

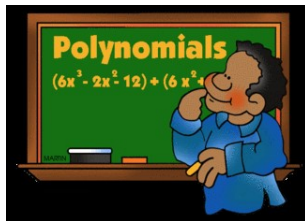
Polinomok 2.

Polynomials 2.

Katonáné dr. Horváth Eszter

Szeged, 2018. febr. 20.

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$



Definíció

Azt mondjuk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis*, ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p -hez.

Formálisan:

$$\forall f, g \in T[x], : p = fg \rightarrow (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis*, ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p -hez.

Formálisan:

$$\forall f, g \in T[x], : p = fg \rightarrow (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis*, ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p -hez.

Formálisan:

$$\forall f, g \in T[x], : p = fg \rightarrow (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis*, ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p -hez.

Formálisan:

$$\forall f, g \in T[x], : p = fg \rightarrow (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis*, ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p -hez.

Formálisan:

$$\forall f, g \in T[x], : p = fg \rightarrow (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis*, ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p -hez.

Formálisan:

$$\forall f, g \in T[x], : p = fg \rightarrow (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Definíció

Az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$

polinom $c \in T$ helyen vett helyettesítési értékén az

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \in T$$

elemet értjük.

Definíció

Az $\alpha \in T$ elem gyöke $f \in T[x]$ -nek, ha $f(\alpha) = 0$.

Definíció

Az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$

polinom $c \in T$ helyen vett helyettesítési értékén az

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \in T$$

elemet értjük.

Definíció

Az $\alpha \in T$ elem gyöke $f \in T[x]$ -nek, ha $f(\alpha) = 0$.

Definíció

Az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$

polinom $c \in T$ helyen vett helyettesítési értékén az

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \in T$$

elemet értjük.

Definíció

Az $\alpha \in T$ elem *gyöke* $f \in T[x]$ -nek, ha $f(\alpha) = 0$.

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c -t az f polinom T -beli egyik gyökének nevezzük.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke f -nek, ha az $x - c$ polinom osztója az f polinomnak ($T[x]$ -ben).

Bizonyítás:

⇒

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c -t az f polinom T -beli egyik gyökének nevezzük.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke f -nek, ha az $x - c$ polinom osztója az f polinomnak ($T[x]$ -ben).

Bizonyítás

Táblán

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c -t az f polinom T -beli egyik gyökének nevezzük.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke f -nek, ha az $x - c$ polinom osztója az f polinomnak ($T[x]$ -ben).

Bizonyítás

Táblán

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c -t az f polinom T -beli egyik gyökének nevezzük.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke f -nek, ha az $x - c$ polinom osztója az f polinomnak ($T[x]$ -ben).

Bizonyítás

Táblán.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c_1, \dots, c_k \in T$ páronként különböző elemek. Ez esetben a $c_1, \dots, c_k$ akkor és csak akkor gyökei f -nek, ha a $(x - c_1) \dots (x - c_k)$ osztója az f polinomnak ($T[x]$ -ben).

Bizonyítás

k szerinti teljes indukció

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c_1, \dots, c_k \in T$ páronként különböző elemek. Ez esetben a $c_1, \dots, c_k$ akkor és csak akkor gyökei f -nek, ha a $(x - c_1) \dots (x - c_k)$ osztója az f polinomnak ($T[x]$ -ben).

Bizonyítás

k szerinti teljes indukció

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c_1, \dots, c_k \in T$ páronként különböző elemek. Ez esetben a $c_1, \dots, c_k$ akkor és csak akkor gyökei f -nek, ha a $(x - c_1) \dots (x - c_k)$ osztója az f polinomnak ($T[x]$ -ben).

Bizonyítás

k szerinti teljes indukció

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n , akkor f -nek legfeljebb n különböző gyöke van T -ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n -edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T -beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n , akkor f -nek legfeljebb n különböző gyöke van T -ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n -edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T -beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n , akkor f -nek legfeljebb n különböző gyöke van T -ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n -edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T -beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n , akkor f -nek legfeljebb n különböző gyöke van T -ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n -edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T -beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n , akkor f -nek legfeljebb n különböző gyöke van T -ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n -edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T -beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.



Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Forrás: KOMMUNIKÁCIÓS ÉS MATEMATIKAI ALAPISMERETEK



Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.



Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN



Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN



Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

A komplex számtest felett egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha elsőfokú.

Bármely $f \in \mathbb{C}$ nemkonstans polinom felírható – mégpedig a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen –

$$f = a(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) \quad (a, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C})$$

alakban, ahol $a \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$) az f polinom főegyütthatója, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ pedig az f polinom (nem feltétlenül különböző) gyökei.

A komplex számtest felett egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha elsőfokú.

Bármely $f \in \mathbb{C}$ nemkonstans polinom felírható – mégpedig a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen –

$$f = a(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) \quad (a, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C})$$

alakban, ahol $a \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$) az f polinom főegyütthatója, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ pedig az f polinom (nem feltétlenül különböző) gyökei.

A komplex számtest felett egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha elsőfokú.

Bármely $f \in \mathbb{C}$ nemkonstans polinom felírható – mégpedig a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen –

$$f = a(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) \quad (a, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C})$$

alakban, ahol $a \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$) az f polinom főegyütthatója, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ pedig az f polinom (nem feltétlenül különböző) gyökei.

Tétel

Egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{R}[x]$ -ben, ha elsőfokú, vagy olyan másodfokú, aminek a diszkriminánsa negatív (azaz nincs valós gyöke).

Bizonyítás

Táblán

Tétel

Egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{R}[x]$ -ben, ha elsőfokú, vagy olyan másodfokú, aminek a diszkriminánsa negatív (azaz nincs valós gyöke).

Bizonyítás

Táblán

Tétel

Egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{R}[x]$ -ben, ha elsőfokú, vagy olyan másodfokú, aminek a diszkriminánsa negatív (azaz nincs valós gyöke).

Bizonyítás

Táblán.

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - 1)(x - (-1)).$$

$$\cdot (x - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - 1)(x - (-1)).$$

$$\cdot (x - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - 1)(x - (-1)) \cdot (x - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - 1)(x - (-1)).$$

$$\cdot (x - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - 1)(x - (-1)) \cdot (x - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - \sqrt{3})(x - (-\sqrt{3})) \cdot (x - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:

$$(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9).$$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - \sqrt{3})(x - (-\sqrt{3})) \cdot (x - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:

$$(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9).$$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - \sqrt{3})(x - (-\sqrt{3})) \cdot (x - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:

$$(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9).$$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - \sqrt{3})(x - (-\sqrt{3})) \cdot (x - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:

$$(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9).$$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - \sqrt{3})(x - (-\sqrt{3})) \cdot (x - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:

$$(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9).$$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:

$$\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:

$$(x - \sqrt{3})(x - (-\sqrt{3})) \cdot (x - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))(x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:

$$(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9).$$

Thank you for your attention!



Think, think, think.

Thank you for your attention!