
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A104

1. FELADATSOR

MÁTRIXOK

1.1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 2 \quad 0), \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{2} \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \sqrt{10}/2 & 0.6 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek):

- (a) $A + B$, $A + F$, $2B$, B^T , D^T ; (b) AB , BA , CB , BC , DC , CD ;
(c) BF , E^2 , GH , EB^T , $E^T A$, $D^T C^T$; (d) $(A + B)C$, $(A + B^T)D$, $AD + B^T D$.

1.2. Feladat. Számítsuk ki az $f = x^2 + 3x - 4$ polinom helyettesítési értékét az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ helyen.

1.3. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amely felcserélhető A -val, azaz amelyre $AB = BA$ teljesül.

1.4. Feladat. Egy gazdaságban a munkanélküliek és a dolgozók közötti átmenetet a következő mátrix írja le (1 éves időtávon):

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

A mátrix oszlopai a jelenlegi dolgozóknak / munkanélkülieknek felelnek meg, a sorok pedig a változásnak. Tehát a fenti mátrix azt jelenti, hogy egy év alatt a dolgozók 90%-a dolgozó marad, 10%-a munkanélkülivé válik, a munkanélkülieknek pedig 30%-a talál munkát és 70%-a marad munkanélküli. Jelenleg 8 000 000 dolgozó és 2 000 000 munkanélküli van. Mekkora lesz a munkanélküliségi ráta¹ a gazdaságban 1, 2, illetve 4 év múlva? Van-e egyensúlyi helyzete a munkanélküliségi rátának (vagyis olyan ráta, amely változatlan marad)?

Plusz gondolkodnivaló: mi történik, ha a modellbe bevesszük a lakosság nemekre osztását is? Igaz-e, hogy ekkor is egyértelmű a munkanélküliségi ráta egyensúlyi helyzete?

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re és $1 \leq k \leq n$ -re legyen

$$\mathbf{e}_{k,n} = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \overbrace{1}^{\text{k-adik komp.}} \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad \text{és} \quad \mathbf{1}_n = (1 \quad \dots \quad 1)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

1.5. Feladat. Egy országgyűlési választáson a tizenöt szavazókörzetben hat jelöltre lehet szavazni. Az érvényes szavazatok megoszlását az $A = (a_{i,j})_{6 \times 15}$ mátrix tartalmazza, amelynek $a_{i,j}$ eleme azt mutatja meg, hogy az i -edik jelöltre a j -edik körzetben hányan szavaztak. Milyen jelentést tulajdoníthatunk a következő kifejezéseknek:

¹A munkanélküliségi ráta nem más, mint a munkanélküliek számának és a munkaerő-állománynak a hányadosa, százalékos formában kifejezve. (Forrás: Wikipédia.)

(a) $\mathbf{e}_{1,6}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{1}_{15}$;

(b) $\mathbf{1}_6^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{5,15}$?

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy a második jelöltre a hatodik körzetben leadott szavazatok száma hány százaléka az összes érvényes szavazatnak.

1.6. Feladat. Egy áruházban tizenkét féle dobozos sört tartanak. Az elmúlt év júliusában regisztrálták a napi fogyást: az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{31 \times 12}$ mátrix i -edik sorának j -edik eleme azt jelenti, hogy július i -edik napján hány darab fogyott a j -edik fajta sörből. A $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1 \times 12}$ mátrix a sörök egységárait tartalmazza. Milyen jelentést tulajdoníthatunk az alábbi kifejezéseknek:

(a) $\mathbf{e}_{3,31}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}^T$;

(b) $\mathbf{1}_{31}^T \cdot \mathbf{A}$;

(c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{1}_{12}$?

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy mennyi az ötödik fajta sörből származó árbevétel júliusban.

1.7. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(a) Bármely $\mathbf{A}$ mátrix esetén $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ létezik.

(b) Bármely $\mathbf{A}$ mátrix esetén $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ egy négyzetes mátrix.

(c) Bármely $\mathbf{A}$ mátrix esetén $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ és $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ azonos méretű négyzetes mátrixok.

(d) Bármely $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ($n \times n$)-es mátrix esetén $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{BA}$ azonos méretű négyzetes mátrixok.

(e) Bármely $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix esetén ha $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ létezik, akkor $\mathbf{AB}$ is.

(f) Bármely $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix esetén ha $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ létezik, akkor $\mathbf{AB}^T$ is.

(g) Bármely $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ($n \times n$)-es mátrix esetén $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

(h) Bármely $\mathbf{A}$ mátrix esetén $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

(i) Ha egy mátrix szimmetrikus, akkor négyzetes.

(j) Ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokra $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ teljesül, akkor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok négyzetesek.

(k) Bármely $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ azonos méretű négyzetes mátrixok esetén

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2.$$

(l) Ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ azonos méretű négyzetes mátrixok esetén

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$$

teljesül, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Az 1.8-17. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

1.8. Feladat. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix (2×3)-as valós mátrix.

(a) Az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ és $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ szorzatok definiáltak.

(b) Az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ és $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ szorzatok nem definiáltak.

(c) Az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szorzat definiált, de az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ szorzat nem definiált.

(d) Az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szorzat nem definiált, de az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ szorzat definiált.

1.9. Feladat. Legyenek adottak az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ és $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ mátrixok. Ekkor ...

(a) az $\mathbf{ABC}$ szorzat definiált.

(b) a $\mathbf{C}^T\mathbf{AB}$ szorzat definiált.

(c) az $\mathbf{ABE}_3\mathbf{C}^T$ szorzat definiált.

(d) a $\mathbf{BA}^T\mathbf{C}^T$ szorzat definiált.

1.10. Feladat. Legyenek adottak az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ és $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ mátrixok. Ekkor ...

(a) az $\mathbf{ABC} = \mathbf{CAB}$ egyenlőség teljesül.

(b) az $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ egyenlőség teljesül.

(c) az $\mathbf{AB} + \mathbf{BC}$ összeg definiált.

(d) a $\mathbf{BCAB}$ szorzat nem definiált.

1.11. Feladat. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$), $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ ($k, \ell \in \mathbb{N}$) és

(a) $n = k$, akkor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ létezik.

(b) $m = n = k = \ell$, akkor $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

(c) $m = n = k = \ell$, akkor $\mathbf{AB} - (\mathbf{BA})^T$ létezik.

(d) $m = n = k = \ell$, akkor $(\mathbf{B} + \mathbf{A})^T = \mathbf{AB}$.

1.12. Feladat. Mely mátrixokra teljesül az $A(B + C) = AB + AC$ egyenlőség?

- (a) $A \in \mathbb{R}^{2000 \times 2018}$, $B \in \mathbb{R}^{2018 \times 2021}$ és $C \in \mathbb{R}^{2018 \times 2021}$.
 (b) $A \in \mathbb{R}^{2004 \times 2012}$, $B \in \mathbb{R}^{2012 \times 2016}$ és $C \in \mathbb{R}^{2016 \times 2020}$.
 (c) $A \in \mathbb{R}^{10 \times 1000}$, $B \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ és $C \in \mathbb{R}^{100 \times 10}$.
 (d) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ és $C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$.

1.13. Feladat. Az $A \in \mathbb{R}^{2018 \times 2019}$ mátrixra $(A^T)^T = A$ teljesül. Ekkor ...

- (a) $A + A^T = 2A$.
 (b) A felülről trianguláris.
 (c) A szimmetrikus.
 (d) A^2 nem definiált.

1.14. Feladat. Az $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokra $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ teljesül. Ekkor ...

- (a) A trianguláris
 (b) $AB = (A^T + B^T)^T$.
 (c) A és B felcserélhető.
 (d) $A^T = B$.

1.15. Feladat. Az $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokra $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ teljesül. Ekkor ...

- (a) A vagy B az egységmátrix.
 (b) A vagy B a zérusmátrix.
 (c) $AB = (AB)^T$.
 (d) $AB = (A^T B^T)^T$.

1.16. Feladat. Az $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokra $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ teljesül. Ekkor ...

- (a) A vagy B az egységmátrix.
 (b) A vagy B négyzetes.
 (c) A vagy B diagonális.
 (d) A vagy B a zérusmátrix.

1.17. Feladat. Az $(E_5)^k$ mátrix milyen k -ra ($k \in \mathbb{N}$) lesz diagonális?

- (a) Csak alsó trianguláris lesz bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén.
 (b) Csak $k \in \{1, 2\}$ esetén.
 (c) Csak $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ esetén.
 (d) Bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén.



NEHEZEBB FELADATOK

1.18. Feladat. Elemezzük az $(AB)^3 = A^3 B^3$ egyenlőséget értelmezhetőség szempontjából.

- (a) Előfordulhat-e, hogy az egyenlőség egyik oldala létezik, de a másik oldal nem?
 (b) Előfordulhat-e, hogy mindkét oldal létezik, de különböző méretűek?

1.19. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amely felcserélhető A -val, azaz amelyre $AB = BA$ teljesül.

1.20. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan (2×2) -es valós mátrixot, amelynek négyzete a nullmátrix.

1.21. Feladat. Tetszőleges n természetes számra számítsuk ki az alábbi mátrixokat:

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$; (b) $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

1.22. Feladat. Legyen A olyan $(n \times n)$ -es mátrix, melyre igaz, hogy minden oszlopában az elemek összege 1. Ha v $(n \times 1)$ -es oszlopvektor, akkor jelöljük $\|v\|$ -vel v elemeinek az összegét. Igazoljuk, hogy bármely v $(n \times 1)$ -es oszlopvektorra $\|Av\| = \|v\|$ teljesül.

1.23. Feladat. Legyen A olyan $(n \times n)$ -es mátrix, melyre igaz, hogy minden oszlopában az elemek összege 0. Igazoljuk, hogy van olyan v $(n \times 1)$ -es oszlopvektor, melyre $Av = 0$ teljesül.

1.24. Feladat. Négyzetes mátrix nyomának nevezzük és $\text{Trace}(A)$ -val jelöljük a főátlójában lévő elemek összegét. Igazoljuk, hogy ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $\text{Trace}(AB) = \text{Trace}(BA)$.

1.25. Feladat. Legyen A valós mátrix és tegyük fel, hogy az AA^T mátrix nyoma 0. Határozzuk meg A -t.

1.26. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A és B $(n \times n)$ -es mátrixok esetén ($n \in \mathbb{N}$)?

- (a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$; (b) $(AB)^T = A^T B^T$; (c) $A^s A^t = A^{st}$ ($s, t \in \mathbb{N}$).