
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A104

2. FELADATSOR

DETERMINÁNSOK

2.1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix};$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$

(c) $\begin{vmatrix} -0.6 & 0.5 \\ 0.4 & -0.3 \end{vmatrix}.$

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$ (c) $\begin{vmatrix} -0.6 & 0.5 \\ 0.4 & -0.3 \end{vmatrix} = -0.02.$

2.2. Feladat. Írjuk fel az alábbi determinánsok kifejtését a megadott soruk/oszlopuk szerint.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, 2. \text{ sor};$

(b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, 3. \text{ oszlop}.$

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};$

(b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$

2.3. Feladat. Nullázzuk ki a *-gal megjelölt elemek sorát/oszlopát az adott elem segítségével az alábbi determinánsokban.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ oszlop};$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2^* & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ sor}.$

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2^* & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$

2.4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix};$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$

(c) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix};$

(d) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix};$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix};$

(f) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix};$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$

(h) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8;$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -552;$

$$(d) \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 16; (e) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 10; (f) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15;$$

$$(g) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6; (h) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -24.$$

↪ videók: [2.4\(a\)\(b\)](#), [2.4\(c\)](#), [2.4\(f\)](#), [2.4\(h\)](#)

↪ pdf fájlok: [2.4\(a\)\(b\)](#), [2.4\(f\)](#), [2.4\(h\)](#)

2.5. Feladat. Adjuk meg az x valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi determináns értéke 0, illetve 30 legyen:

$$(a) \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ -2 & 2 & x+5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} -1 & x & x-1 \\ -2 & x-2 & x+3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & x-1 \\ -2 & x-2 & 3 \\ x-1 & 2 & -x+1 \end{vmatrix}.$$

MEGOLDÁS. (a) $d = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ -2 & 2 & x+5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = x^2 + x + 10$, ezért

$d = 0$ nem lehetséges,

$$d = 30 \iff x = -5 \text{ vagy } x = 4;$$

$$(b) d = \begin{vmatrix} -1 & x & x-1 \\ -2 & x-2 & x+3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 4x, \text{ ezért}$$

$$d = 0 \iff x = -2,$$

$$d = 30 \iff x = 11/2;$$

$$(c) d = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & x-1 \\ -2 & x-2 & 3 \\ x-1 & 2 & -x+1 \end{vmatrix} = -2x^3 + 8x^2 - 19x + 13, \text{ ezért}$$

$$d = 0 \iff x = 1,$$

$$d = 30 \iff x = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{9\sqrt{10099} - 887}}{2^{2/3}} - \frac{25}{\sqrt[3]{2(9\sqrt{10099} - 887)}} + 4 \right) \approx -0.672381909259812819377.$$

↪ videó: [2.5. \(c\)](#)

2.6. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

- (a) Ha egy determináns értéke 0, akkor két sora megegyezik, vagy arányos. [\(Hamis\)](#)
- (b) Ha egy egész számokból álló determináns értéke páros, akkor minden eleme páros. [\(Hamis\)](#)
- (c) Ha egy egész számokból álló determináns értéke páros, akkor van páros eleme. [\(Hamis\)](#)
- (d) Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke változatlan marad. [\(Hamis\)](#)
- (e) Ha egy egész számokból álló determináns egy sorában csak páros számok vannak, akkor az értéke páros. [\(Igaz\)](#)
- (f) Egész számokból álló determináns értéke is egész szám. [\(Igaz\)](#)
- (g) Bármely azonos méretű négyzetes A és B mátrixra $|A + B| = |A| + |B|$. [\(Hamis\)](#)
- (h) Bármely A négyzetes mátrix esetén $|A^T| = |A|$. [\(Igaz\)](#)

- (i) Bármely A négyzetes mátrix esetén $|A^2| = |A|^2$. (Igaz)
- (j) Bármely A négyzetes mátrix esetén $|A| = |-A|$. (Hamis)
- (k) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, akkor a mátrix determinánsa is racionális szám. (Igaz)
- (l) Ha egy mátrix minden eleme irracionális szám, akkor a mátrix determinánsa is irracionális szám. (Hamis)

A 2.7-17. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

2.7. Feladat. Bármely (a, b) és (c, d) síkbeli helyvektor esetén a két vektor által kifeszített paralelogramma területe ...

- (a) $|ad - bc|$.
- (b) $ad - bc$.
- (c) $bc - ad$.
- (d) $|ab - cd|$.

MEGOLDÁS. (a)

2.8. Feladat. A (100×100) -as egység mátrix 2. sorának 3. eleméhez tartozó aldeterminánsának az értéke ...

- (a) 1.
- (b) -1 .
- (c) 0.
- (d) $(-1)^{100}$.

MEGOLDÁS. (c)

2.9. Feladat. A $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ determináns minden adjungált aldeterminánsának értéke ...

- (a) pozitív.
- (b) nemnegatív.
- (c) negatív.
- (d) nempozitív.

MEGOLDÁS. (d)

2.10. Feladat. Egy (4×4) -es determinánst kifejtettünk valamelyik sora vagy oszlopa szerint, majd az így kapott (3×3) -as determinánsok mindegyikét kifejtettük valamelyik soruk vagy oszlopuk szerint. Hány (2×2) -es determináns szerepel az így kapott összegben? (Minden összeadandót leírtunk, azokat is, amelyek értéke 0.)

- (a) 4.
- (b) 7.
- (c) 6.
- (d) 12.

MEGOLDÁS. (d)

2.11. Feladat. Ha egy $(n \times n)$ -es determináns mindegyik elemét megszorozzuk egy c számmal, akkor a determináns értéke ...

- (a) a c -szeresére változik.
- (b) a c^n -szeresére változik.
- (c) a c^{n^2} -szeresére változik.
- (d) nem változik.

MEGOLDÁS. (b)

2.12. Feladat. Ha egy (5×5) -ös trianguláris mátrix főátlójának minden eleme negatív, akkor a mátrix determinánsa ...

- (a) 0.
- (b) negatív.
- (c) pozitív.
- (d) 1.

MEGOLDÁS. (b)

2.13. Feladat. Melyik igaz minden négyzetes mátrixra az alábbiak közül? Ha a mátrix két sorát felcseréljük, akkor ...

- (a) a mátrix determinánsa nem változik.
- (b) a mátrix determinánsa 0 lesz.
- (c) a mátrix determinánsa a -1 -szeresére változik.
- (d) a mátrix determinánsa a reciprokára változik.

MEGOLDÁS. (c)

- (a) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám és a determinánsa $\frac{1}{8}$, akkor a mátrixban van olyan elem, amelynek nevezője páros szám.
- (b) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.
- (c) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix valamelyik eleme páros szám.

2.25. Feladat. Igazak-e a következő állítások (ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát):

- (a) Ha egy (2×2) -es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix mindkét sora [valamelyik sora] a másik sorának konstansszorosa.
 - (b) Ha egy (3×3) -as mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora valamelyik másik sorának konstansszorosa.
-