \end{cases}$$

3.7. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

- (a) Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor.
- (b) Ha egy lineáris egyenletrendszer mátrixának több oszlopa van, mint sora, akkor vagy nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van.
- (c) Lineáris egyenletrendszer bármely változója lehet szabad változó.
- (d) Van olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek végtelen sok megoldása van, és minden megoldása csak egész számokat tartalmaz.
- (e) Csupa nulla sort nem tartalmazó lépcsős mátrixnak nem lehet több sora, mint oszlopa.
- (f) Ha egy lineáris egyenletrendszer összes konstansa 0, akkor van megoldása.
- (g) Ha egy lineáris egyenletrendszer elemi bázistranszformációkkal való megoldása során az

$$x_2 \mid 0 \quad 0 \mid -2$$

sort kapjuk, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

- (h) Ha egy lineáris egyenletrendszernek megoldása a $(0, 0, \dots, 0)$ valós szám-n-es, akkor az egyenletrendszer homogén.
- (i) Van olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldása csak irracionális számot tartalmaz.
- (j) Létezik olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek pontosan 2018 megoldása van.
- (k) Ha egy lineáris egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus, akkor legalább egy megoldása van.
- (l) Ha egy lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixának determinánsa 0-tól különböző, akkor pontosan egy megoldása van.

A 3.8-18. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

3.8. Feladat. Az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldható Cramer-szabállyal, ha ...

- (a) az A mátrix szimmetrikus, és determinánsa 0.
- (b) az A mátrix négyzetes, és determinánsa nem 0.
- (c) az A^T mátrix szimmetrikus, és determinánsa 0.
- (d) az A mátrix négyzetes, szimmetrikus és determinánsa 0.

3.9. Feladat. Egy adott kétismeretlenes lineáris egyenletrendszernek tudjuk, hogy pontosan egy megoldása van. Ekkor az egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakja ...

- (a) csak egy nemnulla sorból állhat.
- (b) csak két nemnulla sorból állhat.
- (c) csak három nemnulla sorból állhat.
- (d) tetszőleges sok nemnulla sorból állhat.

3.10. Feladat. Ha két lineáris egyenletrendszernek ugyanaz az általános megoldása, akkor ...

- (a) a két egyenletrendszer csak ugyanaz lehet.
- (b) a két egyenletrendszer nem egyezhet meg.
- (c) a két egyenletrendszerben ugyanannyi egyenlet van.
- (d) a két egyenletrendszerben ugyanannyi különböző ismeretlen jelenik meg.

3.11. Feladat. Próbálgatással találtunk két megoldását egy adott lineáris egyenletrendszernek. Ekkor biztosan tudjuk, hogy ...

- (a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 2$ valamely konkrét pozitív egész szám.
- (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
- (c) az egyenletrendszer ellentmondó.
- (d) az egyenletrendszernek pontosan két megoldása van.

3.12. Feladat. Egy lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációval oldunk meg, és a bővített mátrix lépcsős alakjának utolsó sora: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$. Ekkor ...

- (a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 1$ valamely konkrét pozitív egész szám.
- (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
- (c) az egyenletrendszer ellentmondó.
- (d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

3.13. Feladat. Egy lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldunk meg, és a bővített mátrix lépcsős alakjának utolsó két sora: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$. Ekkor ...

- (a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 1$ valamely konkrét pozitív egész szám.
- (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
- (c) az egyenletrendszer ellentmondó.
- (d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

3.14. Feladat. Egy lineáris egyenletrendszert elemi bázistranszformációval oldottunk meg, és az utolsó lépés után a következőt kaptuk: $\begin{array}{c|c|c} & x_2 & \mathbf{b} \\ \hline x_1 & 1 & 5 \end{array}$. Ekkor ...

- (a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 1$ valamely konkrét pozitív egész szám.
- (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
- (c) az egyenletrendszer ellentmondó.
- (d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

3.15. Feladat. Egy lineáris egyenletrendszert elemi bázistranszformációval oldottunk meg, és az utolsó lépés után a következőt kaptuk: $\begin{array}{c|c|c} & x_2 & \mathbf{b} \\ \hline e_1 & 0 & -2 \\ x_1 & 1 & 5 \end{array}$. Ekkor ...

- (a) az egyenletrendszernek k darab megoldása van, ahol $k > 1$ valamely konkrét pozitív egész szám.
- (b) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
- (c) az egyenletrendszer ellentmondó.
- (d) az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

3.16. Feladat. Ha egy 5 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer 7 egyenletből áll úgy, hogy egyik egyenlet sem szerepel kétszer, akkor ...

- (a) az egyenletrendszer ellentmondó.
- (b) az egyenletrendszernek legfeljebb egy megoldása lehet.
- (c) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
- (d) az egyenletrendszernek nulla, egy vagy végtelen sok megoldása van.

3.17. Feladat. Ha az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer A mátrixa négyzetes, és a determinánsa 0, akkor ...

- (a) az egyenletrendszer biztosan megoldható.
- (b) az egyenletrendszer biztosan nem oldható meg.
- (c) az egyenletrendszer csak elemi bázistranszformációval oldható meg.
- (d) az egyenletrendszer nem oldható meg Cramer-szabállyal.

3.18. Feladat. Az $ax_1 + bx_2 = 0$ lineáris egyenletrendszernek ...

- (a) nincs megoldása, ha $a = 0$, $b = 1$.
- (b) nincs megoldása, ha $a = b = 0$.
- (c) végtelen sok megoldása van, ha $a = b = 1$.
- (d) nincs megoldása, ha $a = b = 1$.



NEHEZEBB FELADATOK

3.19. Feladat. Legyen $n \geq 2$ természetes szám. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert, ahol a tetszőleges valós szám.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + \dots + x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + ax_n = 1 \end{cases}$$

3.20. Feladat. Általános megoldása-e az

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszernek a következő: x_1, x_3, x_4 kötött ismeretlenek, x_2, x_5 szabad ismeretlenek és

$$x_1 = -2 - 5x_2, \quad x_3 = 2 + 3x_2, \quad x_4 = 1 - x_5?$$

3.21. Feladat. Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 + 2x_6 = 3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert. Van-e olyan általános megoldása a fenti egyenletrendszernek, melyben a kötött ismeretlenek éppen

- (a) x_2, x_4 és x_5 ?
- (b) x_1, x_3 és x_5 ?

Adj meg olyan általános megoldást, melyben az x_1, x_3 és x_5 ismeretlenek a szabadok.
