

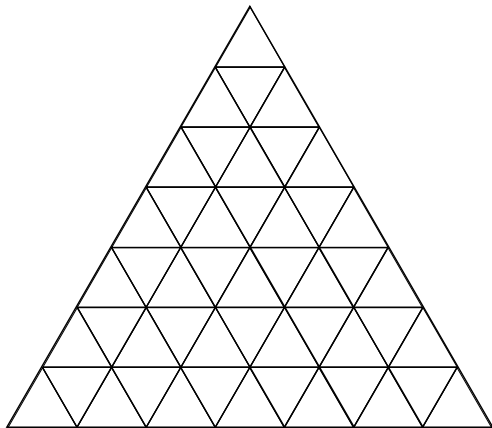
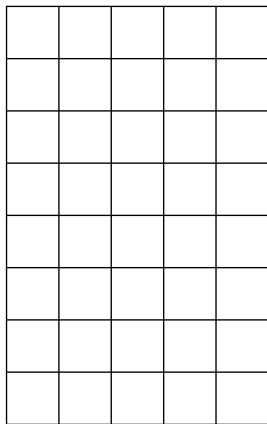
Szigetek és CD-független halmazok

Islands and CD-independent subsets

K. Horváth Eszter

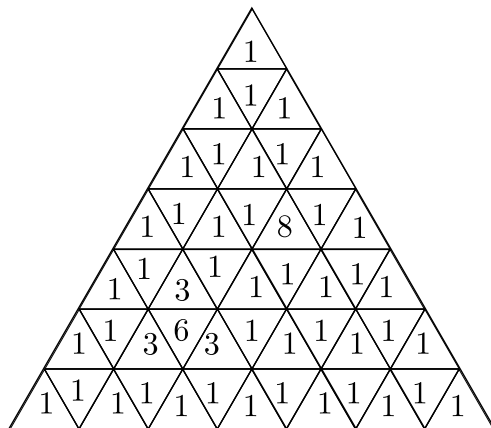
Szeged, 2018. febr. 20.





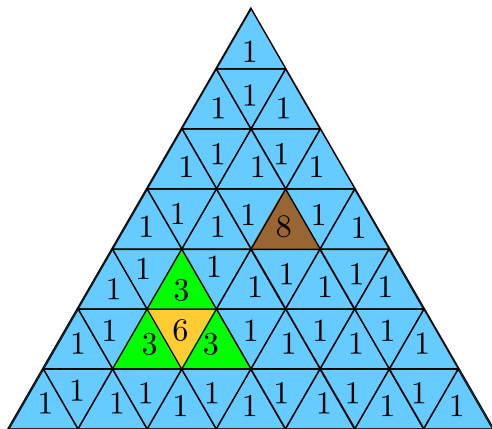
Rács

1	1	1	1	1
1	8	8	1	1
1	1	1	1	1
1	3	3	3	1
1	6	6	3	1
1	6	6	3	1
1	3	3	3	1
1	1	1	1	1



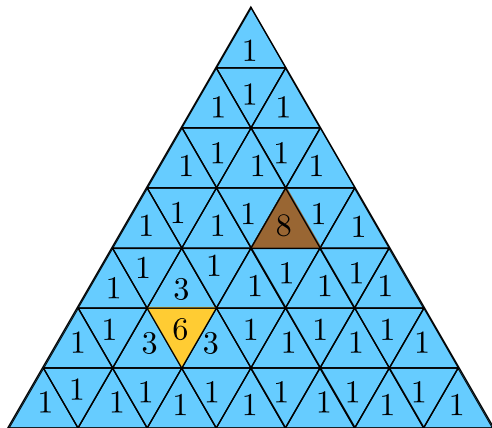
Rács, magasságfüggvény

1	1	1	1	1
1	8	8	1	1
1	1	1	1	1
1	3	3	3	1
1	6	6	3	1
1	6	6	3	1
1	3	3	3	1
1	1	1	1	1



Rács, magasságfüggvény, vízmagasság: 2

1	1	1	1	1
1	8	8	1	1
1	1	1	1	1
1	3	3	3	1
1	6	6	3	1
1	6	6	3	1
1	3	3	3	1
1	1	1	1	1



Rács, magasságfüggvény, vízmagasság: 4



Think, think, think.



Think, think, think.

• bizonyítási módszerek

• szigetek maximális száma

• körrellel vizsgálható

• szigetek maximális száma

• szigetek maximális száma

• szigetek maximális száma

• szigetek maximális száma

• szigetek maximális száma

• szigetek maximális száma

• szigetek maximális száma

• szigetek maximális száma

• szigetek maximális száma



Think, think, think.

- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok
- ...



Think, think, think.

- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok
- ...



Think, think, think.

- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok
- ...



Think, think, think.

- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok
- ...



- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok
- ...



- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok
- ...



- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok
- ...



- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok
- ...

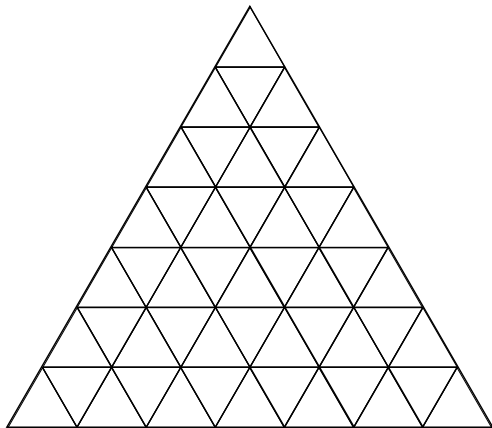
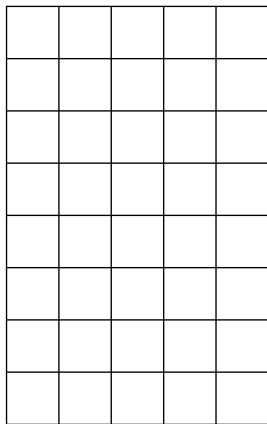


- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok

...

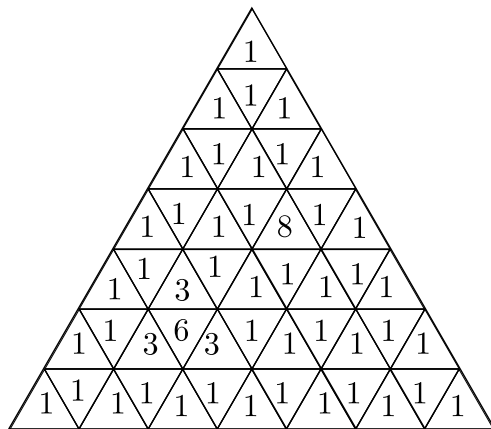


- bizonyítási módszerek
- szigetek maximális száma különféle rácson
- további összeszámlálási problémák
- hálóelméleten belüli vizsgálatok
- hálóértékű függvények vágatai
- folytonos esetek
- általánosítások
- didaktikai vizsgálatok
- ...

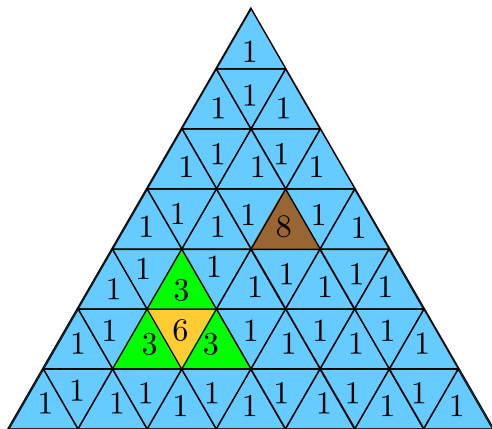
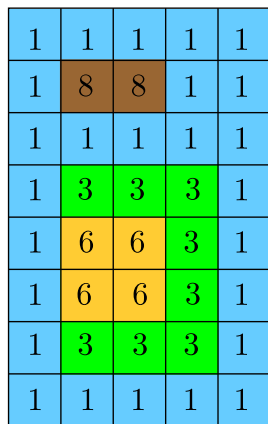


Rács

1	1	1	1	1
1	8	8	1	1
1	1	1	1	1
1	3	3	3	1
1	6	6	3	1
1	6	6	3	1
1	3	3	3	1
1	1	1	1	1

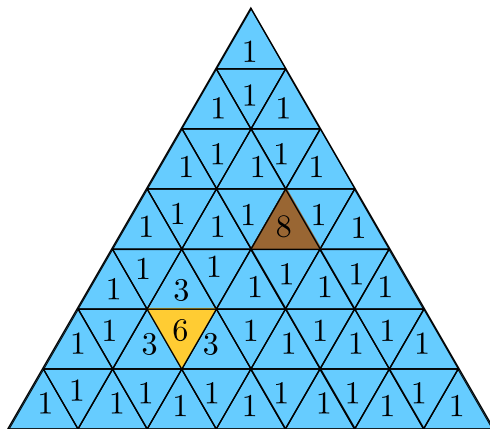


Rács, magasságfüggvény

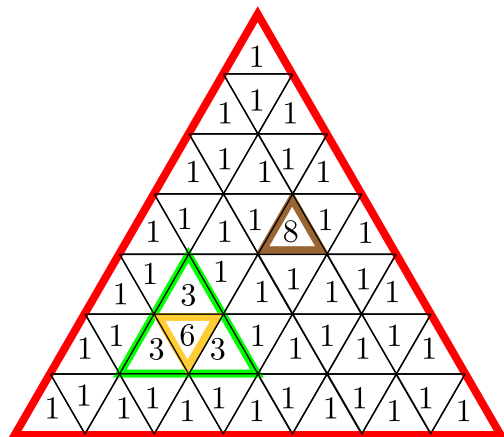
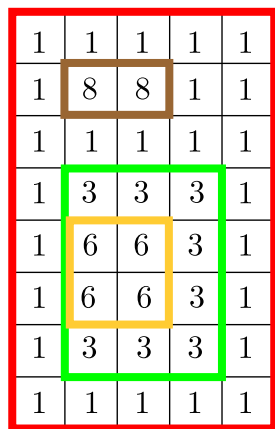


Rács, magasságfüggvény, vízmagasság: 2

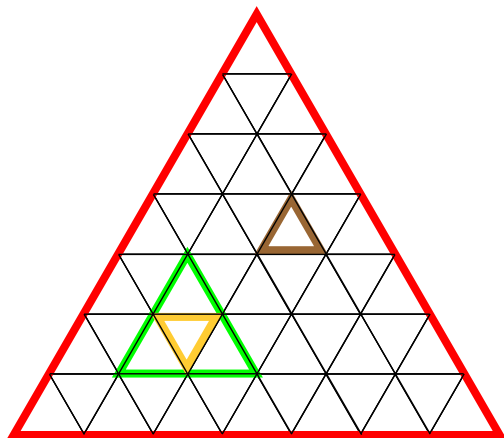
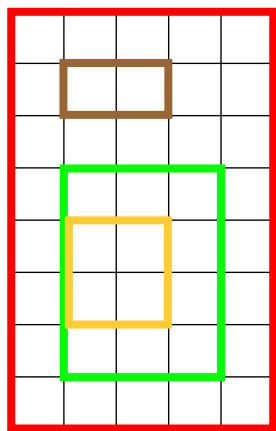
1	1	1	1	1
1	8	8	1	1
1	1	1	1	1
1	3	3	3	1
1	6	6	3	1
1	6	6	3	1
1	3	3	3	1
1	1	1	1	1



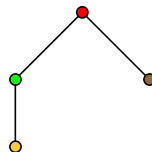
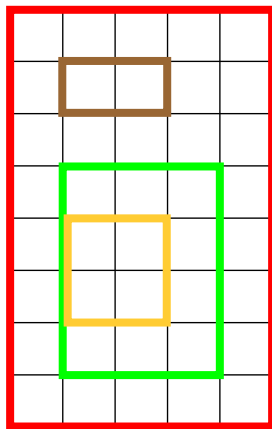
Rács, magasságfüggvény, vízmagasság: 4



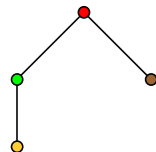
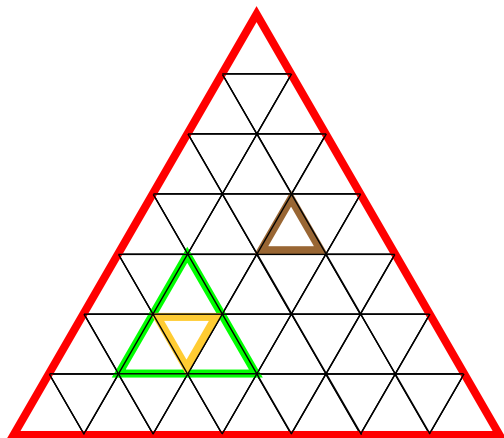
Rács, magasságfüggvény, szigetrendszer



CD-független: Comparable or Disjoint

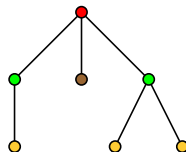
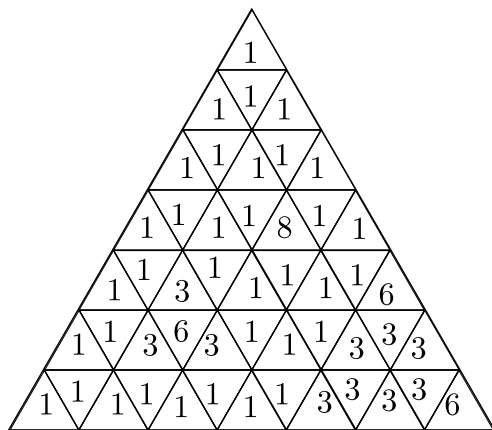


CD-független: Comparable or Disjoint



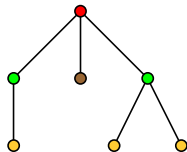
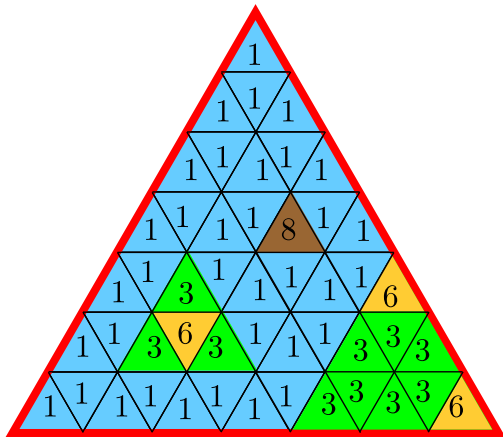
CD-független: Comparable or Disjoint

Tartalalmazási fa

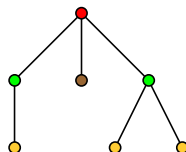
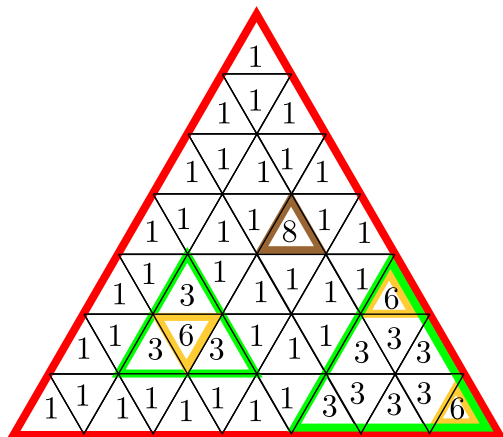


CD-független: Comparable or Disjoint

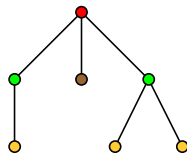
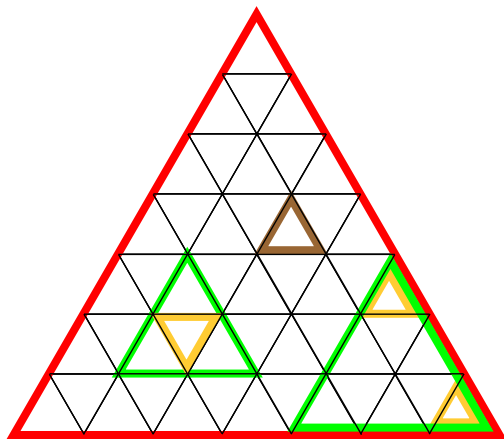
Tartalmazási fa



CD-független: Comparable or Disjoint



CD-független: Comparable or Disjoint



CD-független: Comparable or Disjoint

G. Czédli, M. Hartmann and E. T. Schmidt: CD-independent subsets in distributive lattices, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 74/1-2 (2009), 127-134.

Disztributív hálóban bármely két CD-bázis elemszáma megegyezik.

Ha egy hálóvarietás minden véges hálójában bármely két CD-bázis elemszáma azonos, akkor ez a hálóvarietás a disztributív hálók varietásával egyezik meg.

G. Czédli, M. Hartmann and E. T. Schmidt: CD-independent subsets in distributive lattices, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 74/1-2 (2009), 127-134.

Disztributív hálóban bármely két CD-bázis elemszáma megegyezik.

Ha egy hálóvarietás minden véges hálójában bármely két CD-bázis elemszáma azonos, akkor ez a hálóvarietás a disztributív hálók varietásával egyezik meg.

G. Czédli, M. Hartmann and E. T. Schmidt: CD-independent subsets in distributive lattices, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 74/1-2 (2009), 127-134.

Disztributív hálóban bármely két CD-bázis elemszáma megegyezik.

Ha egy hálóvarietás minden véges hálójában bármely két CD-bázis elemszáma azonos, akkor ez a hálóvarietás a disztributív hálók varietásával egyezik meg.

G. Czédli, M. Hartmann and E. T. Schmidt: CD-independent subsets in distributive lattices, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 74/1-2 (2009), 127-134.

Disztributív hálóban bármely két CD-bázis elemszáma megegyezik.

Ha egy hálóvarietás minden véges hálójában bármely két CD-bázis elemszáma azonos, akkor ez a hálóvarietás a disztributív hálók varietásával egyezik meg.

E. K. Horváth, S. Radeleczki: Notes on CD-independent subsets, Acta Sci.Math. Szeged, 78/1-2 (2012), 3.-24.

S. Foldes, E. K. Horváth, S. Radeleczki, T. Waldhauser: A general framework for island systems, Acta Sci.Math. Szeged, 81/1-2 (2015), 3.-24.

E. K. Horváth, S. Radeleczki: Notes on CD-independent subsets, Acta Sci.Math. Szeged, 78/1-2 (2012), 3.-24.

S. Foldes, E. K. Horváth, S. Radeleczki, T. Waldhauser: A general framework for island systems, Acta Sci.Math. Szeged, 81/1-2 (2015), 3.-24.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, legyen $a, b \in P$.

Az a és b elemeket *diszjunkt* elemeknek nevezzük és $a \perp b$ -vel jelöljük, ha

vagy $\mathbb{P}$ -ben van legkisebb elem $0 \in P$ és $\inf\{a, b\} = 0$,
vagy $\mathbb{P}$ -ben nincs 0 és a és b -nek nincs közös alsó korlátja.

Egy nemüres $X \subseteq P$ halmazt *CD-független részhalmaznak* nevezzük, ha bármely $x, y \in X$ -re $x \leq y$ vagy $y \leq x$, vagy $x \perp y$ teljesül.

A (tartalmazásra nézve) maximális CD-független részhalmazokat *CD-bázisoknak* nevezzük.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, legyen $a, b \in P$.

Az a és b elemeket *diszjunkt* elemeknek nevezzük és $a \perp b$ -vel jelöljük, ha

vagy $\mathbb{P}$ -ben van legkisebb elem $0 \in P$ és $\inf\{a, b\} = 0$,
vagy $\mathbb{P}$ -ben nincs 0 és a és b -nek nincs közös alsó korlátja.

Egy nemüres $X \subseteq P$ halmazt *CD-független részhalmaznak* nevezzük, ha bármely $x, y \in X$ -re $x \leq y$ vagy $y \leq x$, vagy $x \perp y$ teljesül.

A (tartalmazásra nézve) maximális CD-független részhalmazokat *CD-bázisoknak* nevezzük.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, legyen $a, b \in P$.

Az a és b elemeket *diszjunkt* elemeknek nevezzük és $a \perp b$ -vel jelöljük, ha

vagy $\mathbb{P}$ -ben van legkisebb elem $0 \in P$ és $\inf\{a, b\} = 0$,
vagy $\mathbb{P}$ -ben nincs 0 és a és b -nek nincs közös alsó korlátja.

Egy nemüres $X \subseteq P$ halmazt *CD-független részhalmaznak* nevezzük, ha bármely $x, y \in X$ -re $x \leq y$ vagy $y \leq x$, vagy $x \perp y$ teljesül.

A (tartalmazásra nézve) maximális CD-független részhalmazokat *CD-bázisoknak* nevezzük.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, legyen $a, b \in P$.

Az a és b elemeket *diszjunkt* elemeknek nevezzük és $a \perp b$ -vel jelöljük, ha

vagy $\mathbb{P}$ -ben van legkisebb elem $0 \in P$ és $\inf\{a, b\} = 0$,
vagy $\mathbb{P}$ -ben nincs 0 és a és b -nek nincs közös alsó korlátja.

Egy nemüres $X \subseteq P$ halmazt *CD-független részhalmaznak* nevezzük, ha bármely $x, y \in X$ -re $x \leq y$ vagy $y \leq x$, vagy $x \perp y$ teljesül.

A (tartalmazásra nézve) maximális CD-független részhalmazokat *CD-bázisoknak* nevezzük.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, legyen $a, b \in P$.

Az a és b elemeket *diszjunkt* elemeknek nevezzük és $a \perp b$ -vel jelöljük, ha

vagy $\mathbb{P}$ -ben van legkisebb elem $0 \in P$ és $\inf\{a, b\} = 0$,
vagy $\mathbb{P}$ -ben nincs 0 és a és b -nek nincs közös alsó korlátja.

Egy nemüres $X \subseteq P$ halmazt *CD-független részhalmaznak* nevezzük, ha bármely $x, y \in X$ -re $x \leq y$ vagy $y \leq x$, vagy $x \perp y$ teljesül.

A (tartalmazásra nézve) maximális CD-független részhalmazokat *CD-bázisoknak* nevezzük.

Definíció

A P részbenrendezett halmaz nemzérus elemeinek egy D nemüres halmazát *páronként diszjunkt elemhalmaznak* nevezzük $\mathbb{P}$ -ben, ha $x \perp y$ teljesül bármely $x, y \in D$, $x \neq y$ esetén; ha $\mathbb{P}$ -ek van 0-eleme, akkor $\{0\}$ -t is páronként diszjunkt elemhalmaznak tekintjük.

A D halmaz pontosan akkor alkot páronként diszjunkt elemhalmazt, ha D egy CD-független antilánc $\mathbb{P}$ -ben.

Definíció

A P részbenrendezett halmaz nemzérus elemeinek egy D nemüres halmazát *páronként diszjunkt elemhalmaznak* nevezzük $\mathbb{P}$ -ben, ha $x \perp y$ teljesül bármely $x, y \in D$, $x \neq y$ esetén; ha $\mathbb{P}$ -ek van 0-eleme, akkor $\{0\}$ -t is páronként diszjunkt elemhalmaznak tekintjük.

A D halmaz pontosan akkor alkot páronként diszjunkt elemhalmazt, ha D egy CD-független antilánc $\mathbb{P}$ -ben.

Definíció

A P részbenrendezett halmaz nemzérus elemeinek egy D nemüres halmazát *páronként diszjunkt elemhalmaznak* nevezzük $\mathbb{P}$ -ben, ha $x \perp y$ teljesül bármely $x, y \in D$, $x \neq y$ esetén; ha $\mathbb{P}$ -ek van 0-eleme, akkor $\{0\}$ -t is páronként diszjunkt elemhalmaznak tekintjük.

A D halmaz pontosan akkor alkot páronként diszjunkt elemhalmazt, ha D egy CD-független antilánc $\mathbb{P}$ -ben.

Definíció

A P részbenrendezett halmaz nemzérus elemeinek egy D nemüres halmazát *páronként diszjunkt elemhalmaznak* nevezzük $\mathbb{P}$ -ben, ha $x \perp y$ teljesül bármely $x, y \in D$, $x \neq y$ esetén; ha $\mathbb{P}$ -ek van 0 -eleme, akkor $\{0\}$ -t is páronként diszjunkt elemhalmaznak tekintjük.

A D halmaz pontosan akkor alkot páronként diszjunkt elemhalmazt, ha D egy CD-független antilánc $\mathbb{P}$ -ben.

.

Legyen $X \subseteq P$.

Az $\{y \in P \mid y \leq x \text{ valamely } x \in X\}$ rendezésideál jele: $\downarrow X$.

Bármely részbenrendezett halmaz rendezésideáljai (disztributív) hálót alkotnak a $\subseteq$ részbenrendezésre nézve.

Definíció

Há A_1, A_2 két ideál P -ben, akkor azt mondjuk, hogy A_2 dominálja A_1 -et, ha $A_1 \subseteq A_2$ -vel jelöljük, és $\downarrow A_1 \subseteq \downarrow A_2$.

Megjegyzés: $\leq$ részbenrendezés.

Legyen $X \subseteq P$.

Az $\{y \in P \mid y \leq x \text{ valamely } x \in X\}$ rendezésideál jele: $\downarrow X$.

Bármely részbenrendezett halmaz rendezésideáljai (disztributív) hálót alkotnak a $\subseteq$ részbenrendezésre nézve.

Definíció

Ha A_1, A_2 két antilánc P -ben, akkor azt mondjuk, hogy A_2 *dominálja* A_1 -et, s $A_1 \leq A_2$ -vel jelöljük, ha $\downarrow A_1 \subseteq \downarrow A_2$.

Megjegyzés: $\leq$ részbenrendezés.

Legyen $X \subseteq P$.

Az $\{y \in P \mid y \leq x \text{ valamely } x \in X\}$ rendezésideál jele: $\downarrow X$.

Bármely részbenrendezett halmaz rendezésideáljai (disztributív) hálót alkotnak a $\subseteq$ részbenrendezésre nézve.

Definíció

Ha A_1, A_2 két antilánc P -ben, akkor azt mondjuk, hogy A_2 *dominálja* A_1 -et, s $A_1 \leq A_2$ -vel jelöljük, ha $\downarrow A_1 \subseteq \downarrow A_2$.

Megjegyzés: $\leq$ részbenrendezés.

Legyen $X \subseteq P$.

Az $\{y \in P \mid y \leq x \text{ valamely } x \in X\}$ rendezésideál jele: $\downarrow X$.

Bármely részbenrendezett halmaz rendezésideáljai (disztributív) hálót alkotnak a $\subseteq$ részbenrendezésre nézve.

Definíció

Ha A_1, A_2 két antilánc $\mathbb{P}$ -ben, akkor azt mondjuk, hogy A_2 *dominálja* A_1 -et, s $A_1 \leq A_2$ -vel jelöljük, ha $\downarrow A_1 \subseteq \downarrow A_2$.

Megjegyzés: $\leq$ részbenrendezés.

Legyen $X \subseteq P$.

Az $\{y \in P \mid y \leq x \text{ valamely } x \in X\}$ rendezésideál jele: $\downarrow X$.

Bármely részbenrendezett halmaz rendezésideáljai (disztributív) hálót alkotnak a $\subseteq$ részbenrendezésre nézve.

Definíció

Ha A_1, A_2 két antilánc $\mathbb{P}$ -ben, akkor azt mondjuk, hogy A_2 *dominálja* A_1 -et, s $A_1 \leq A_2$ -vel jelöljük, ha $\downarrow A_1 \subseteq \downarrow A_2$.

Megjegyzés: $\leq$ részbenrendezés.

Legyen $X \subseteq P$.

Az $\{y \in P \mid y \leq x \text{ valamely } x \in X\}$ rendezésideál jele: $\downarrow X$.

Bármely részbenrendezett halmaz rendezésideáljai (disztributív) hálót alkotnak a $\subseteq$ részbenrendezésre nézve.

Definíció

Ha A_1, A_2 két antilánc $\mathbb{P}$ -ben, akkor azt mondjuk, hogy A_2 *dominálja* A_1 -et, s $A_1 \leq A_2$ -vel jelöljük, ha $\downarrow A_1 \subseteq \downarrow A_2$.

Megjegyzés: $\leq$ részbenrendezés.

Jelölje $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ a $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz páronként diszjunkt elemhalmazainak összességét.

Mivel a páronként diszjunkt elemhalmazok antiláncokat alkotnak $\mathbb{P}$ -ben, ezért $(\mathcal{D}(\mathbb{P}), \leq)$ is részbenrendezett halmaz.

Jelölje $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ a $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz páronként diszjunkt elemhalmazainak összességét.

Mivel a páronként diszjunkt elemhalmazok antiláncokat alkotnak $\mathbb{P}$ -ben, ezért $(\mathcal{D}(\mathbb{P}), \leq)$ is részbenrendezett halmaz.

Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen B egy CD-bázis egy véges $\mathbb{P} = (P, \leq)$, részbenrendezett halmazban, és legyen $|B| = n$.

Ekkor létezik $\{D_i\}_{1 \leq i \leq n}$ maximális lánc a $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ részbenrendezett halmazban úgy, hogy $B = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Továbbá, $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ bármely $\{D_i\}_{1 \leq i \leq m}$ maximális láncára a $D := \bigcup_{i=1}^m D_i$ halmaz CD-bázist alkot a $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmazban úgy, hogy $|D| = m$.

Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen B egy CD-bázis egy véges $\mathbb{P} = (P, \leq)$, részbenrendezett halmazban, és legyen $|B| = n$.

Ekkor létezik $\{D_i\}_{1 \leq i \leq n}$ maximális lánc a $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ részbenrendezett halmazban úgy, hogy $B = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Továbbá, $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ bármely $\{D_i\}_{1 \leq i \leq m}$ maximális láncára a $D := \bigcup_{i=1}^m D_i$ halmaz CD-bázist alkot a $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmazban úgy, hogy $|D| = m$.

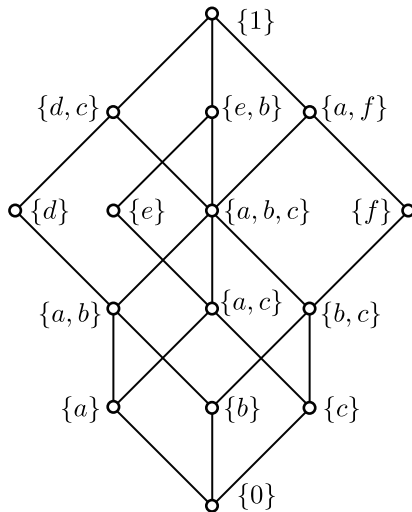
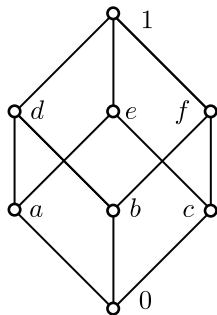
Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen B egy CD-bázis egy véges $\mathbb{P} = (P, \leq)$, részbenrendezett halmazban, és legyen $|B| = n$.

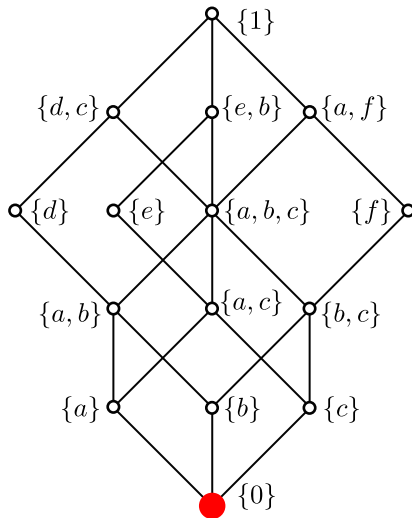
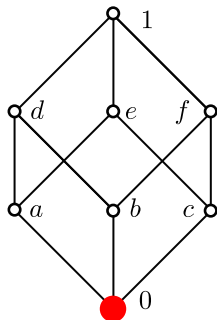
Ekkor létezik $\{D_i\}_{1 \leq i \leq n}$ maximális lánc a $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ részbenrendezett halmazban úgy, hogy $B = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

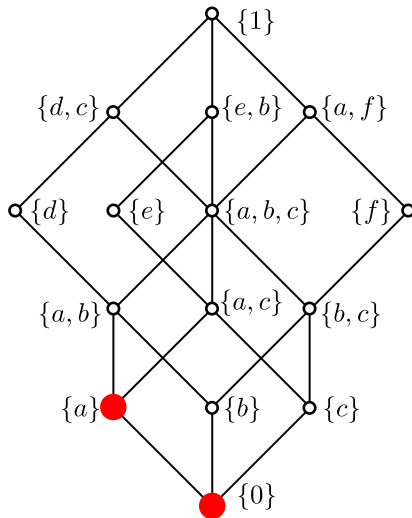
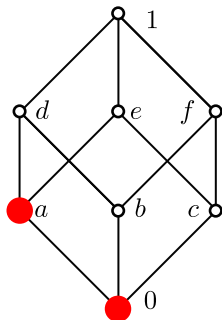
Továbbá, $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ bármely $\{D_i\}_{1 \leq i \leq m}$ maximális láncára a $D := \bigcup_{i=1}^m D_i$ halmaz CD-bázist alkot a $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmazban úgy, hogy $|D| = m$.

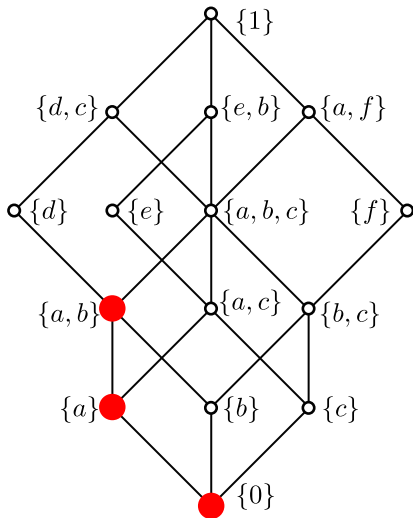
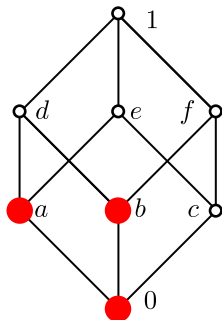
$\mathbb{P}_1$ és $\mathcal{D}(\mathbb{P}_1)$

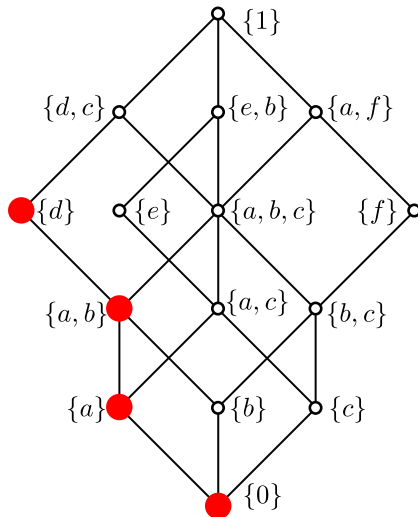
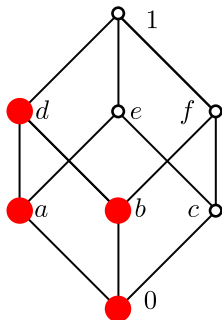


$\mathbb{P}_1$ és $\mathcal{D}(\mathbb{P}_1)$

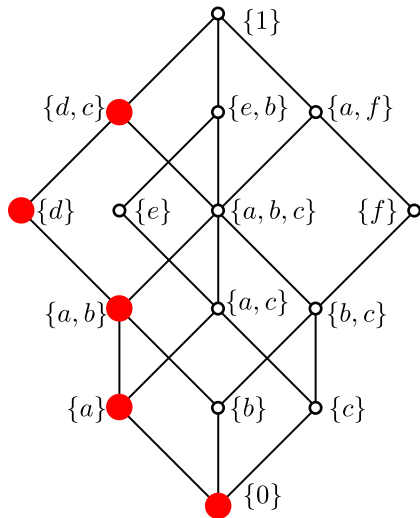
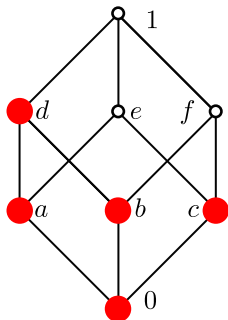


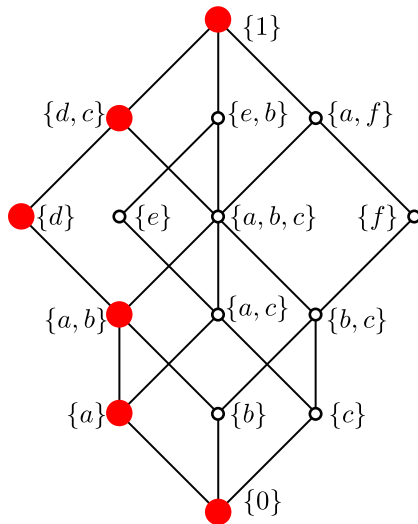
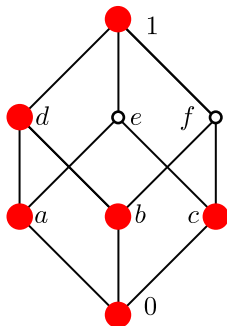




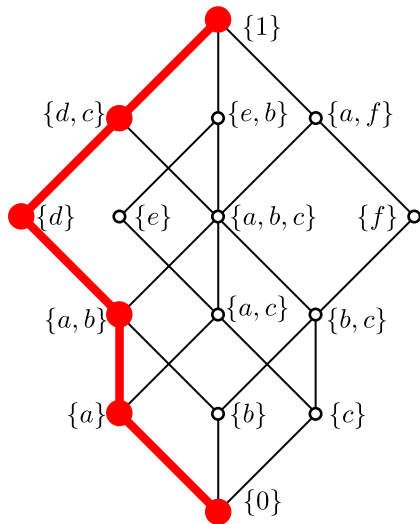
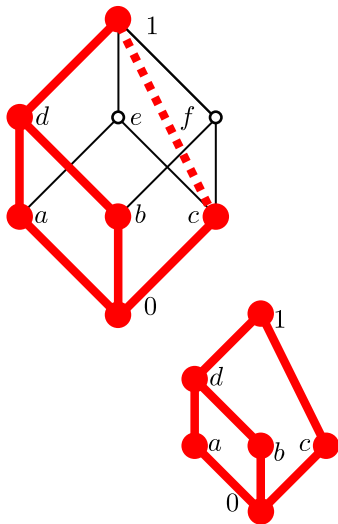


$\mathbb{P}_1$ és $\mathcal{D}(\mathbb{P}_1)$

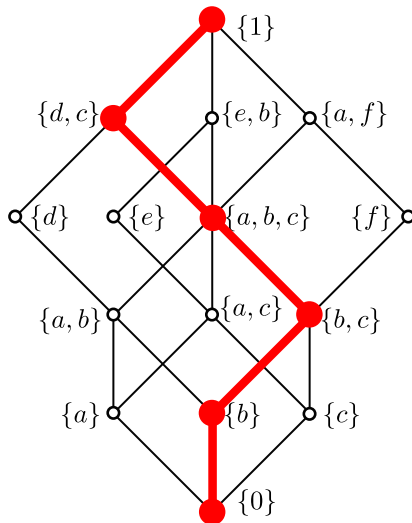
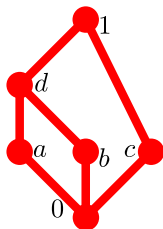
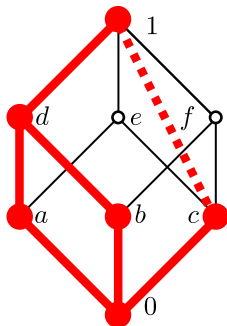


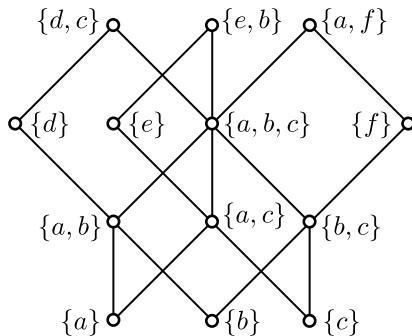
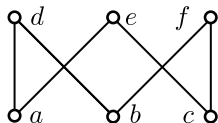


$\mathbb{P}_1$ és $\mathcal{D}(\mathbb{P}_1)$, maximális lánc $\mathcal{D}(\mathbb{P}_1)$ -ben

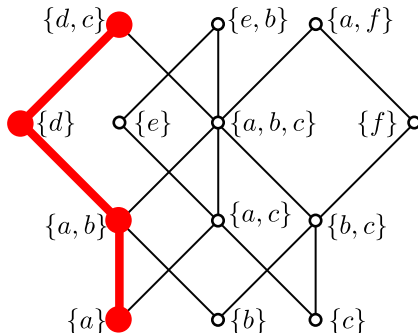
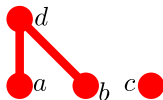
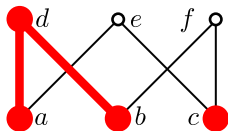


$\mathbb{P}_1$ és $\mathcal{D}(\mathbb{P}_1)$, maximális lánc $\mathcal{D}(\mathbb{P}_1)$ -ben

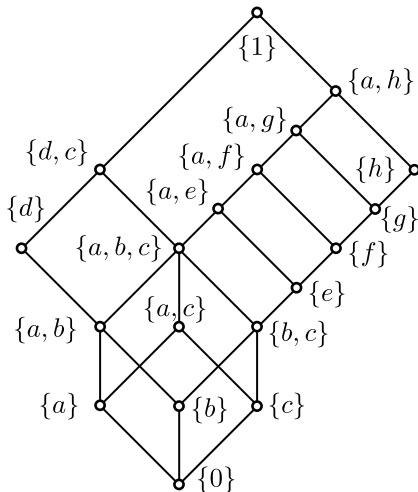
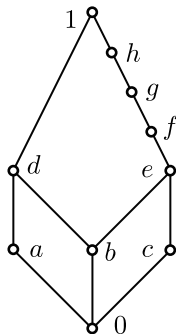




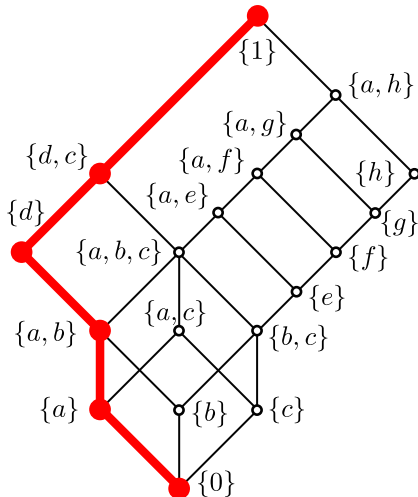
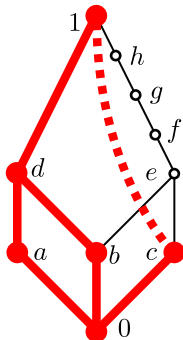
$\mathbb{P}_2$ és $\mathcal{D}(\mathbb{P}_2)$, maximális lánc $\mathcal{D}(\mathbb{P}_2)$ -ben



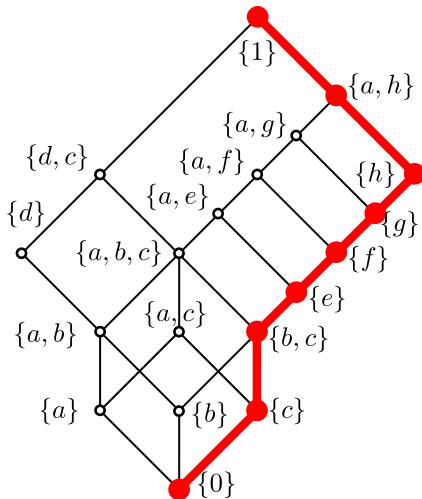
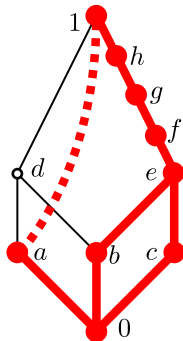
$\mathbb{P}_3$ and $\mathcal{D}(\mathbb{P}_3)$



$\mathbb{P}_3$ és $\mathcal{D}(\mathbb{P}_3)$, maximális lánc $\mathcal{D}(\mathbb{P}_3)$ -ban



$\mathbb{P}_3$ és $\mathcal{D}(\mathbb{P}_3)$, maximális lánc $\mathcal{D}(\mathbb{P}_3)$ -ban



Any poset $(P, \leq)$ without least element becomes a poset with 0 by adding a new element 0 to P . In this way both the number of the elements in the CD-bases of $\mathbb{P}$ and the length of the maximal chains in $\mathcal{D}(P)$ are increased by one. Therefore, without loss of generality we may assume that $\mathbb{P}$ contains 0 and $|P| \geq 2$.

To prove the first part of Theorem 1.5, assume that B is a CD-base in $\mathbb{P}$. Then clearly $0 \in B$ and $|B| \geq 2$. Let $D_1 = \max(B)$. Take any $m_1 \in D_1$ and form $D_2 = \max(B \setminus \{m_1\})$. Then, in view of Lemma 1.7, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(P)$, $D_1 \succ D_2$, and D_1 is a maximal element in $\mathcal{D}(P)$. Further, suppose that we already have a sequence (D_i, m_i) , $1 \leq i \leq k$ ($k \geq 2$) such that $m_i \in D_i$, $D_1 \succ \dots \succ D_k$ in $\mathcal{D}(P)$ and

$$D_k = \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}).$$

We show that for all $i \in \{1, \dots, k-1\}$ and $d \in D_k$ we have $d \not\geq m_i$. (5)

This is clear for $i = 1$ since $m_1 \in \max(B)$ and $d \in B$, $d \neq m_1$. If $2 \leq i \leq k-1$, then $m_i \in \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{i-1}\})$, and since $d \in B \setminus \{m_1, \dots, m_{i-1}\}$, $d \geq m_i$ would imply $m_i = d \in B \setminus \{m_1, \dots, m_i, \dots, m_{k-1}\}$, a contradiction. Further, if $|B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}| \geq 2$, then form the next set $D_{k+1} := \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k\})$ and let $m_{k+1} \in D_{k+1}$. Since D_{k+1} is an antichain in the CD-base B , it is a disjoint set, and clearly $D_{k+1} \neq D_k$. In order to prove $D_k \succ D_{k+1}$, consider the subposet $(I(D_k), \leq)$. By Proposition 1.4, $B_k := B \cap I(D_k)$ is a CD-base in $(I(D_k), \leq)$. We claim that

$$B_k = B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}.$$

Indeed, $D_k = \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\})$ implies $B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\} \subseteq B \cap I(D_k) = B_k$. On the other hand, (5) implies $\{m_1, \dots, m_{k-1}\} \cap I(D_k) = \emptyset$, whence we get $B_k \subseteq B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}$, proving our claim. Hence $D_k = \max(B_k)$, and $D_{k+1} = \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k\}) = \max(B_k \setminus \{m_k\})$.

Now, by applying Lemma 1.7, we obtain that $D_{k+1} \prec D_k$ holds in $\mathcal{D}(I(D_k))$. Finally, observe that any $S \in \mathcal{D}(P)$ with $S \leq D_k$ is also a disjoint set in $(I(D_k), \leq)$ according to (A). Moreover, since $D_{k+1} \prec D_k$ holds in $\mathcal{D}(I(D_k))$, $D_{k+1} \leq S \leq D_k$ implies either $S = D_k$ or $S = D_{k+1}$. This means that $D_{k+1} \prec D_k$ holds in $\mathcal{D}(P)$, too.

Thus we conclude by induction that the chain $D_1 \succ \dots \succ D_k \succ \dots$ can be continued as long as the condition $|B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}| \geq 2$ is still valid. Since P is finite, the process stops after finite - let say $n-1$ steps, when $|B \setminus \{m_1, \dots, m_{n-1}\}| = 1$, and the last set is $D_n = B \setminus \{m_1, \dots, m_{n-1}\}$. As $0 \in B$, and since $0 \notin \max(X)$ whenever $|X| \geq 2$, we get $\{0\} = B \setminus \{m_1, \dots, m_{n-1}\} = D_n$. As D_1 is a maximal element and $D_n = \{0\}$ is the least element in $\mathcal{D}(P)$, $D_1 \succ \dots \succ D_n$ is a maximal chain in $\mathcal{D}(P)$. Since $B = \{m_1, \dots, m_{n-1}, 0\}$, we obtain $|B| = n$.

Any poset $(P, \leq)$ without least element becomes a poset with 0 by adding a new element 0 to P . In this way both the number of the elements in the CD-bases of $\mathbb{P}$ and the length of the maximal chains in $\mathcal{D}(P)$ are increased by one. Therefore, without loss of generality we may assume that $\mathbb{P}$ contains 0 and $|P| \geq 2$.

To prove the first part of Theorem 1.5, assume that B is a CD-base in $\mathbb{P}$. Then clearly $0 \in B$ and $|B| \geq 2$. Let $D_1 = \max(B)$. Take any $m_1 \in D_1$ and form $D_2 = \max(B \setminus \{m_1\})$. Then, in view of Lemma 1.7, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(P)$, $D_1 \succ D_2$, and D_1 is a maximal element in $\mathcal{D}(P)$. Further, suppose that we already have a sequence (D_i, m_i) , $1 \leq i \leq k$ ($k \geq 2$) such that $m_i \in D_i$, $D_1 \succ \dots \succ D_k$ in $\mathcal{D}(P)$ and

$$D_k = \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}).$$

We show that for all $i \in \{1, \dots, k-1\}$ and $d \in D_k$ we have $d \not\geq m_i$. (5)

This is clear for $i = 1$ since $m_1 \in \max(B)$ and $d \in B$, $d \neq m_1$. If $2 \leq i \leq k-1$, then $m_i \in \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{i-1}\})$, and since $d \in B \setminus \{m_1, \dots, m_{i-1}\}$, $d \geq m_i$ would imply $m_i = d \in B \setminus \{m_1, \dots, m_i, \dots, m_{k-1}\}$, a contradiction. Further, if $|B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}| \geq 2$, then form the next set $D_{k+1} := \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k\})$ and let $m_{k+1} \in D_{k+1}$. Since D_{k+1} is an antichain in the CD-base B , it is a disjoint set, and clearly $D_{k+1} \neq D_k$. In order to prove $D_k \succ D_{k+1}$, consider the subposet $(I(D_k), \leq)$. By Proposition 1.4, $B_k := B \cap I(D_k)$ is a CD-base in $(I(D_k), \leq)$. We claim that

$$B_k = B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}.$$

Indeed, $D_k = \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\})$ implies $B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\} \subseteq B \cap I(D_k) = B_k$. On the other hand, (5) implies $\{m_1, \dots, m_{k-1}\} \cap I(D_k) = \emptyset$, whence we get $B_k \subseteq B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}$, proving our claim. Hence $D_k = \max(B_k)$, and $D_{k+1} = \max(B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k\}) = \max(B_k \setminus \{m_k\})$.

Now, by applying Lemma 1.7, we obtain that $D_{k+1} \prec D_k$ holds in $\mathcal{D}(I(D_k))$. Finally, observe that any $S \in \mathcal{D}(P)$ with $S \leq D_k$ is also a disjoint set in $(I(D_k), \leq)$ according to (A). Moreover, since $D_{k+1} \prec D_k$ holds in $\mathcal{D}(I(D_k))$, $D_{k+1} \leq S \leq D_k$ implies either $S = D_k$ or $S = D_{k+1}$. This means that $D_{k+1} \prec D_k$ holds in $\mathcal{D}(P)$, too.

Thus we conclude by induction that the chain $D_1 \succ \dots \succ D_k \succ \dots$ can be continued as long as the condition $|B \setminus \{m_1, \dots, m_{k-1}\}| \geq 2$ is still valid. Since P is finite, the process stops after finite - let say $n-1$ steps, when $|B \setminus \{m_1, \dots, m_{n-1}\}| = 1$, and the last set is $D_n = B \setminus \{m_1, \dots, m_{n-1}\}$. As $0 \in B$, and since $0 \notin \max(X)$ whenever $|X| \geq 2$, we get $\{0\} = B \setminus \{m_1, \dots, m_{n-1}\} = D_n$. As D_1 is a maximal element and $D_n = \{0\}$ is the least element in $\mathcal{D}(P)$, $D_1 \succ \dots \succ D_n$ is a maximal chain in $\mathcal{D}(P)$. Since $B = \{m_1, \dots, m_{n-1}, 0\}$, we obtain $|B| = n$.

To prove the second part of Theorem 1.5, assume that the disjoint sets $D_1, \dots, D_m$ form a maximal chain $\mathcal{C}$:

$$D_1 \prec \dots \prec D_m$$

in $\mathcal{D}(P)$. Then $D_1 = \{0\}$. Let $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$. First, we prove that the set D is CD-independent. Indeed, take any $x, y \in D$, i.e. $x \in D_i$ and $y \in D_j$ for some $1 \leq i \leq j \leq m$. Then $x \leq z$ for some $z \in D_j$ by (A). Assume that x and y are not comparable. Then $z \neq y$, and $z \perp y$ implies $x \perp y$ by (1). This means that D is CD-independent. Now, assume that D is not a CD-base. Then there is an $x \in P \setminus D$ such that $D \cup \{x\}$ is CD-independent. Next, consider the set

$$\mathcal{E} = \{D_i \in \mathcal{C} \mid x \not\leq d \text{ for all } d \in D_i\}.$$

Clearly, $D_1 = \{0\} \in \mathcal{E}$ since $x \not\leq 0$. Let $D_i \in \mathcal{E}$. Then $d \perp x$ or $d < x$ holds for each $d \in D_i$ because $D \cup \{x\}$ is CD-independent. Thus $T_i := \{x\} \cup \{d \in D_i \mid d \not\leq x\}$ is a disjoint set, and $d < x$ or $d \in T_i$ holds for all $d \in D_i$. Hence

$$D_i < T_i, \quad (6)$$

in view of (A) and $x \notin D_i$. Observe that $D_m \notin \mathcal{E}$ since $D_m < T_m$ is not possible because $\mathcal{C}$ is a maximal chain. Thus, there exists a $k \leq m-1$ such that $D_k \in \mathcal{E}$ but $D_{k+1} \notin \mathcal{E}$. This means that $x \not\leq d$ for all $d \in D_k$, and $x \leq z$ holds for some $z \in D_{k+1}$. Then $T_k = \{x\} \cup \{d \in D_k \mid d \not\leq x\} \in \mathcal{D}(P)$ satisfies $D_k < T_k$ in virtue of (6). Since $T_k \setminus \{x\} \subseteq D_k < D_{k+1}$ and $x \leq z$, for each $t \in T_k$ there is a $v \in D_{k+1}$ with $t \leq v$. In view of (A) we get $D_k < T_k < D_{k+1}$ because $x \notin D_{k+1} \subseteq D$. Since this fact contradicts $D_k \prec D_{k+1}$, we conclude that D is a CD-base. Further, in view of (4), it follows that any set $D_i \setminus D_{i-1}$, $2 \leq i \leq m$ contains exactly one element, let say, a_i . Observe also that

$$D = \bigcup_{i=1}^m D_i = D_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^m (D_i \setminus D_{i-1}) \right).$$

Since $D_1 = \{0\}$ and $D_i \setminus D_{i-1} = \{a_i\}$, we get $D = \{0, a_2, \dots, a_m\}$. We prove that all the elements $0, a_2, \dots, a_m$ are different: Clearly, $0 \notin \{a_2, \dots, a_m\}$. Take any $i, j \in \{2, \dots, m\}$, $i < j$. Then $D_i \leq D_{j-1} \prec D_j$. As $a_i \in D_i$, there is a $b \in D_{j-1}$ with $0 < a_i \leq b$ by (A). As $a_j \in D_j \setminus D_{j-1}$, $b < a_j$ or $b \perp a_j$ holds by (2). Since both facts imply $a_i \neq a_j$, we conclude that D contains m different elements. $\square$

1. Lemma

Ha $D_1 \prec D_2$ a $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ részbenrendezett halmazban, akkor

$$D_2 = \{a\} \cup \{y \in D_1 \setminus \{0\} \mid y \perp a\},$$

ahol

$$S = \{s \in P \setminus (D_1 \cup \{0\}) \mid y \perp s \text{ vagy } y < s \text{ bármely } y \in D_1\text{-re}\},$$

és $a \in \min(S)$.

Továbbá

$$D_1 \prec \{a\} \cup \{y \in D_1 \setminus \{0\} \mid y \perp a\}$$

teljesül bármely $a \in \min(S)$ -re.

1. Lemma

Ha $D_1 \prec D_2$ a $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ részbenrendezett halmazban, akkor

$$D_2 = \{a\} \cup \{y \in D_1 \setminus \{0\} \mid y \perp a\},$$

ahol

$$S = \{s \in P \setminus (D_1 \cup \{0\}) \mid y \perp s \text{ vagy } y < s \text{ bármely } y \in D_1\text{-re}\},$$

és $a \in \min(S)$.

Továbbá

$$D_1 \prec \{a\} \cup \{y \in D_1 \setminus \{0\} \mid y \perp a\}$$

teljesül bármely $a \in \min(S)$ -re.

1. Lemma

Ha $D_1 \prec D_2$ a $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ részbenrendezett halmazban, akkor

$$D_2 = \{a\} \cup \{y \in D_1 \setminus \{0\} \mid y \perp a\},$$

ahol

$$S = \{s \in P \setminus (D_1 \cup \{0\}) \mid y \perp s \text{ vagy } y < s \text{ bármely } y \in D_1\text{-re}\},$$

és $a \in \min(S)$.

Továbbá

$$D_1 \prec \{a\} \cup \{y \in D_1 \setminus \{0\} \mid y \perp a\}$$

teljesül bármely $a \in \min(S)$ -re.

1. Lemma

Ha $D_1 \prec D_2$ a $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ részbenrendezett halmazban, akkor

$$D_2 = \{a\} \cup \{y \in D_1 \setminus \{0\} \mid y \perp a\},$$

ahol

$$S = \{s \in P \setminus (D_1 \cup \{0\}) \mid y \perp s \text{ vagy } y < s \text{ bármely } y \in D_1\text{-re}\},$$

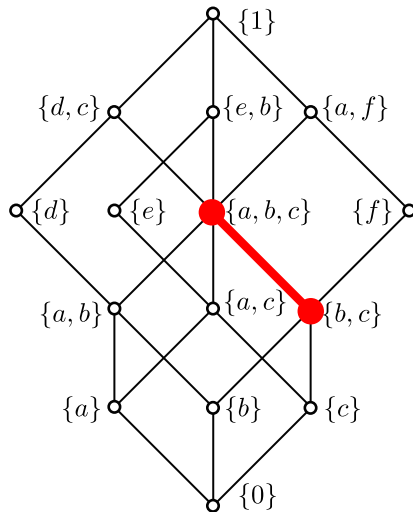
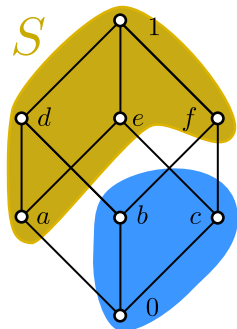
és $a \in \min(S)$.

Továbbá

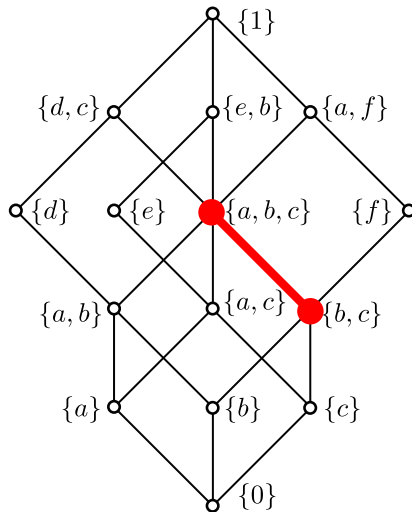
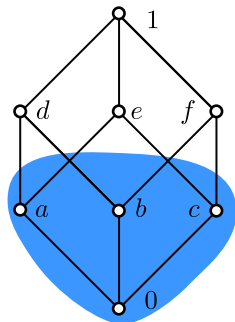
$$D_1 \prec \{a\} \cup \{y \in D_1 \setminus \{0\} \mid y \perp a\}$$

teljesül bármely $a \in \min(S)$ -re.

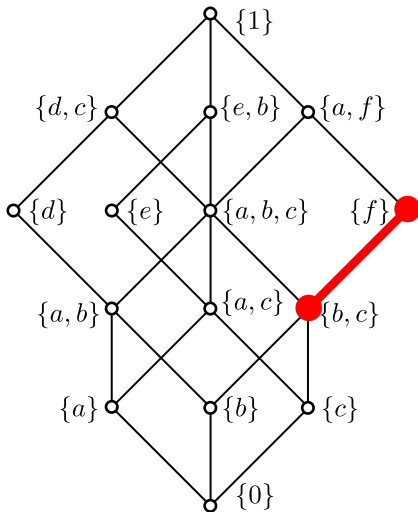
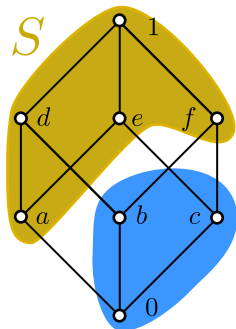
Illusztráció az 1. Lemmához



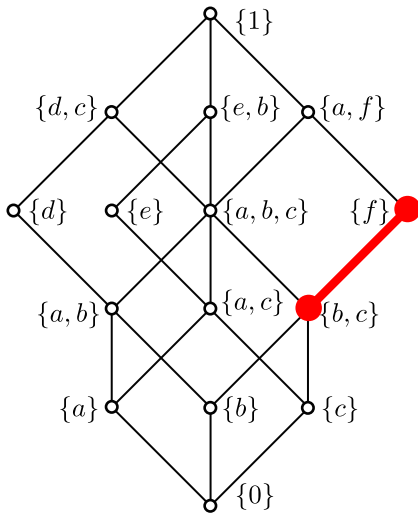
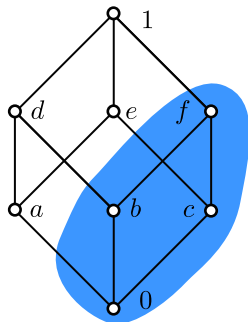
Illusztráció az 1. Lemmához



Illusztráció az 1. Lemmához



Illusztráció az 1. Lemmához



2. Lemma

Legyen B egy legalább kételemű CD-bázisa egy $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak, $M = \max(B)$, és $m \in M$. Ekkor M and $N := \max(B \setminus \{m\})$ páronként diszjunkt elemhalmazok.

Továbbá M maximális elem $\mathcal{D}(P)$ -ben, valamint $N \prec M$ teljesül $\mathcal{D}(P)$ -ben.

2. Lemma

Legyen B egy legalább kételemű CD-bázisa egy $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak, $M = \max(B)$, és $m \in M$. Ekkor M and $N := \max(B \setminus \{m\})$ páronként diszjunkt elemhalmazok.

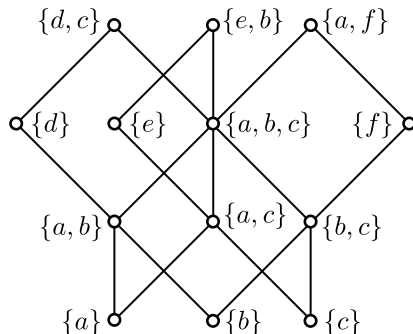
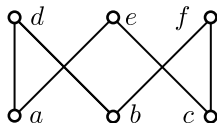
Továbbá M maximális elem $\mathcal{D}(P)$ -ben, valamint $N \prec M$ teljesül $\mathcal{D}(P)$ -ben.

2. Lemma

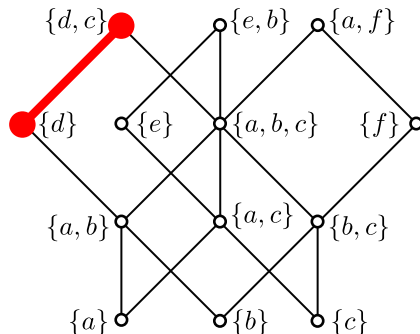
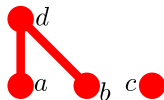
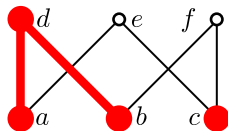
Legyen B egy legalább kételemű CD-bázisa egy $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak, $M = \max(B)$, és $m \in M$. Ekkor M and $N := \max(B \setminus \{m\})$ páronként diszjunkt elemhalmazok.

Továbbá M maximális elem $\mathcal{D}(P)$ -ben, valamint $N \prec M$ teljesül $\mathcal{D}(P)$ -ben.

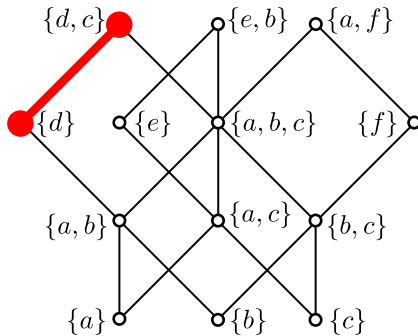
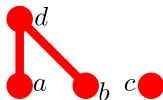
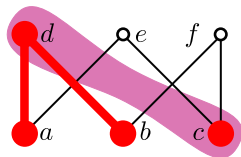
Illusztráció a 2. Lemmához



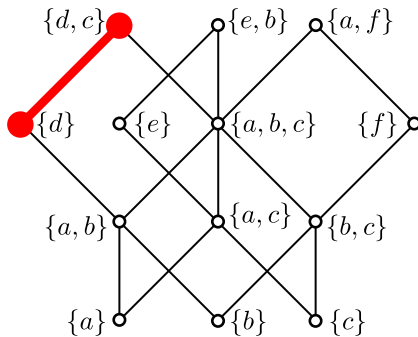
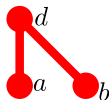
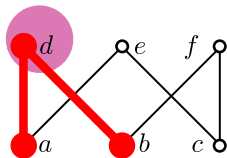
Illusztráció a 2. Lemmához



Illusztráció a 2. Lemmához



Illusztráció a 2. Lemmához



Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ véges részbenrendezett halmaz.

A $\mathbb{P}$ -t *fokszámozottnak* (vagy *fokszámozott részbenrendezett halmaznak*) nevezzük, ha minden maximális lánc azonos elemszámú.

A $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz CD-bázisai akkor és csak akkor azonos elemszámúak, ha $\mathcal{D}(P)$ fokszámozott.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ véges részbenrendezett halmaz.

A $\mathbb{P}$ -t *fokszámozottnak* (vagy *fokszámozott részbenrendezett halmaznak*) nevezzük, ha minden maximális lánc azonos elemszámú.

A $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz CD-bázisai akkor és csak akkor azonos elemszámúak, ha $\mathcal{D}(P)$ fokszámozott.

Legyen $B \subseteq P$ egy CD-bázis $\mathbb{P}$ -ben, és tekintsük a $(B, \leq)$ részbenrendezett halmazt.

Ekkor bármely $\mathcal{D}(B)$ -beli $\mathcal{C} = \{D_i\}_{1 \leq i \leq m}$ maximális lánc $\mathcal{D}(P)$ -ben is maximális lánc.

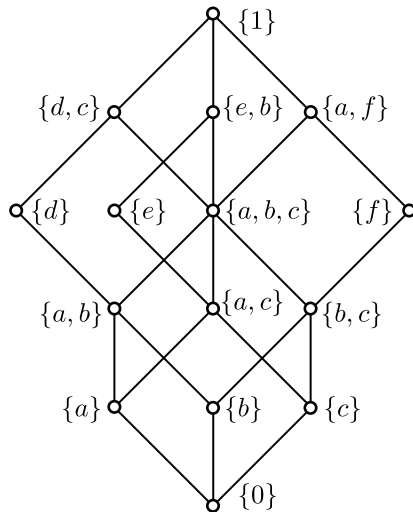
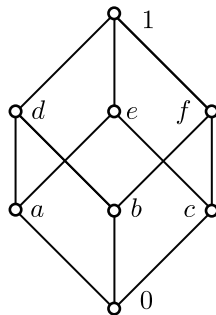
Legyen $B \subseteq P$ egy CD-bázis $\mathbb{P}$ -ben, és tekintsük a $(B, \leq)$ részbenrendezett halmazt.

Ekkor bármely $\mathcal{D}(B)$ -beli $\mathcal{C} = \{D_i\}_{1 \leq i \leq m}$ maximális lánc $\mathcal{D}(P)$ -ben is maximális lánc.

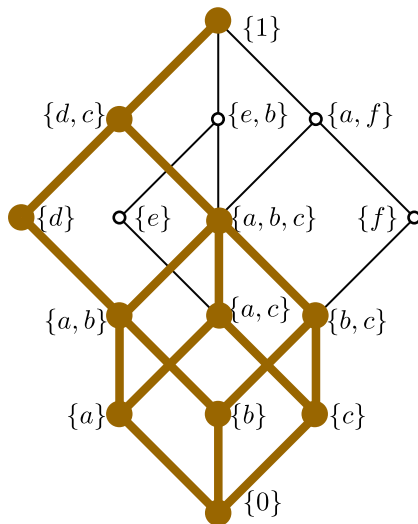
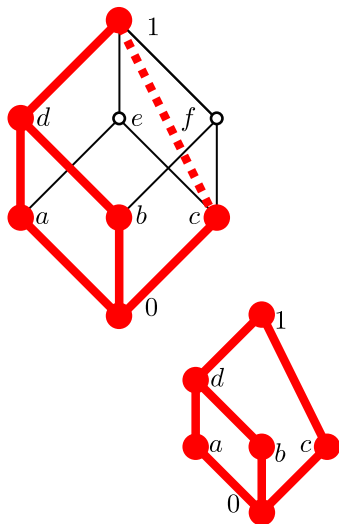
Legyen $B \subseteq P$ egy CD-bázis $\mathbb{P}$ -ben, és tekintsük a $(B, \leq)$ részbenrendezett halmazt.

Ekkor bármely $\mathcal{D}(B)$ -beli $\mathcal{C} = \{D_i\}_{1 \leq i \leq m}$ maximális lánc $\mathcal{D}(P)$ -ben is maximális lánc.

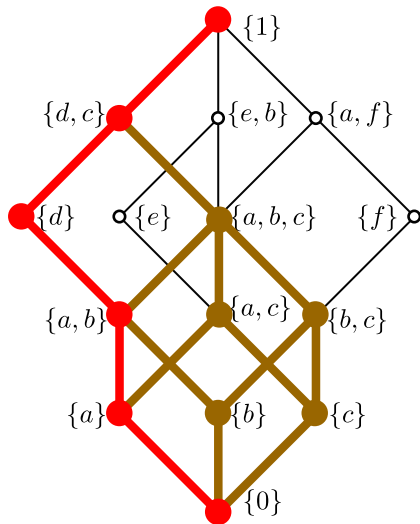
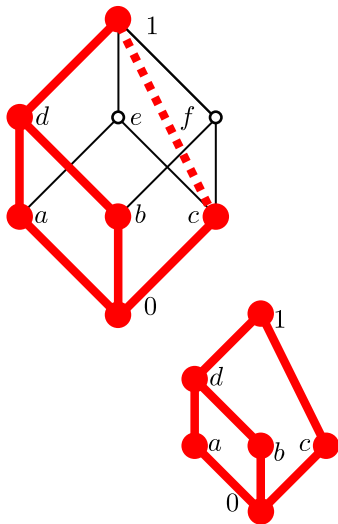
Illusztráció: P és $\mathcal{D}(P)$



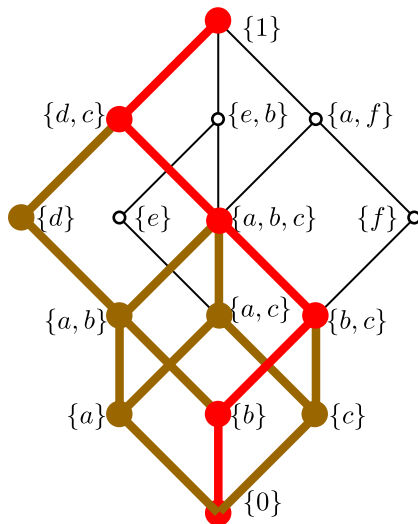
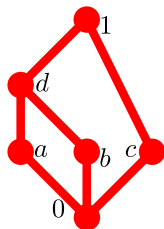
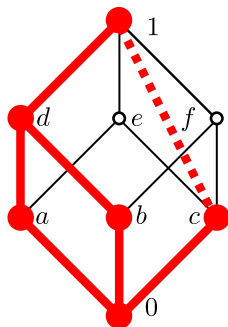
Illusztráció: P és $\mathcal{D}(P)$, B és $\mathcal{D}(B)$



Illusztráció: P és $\mathcal{D}(P)$, B és $\mathcal{D}(B)$; egy maximális lánc

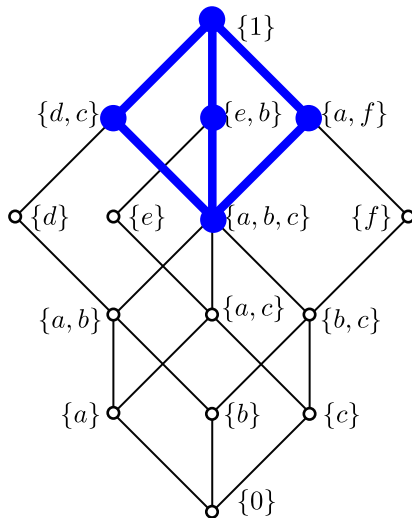
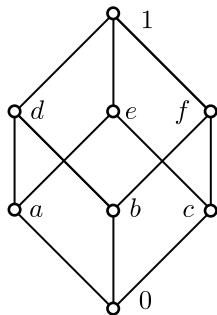


Illusztráció: P és $\mathcal{D}(P)$, B és $\mathcal{D}(B)$; másik maximális lánc



Azt mondjuk, hogy a $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz D páronként diszjunkt elemhalmaza *teljes*, ha nincs olyan $p \in P \setminus D$, hogy $D \cup \{p\}$ is páronként diszjunkt elemhalmaz.

P , $\mathcal{D}(P)$ and $\mathcal{DC}(P)$



Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ olyan véges részbenrendezett halmaz, amelynek van legkisebb eleme (0) . A következő feltételek ekvivalensek:

(i) A $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz CD-bázisai azonos elemszámúak.

(ii) $\mathcal{D}(P)$ foksámozott.

(iii) $\mathcal{DC}(P)$ foksámozott.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ olyan véges részbenrendezett halmaz, amelynek van legkisebb eleme (0) . A következő feltételek ekvivalensek:

(i) $A \mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz CD -bázisai azonos elemszámúak.

(ii) $\mathcal{D}(P)$ fokszámozott.

(iii) $\mathcal{DC}(P)$ fokszámozott.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ olyan véges részbenrendezett halmaz, amelynek van legkisebb eleme (0) . A következő feltételek ekvivalensek:

(i) $A \mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz CD -bázisai azonos elemszámúak.

(ii) $\mathcal{D}(P)$ fokszámozott.

(iii) $\mathcal{DC}(P)$ fokszámozott.

A 0-val (legkisebb elemmel) és 1-gyel (legnagyobb elemmel) rendelkező részbenrendezett halmazokat *korlátos* részbenrendezett halmazoknak nevezzük.

Egy 0-val rendelkező $\mathbb{L} = (L, \leq)$ hálót *0-modulárisnak* nevezzük ha bármely $a, b, c \in L$ esetén

$$a \leq b \text{ és } b \wedge c = 0 \text{ esetén } b \wedge (a \vee c) = a \quad (M_0)$$

Kongruencia-disztributív varietás algebráinak toleranciahálója *0-moduláris* (de nem szükségképpen moduláris).

Ha (M_0) teljesül abban az esetben, ha a atom és $c \prec b \vee c$, akkor L -et *gyengén 0-moduláris* hálónak nevezzük.

A 0-val (legkisebb elemmel) és 1-gyel (legnagyobb elemmel) rendelkező részbenrendezett halmazokat *korlátos* részbenrendezett halmazoknak nevezzük.

Egy 0-val rendelkező $\mathbb{L} = (L, \leq)$ hálót *0-modulárisnak* nevezzük ha bármely $a, b, c \in L$ esetén

$$a \leq b \text{ és } b \wedge c = 0 \text{ esetén } b \wedge (a \vee c) = a \quad (M_0,)$$

Kongruencia-disztributív varietás algebráinak toleranciahálója *0-moduláris* (de nem szükségképpen moduláris).

Ha (M_0) teljesül abban az esetben, ha a atom és $c \prec b \vee c$, akkor L -et *gyengén 0-moduláris* hálónak nevezzük.

A 0-val (legkisebb elemmel) és 1-gyel (legnagyobb elemmel) rendelkező részbenrendezett halmazokat *korlátos* részbenrendezett halmazoknak nevezzük.

Egy 0-val rendelkező $\mathbb{L} = (L, \leq)$ hálót *0-modulárisnak* nevezzük ha bármely $a, b, c \in L$ esetén

$$a \leq b \text{ és } b \wedge c = 0 \text{ esetén } b \wedge (a \vee c) = a \quad (M_0,)$$

Kongruencia-disztributív varietás algebráinak toleranciahálója *0-moduláris* (de nem szükségképpen moduláris).

Ha (M_0) teljesül abban az esetben, ha a atom és $c \prec b \vee c$, akkor L -et *gyengén 0-moduláris* hálónak nevezzük.

A 0-val (legkisebb elemmel) és 1-gyel (legnagyobb elemmel) rendelkező részbenrendezett halmazokat *korlátos* részbenrendezett halmazoknak nevezzük.

Egy 0-val rendelkező $\mathbb{L} = (L, \leq)$ hálót *0-modulárisnak* nevezzük ha bármely $a, b, c \in L$ esetén

$$a \leq b \text{ és } b \wedge c = 0 \text{ esetén } b \wedge (a \vee c) = a \quad (M_0,)$$

Kongruencia-disztributív varietás algebráinak toleranciahálója *0-moduláris* (de nem szükségképpen moduláris).

Ha (M_0) teljesül abban az esetben, ha a atom és $c \prec b \vee c$, akkor L -et *gyengén 0-moduláris* hálónak nevezzük.

L -et *alulról féligmoduláris hálónak* nevezzük, ha bármely $a, b, c \in L$ esetén $b \prec c$ -ből következik $a \wedge b \preceq a \wedge c$.

Az egyesítés-féligdisztributív *alulról féligmoduláris hálók* éppen a véges konvex geometriák zárt halmazainak hálói.

Bármely *alulról féligmoduláris háló* gyengén 0-moduláris.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz gyengén 0-moduláris, ha $a \vee c$ és $b \vee c$ létezése esetén (M_0) említett gyengített változata érvényes.

L -et *alulról féligmoduláris hálónak* nevezzük, ha bármely $a, b, c \in L$ esetén $b \prec c$ -ből következik $a \wedge b \preceq a \wedge c$.

Az egyesítés-féligdisztributív *alulról féligmoduláris hálók* éppen a véges konvex geometriák zárt halmazainak hálói.

Bármely *alulról féligmoduláris háló* gyengén 0-moduláris.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz gyengén 0-moduláris, ha $a \vee c$ és $b \vee c$ létezése esetén (M_0) említett gyengített változata érvényes.

L -et *alulról féligmoduláris hálónak* nevezzük, ha bármely $a, b, c \in L$ esetén $b \prec c$ -ből következik $a \wedge b \preceq a \wedge c$.

Az egyesítés-féligdisztributív *alulról féligmoduláris hálók* éppen a véges konvex geometriák zárt halmazainak hálói.

Bármely *alulról féligmoduláris háló* gyengén 0-moduláris.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{P}$ részbenrendezett halmaz gyengén 0-moduláris, ha $a \vee c$ és $b \vee c$ létezése esetén (M_0) említett gyengített változata érvényes.

Legyen $\mathbb{P}$ véges korlátos részbenrendezett halmaz.

$\mathbb{P}$ minden főideálja gyengén 0-moduláris, akkor $A(\mathbb{P}) \cup C$ egy CD-bázis $\mathbb{P}$ minden C maximális láncára.

$\mathbb{P}$ minden főideálja gyengén 0-moduláris és $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ fokszámozott, akkor $\mathbb{P}$ is fokszámozott, és $\mathbb{P}$ bármely CD-bázisa $|A(\mathbb{P})| + l(\mathbb{P})$ számú elemet tartalmaz.

Véges korlátos részbenrendezett halmazok

Legyen $\mathbb{P}$ véges korlátos részbenrendezett halmaz.

$\mathbb{P}$ minden főideálja gyengén 0-moduláris, akkor $A(\mathbb{P}) \cup C$ egy CD-bázis $\mathbb{P}$ minden C maximális láncára.

$\mathbb{P}$ minden főideálja gyengén 0-moduláris és $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ fokszámozott, akkor $\mathbb{P}$ is fokszámozott, és $\mathbb{P}$ bármely CD-bázisa $|A(\mathbb{P})| + I(\mathbb{P})$ számú elemet tartalmaz.

Véges korlátos részbenrendezett halmazok

Legyen $\mathbb{P}$ véges korlátos részbenrendezett halmaz.

$\mathbb{P}$ minden főideálja gyengén 0-moduláris, akkor $A(\mathbb{P}) \cup C$ egy CD-bázis $\mathbb{P}$ minden C maximális láncára.

$\mathbb{P}$ minden főideálja gyengén 0-moduláris és $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ fokszámozott, akkor $\mathbb{P}$ is fokszámozott, és $\mathbb{P}$ bármely CD-bázisa $|A(\mathbb{P})| + l(\mathbb{P})$ számú elemet tartalmaz.

Részbenrendezett halmaz legkisebb elemmel (0-val)

Lemma

Legyen P egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz P -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik P -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(P)$ -ben.

Érdekesebb, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(P)$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Részbenrendezett halmaz legkisebb elemmel (0-val)

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Pl. $\mathbb{P} = \mathbb{N}$, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\} & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Részbenrendezett halmaz legkisebb elemmel (0-val)

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Pl. $\mathbb{P} = \mathbb{N}$, $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\}, & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Részbenrendezett halmaz legkisebb elemmel (0-val)

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Legyen $a_j \in a_i$, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_j \mid j \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in I\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\} & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in I, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Legyen $a_j \in A_j = \{0, 1\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}, D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset \\ \{0\}, & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Speciálisan, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Speciálisan, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Speciálisan, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Speciálisan, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Részbenrendezett halmaz legkisebb elemmel (0-val)

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Speciálisan, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Részbenrendezett halmaz legkisebb elemmel (0-val)

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Speciálisan, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Lemma

Legyen $\mathbb{P}$ egy 0-val rendelkező részbenrendezett halmaz. Legyen $K \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, és bármely $k \in K$ -ra legyen D_k páronként diszjunkt elemhalmaz $\mathbb{P}$ -ben.

Ha minden $f \in \prod_{k \in K} D_k$ kiválasztási függvényre a $\bigwedge_{k \in K} f(k)$ létezik $\mathbb{P}$ -ben, akkor $\bigwedge_{k \in K} D_k$ szintén létezik $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Speciálisan, ha $K = \{1, 2\}$ és $D_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $D_2 = \{b_j \mid j \in J\} \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ úgy, hogy minden $a_i \wedge b_j$ létezik, akkor

$$D_1 \wedge D_2 = \begin{cases} M, & \text{ha } M \neq \emptyset; \\ \{0\} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol $M := \{a_i \wedge b_j \mid i \in I, j \in J, a_i \wedge b_j \neq 0\}$.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló.

Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (*diszjunkt párokra nézve disztributív*), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

(*) Ha $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ dp-disztributív félháló. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

(**) Ha $\mathbb{P}$ teljesít (*)-t, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ dp-disztributív félháló is lesz.

Disztributív pár

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló.
Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (diszjunkt párokra nézve disztributív), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló, ahol $(\mathbb{P})$ dp-disztributív félháló. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Tétel bizonyítását a következő tétel bizonyítására visszavezethetjük.

Disztributív pár

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló.
Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (diszjunkt párokra nézve disztributív), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló, és legyen $\mathbb{P}$ dp-disztributív félháló. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Az előző tétel egyenértékű a következő állítással is nézve:

Disztributív pár

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló.
Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (diszjunkt párokra nézve disztributív), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló.
Az $(\mathbb{P})$ *dp-disztributív félháló*. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Tudjuk, hogy $(\mathcal{D}(\mathbb{P}), \cup)$ disztributív félháló.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló.
Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (diszjunkt párokra nézve disztributív), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

(i) Ha $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ dp-disztributív félháló. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló.
Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (*diszjunkt párokra nézve disztributív*), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

(i) Ha $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ dp-disztributív félháló. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Disztributív pár

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló. Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (*diszjunkt párokra nézve disztributív*), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

(i) Ha $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ dp-disztributív félháló. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

Disztributív pár

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló. Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (diszjunkt párokra nézve *disztributív*), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

(i) Ha $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ dp-disztributív félháló. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

(ii) Ha P teljes háló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ egy dp-disztributív teljes háló.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló. Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (diszjunkt párokra nézve *disztributív*), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

(i) Ha $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ dp-disztributív félháló. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

(ii) Ha $\mathbb{P}$ teljes háló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ egy dp-disztributív teljes háló.

Disztributív pár

Legyen $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló. Az $a, b \in P$ párt *disztributív párnak* nevezzük, ha $a \vee b$ létezik, továbbá $c \in P$ -re $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is létezik minden $c \in P$ -re, és ezenkívül $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$ is teljesül.

Azt mondjuk, hogy $(P, \wedge)$ *dp-disztributív* (*diszjunkt párokra nézve disztributív*), ha bármely diszjunkt $a, b \in P$ pár disztributív párt alkot.

2. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

(i) Ha $\mathbb{P} = (P, \wedge)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező félháló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ dp-disztributív félháló. Továbbá, ha bármely $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{P})$ -re, ha $D_1 \cup D_2$ egy CD-független részhalmaz, akkor D_1, D_2 is a disztributív pár $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ -ben.

(ii) Ha $\mathbb{P}$ teljes háló, akkor $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ egy dp-disztributív teljes háló.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, és legyen $A \subseteq P$. Azt mondjuk, hogy $(A, \leq)$ *részhálój*a $(P, \leq)$ -nek, ha $(A, \leq)$ háló, és bármely $a, b \in A$ esetén $\{a, b\}$ infimuma és szuprémuma ugyanaz $(A, \leq)$ -ban, mint $\mathbb{P}$ -ben.

3. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező részbenrendezett halmaz, és B egy CD-bázis P -ben. Ekkor $(D(B), \leq)$ ismételt $\mathbb{P}$ -re vonatkozó részhálója $(D(P), \leq)$ -nek.

Ha P egy $\wedge$ -félháló, akkor bármely $D \in D(P)$ -re és $D_1, D_2 \in D(B)$ -re

$$(D_1 \vee D_2) \wedge D = (D_1 \wedge D) \vee (D_2 \wedge D)$$

teljesül $(D(P), \leq)$ -ben.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, és legyen $A \subseteq P$. Azt mondjuk, hogy $(A, \leq)$ *részhálója* $(P, \leq)$ -nek, ha $(A, \leq)$ háló, és bármely $a, b \in A$ esetén $\{a, b\}$ infimuma és szuprémuma ugyanaz $(A, \leq)$ -ban, mint $\mathbb{P}$ -ben.

3. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $P = (P, \leq)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező részbenrendezett halmaz, és B egy CD-bázis P -ben. Ekkor $(\mathcal{D}(B), \leq)$ disztributív fedés-őrző részhálója $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -nek.

Ha P egy $\wedge$ -félháló, akkor bármely $D \in \mathcal{D}(P)$ -re és $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(B)$ -re

$$(D_1 \vee D_2) \wedge D = (D_1 \wedge D) \vee (D_2 \wedge D)$$

teljesül $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -ben.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, és legyen $A \subseteq P$. Azt mondjuk, hogy $(A, \leq)$ *részhalója* $(P, \leq)$ -nek, ha $(A, \leq)$ háló, és bármely $a, b \in A$ esetén $\{a, b\}$ infimuma és szuprémuma ugyanaz $(A, \leq)$ -ben, mint $\mathbb{P}$ -ben.

3. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $P = (P, \leq)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező részbenrendezett halmaz, és B egy CD-bázis P -ben. Ekkor $(\mathcal{D}(B), \leq)$ disztributív fedés-őrző részhalója $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -nek.

Ha P egy $\wedge$ -félháló, akkor bármely $D \in \mathcal{D}(P)$ -re és $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(B)$ -re

$$(D_1 \vee D_2) \wedge D = (D_1 \wedge D) \vee (D_2 \wedge D)$$

teljesül $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -ben.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, és legyen $A \subseteq P$. Azt mondjuk, hogy $(A, \leq)$ *részhálój*a $(P, \leq)$ -nek, ha $(A, \leq)$ háló, és bármely $a, b \in A$ esetén $\{a, b\}$ infimuma és szuprémuma ugyanaz $(A, \leq)$ -ban, mint $\mathbb{P}$ -ben.

3. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező részbenrendezett halmaz, és B egy CD-bázis P -ben. Ekkor $(\mathcal{D}(B), \leq)$ disztributív fedés-őrző részhálój $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -nek.

Ha $\mathbb{P}$ egy $\wedge$ -félháló, akkor bármely $D \in \mathcal{D}(P)$ -re és $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(B)$ -re

$$(D_1 \vee D_2) \wedge D = (D_1 \wedge D) \vee (D_2 \wedge D)$$

teljesül $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -ben.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, és legyen $A \subseteq P$. Azt mondjuk, hogy $(A, \leq)$ *részhálój*a $(P, \leq)$ -nek, ha $(A, \leq)$ háló, és bármely $a, b \in A$ esetén $\{a, b\}$ infimuma és szuprémuma ugyanaz $(A, \leq)$ -ban, mint $\mathbb{P}$ -ben.

3. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező részbenrendezett halmaz, és B egy CD-bázis P -ben. Ekkor $(\mathcal{D}(B), \leq)$ disztributív fedés-őrző részhálój $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -nek.

Ha $\mathbb{P}$ egy $\wedge$ -félháló, akkor bármely $D \in \mathcal{D}(P)$ -re és $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(B)$ -re

$$(D_1 \vee D_2) \wedge D = (D_1 \wedge D) \vee (D_2 \wedge D)$$

teljesül $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -ben.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, és legyen $A \subseteq P$. Azt mondjuk, hogy $(A, \leq)$ *részhálój*a $(P, \leq)$ -nek, ha $(A, \leq)$ háló, és bármely $a, b \in A$ esetén $\{a, b\}$ infimuma és szuprémuma ugyanaz $(A, \leq)$ -ban, mint $\mathbb{P}$ -ben.

3. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező részbenrendezett halmaz, és B egy CD-bázis P -ben. Ekkor $(\mathcal{D}(B), \leq)$ disztributív fedés-őrző részhálój $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -nek.

Ha $\mathbb{P}$ egy $\wedge$ -félháló, akkor bármely $D \in \mathcal{D}(P)$ -re és $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(B)$ -re

$$(D_1 \vee D_2) \wedge D = (D_1 \wedge D) \vee (D_2 \wedge D)$$

teljesül $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -ben.

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ részbenrendezett halmaz, és legyen $A \subseteq P$. Azt mondjuk, hogy $(A, \leq)$ *részhálój*a $(P, \leq)$ -nek, ha $(A, \leq)$ háló, és bármely $a, b \in A$ esetén $\{a, b\}$ infimuma és szuprémuma ugyanaz $(A, \leq)$ -ban, mint $\mathbb{P}$ -ben.

3. Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen $\mathbb{P} = (P, \leq)$ egy legkisebb elemmel (0-val) rendelkező részbenrendezett halmaz, és B egy CD-bázis P -ben. Ekkor $(\mathcal{D}(B), \leq)$ disztributív fedés-őrző részhálój $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -nek.

Ha $\mathbb{P}$ egy $\wedge$ -félháló, akkor bármely $D \in \mathcal{D}(P)$ -re és $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(B)$ -re

$$(D_1 \vee D_2) \wedge D = (D_1 \wedge D) \vee (D_2 \wedge D)$$

teljesül $(\mathcal{D}(P), \leq)$ -ben.

Azt mondjuk, hogy az L háló *0-disztributív*, ha tetszőleges $a, b, x \in L$ esetén az $x \wedge a = 0$ és az $x \wedge b = 0$ együttes teljesüléséből következik $x \wedge (a \vee b) = 0$.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{L}$ háló *gyengén 0-disztributív*, ha a fenti implikáció $a \wedge b = 0$ esetén teljesül.

Megjegyzés

Ha D páronként diszjunkt elemhalmaz egy 0-disztributív hálóban, és $|D| \geq 2$, akkor könnyű látni, hogy tetszőleges két $d_1, d_2 \in D$ elemet helyettesíthetjük a két elem egyesítésével, $d_1 \vee d_2$ -vel.

Azt mondjuk, hogy az L háló *0-disztributív*, ha tetszőleges $a, b, x \in L$ esetén az $x \wedge a = 0$ és az $x \wedge b = 0$ együttes teljesüléséből következik $x \wedge (a \vee b) = 0$.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{L}$ háló *gyengén 0-disztributív*, ha a fenti implikáció $a \wedge b = 0$ esetén teljesül.

Megjegyzés

Ha D páronként diszjunkt elemhalmaz egy 0-disztributív hálóban, és $|D| \geq 2$, akkor könnyű látni, hogy tetszőleges két $d_1, d_2 \in D$ elemet helyettesíthetjük a két elem egyesítésével, $d_1 \vee d_2$ -vel.

Azt mondjuk, hogy az L háló *0-disztributív*, ha tetszőleges $a, b, x \in L$ esetén az $x \wedge a = 0$ és az $x \wedge b = 0$ együttes teljesüléséből következik $x \wedge (a \vee b) = 0$.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{L}$ háló *gyengén 0-disztributív*, ha a fenti implikáció $a \wedge b = 0$ esetén teljesül.

Megjegyzés

Ha D páronként diszjunkt elemhalmaz egy 0-disztributív hálóban, és $|D| \geq 2$, akkor könnyű látni, hogy tetszőleges két $d_1, d_2 \in D$ elemet helyettesíthetjük a két elem egyesítésével, $d_1 \vee d_2$ -vel.

Lemma

Legyen $\mathbb{L}$ egy véges 0-disztributív háló és D egy duális atom a $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ -ben.

Ekkor $D = \{d\}$ valamely $d \in L$ -re úgy, hogy $d \prec 1$, vagy D két különböző $d_1, d_2 \in L$ elemből áll úgy, hogy $d_1 \vee d_2 = 1$.

Legyen $\mathbb{L}$ fokszámozott háló, legyen $a \in L$. Ekkor az a magasságán az $[0, a]$ intervallum hosszát értjük, jele $l(a)$.

Egy fokszámozott $\mathbb{L}$ háló 0-moduláris, ha $l(a) + l(b) = l(a \vee b)$ fennáll bármely olyan $a, b \in L$ esetben, ha $a \wedge b = 0$.

Lemma

Legyen $\mathbb{L}$ egy véges 0-disztributív háló és D egy duális atom a $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ -ben.

Ekkor $D = \{d\}$ valamely $d \in L$ -re úgy, hogy $d \prec 1$, vagy D két különböző $d_1, d_2 \in L$ elemből áll úgy, hogy $d_1 \vee d_2 = 1$.

Legyen $\mathbb{L}$ fokszámozott háló, legyen $a \in L$. Ekkor az a magasságán az $[0, a]$ intervallum hosszát értjük, jele $l(a)$.

Egy fokszámozott $\mathbb{L}$ háló 0-moduláris, ha $l(a) + l(b) = l(a \vee b)$ fennáll bármely olyan $a, b \in L$ esetben, ha $a \wedge b = 0$.

Lemma

Legyen $\mathbb{L}$ egy véges 0-disztributív háló és D egy duális atom a $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ -ben.

Ekkor $D = \{d\}$ valamely $d \in L$ -re úgy, hogy $d \prec 1$, vagy D két különböző $d_1, d_2 \in L$ elemből áll úgy, hogy $d_1 \vee d_2 = 1$.

Legyen $\mathbb{L}$ fokszámozott háló, legyen $a \in L$. Ekkor az a magasságán az $[0, a]$ intervallum hosszát értjük, jele $l(a)$.

Egy fokszámozott $\mathbb{L}$ háló 0-moduláris, ha $l(a) + l(b) = l(a \vee b)$ fennáll bármely olyan $a, b \in L$ esetben, ha $a \wedge b = 0$.

Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen L véges, gyengén 0-disztributív háló. Ekkor a következő két feltétel ekvivalens:

- (i) L fokszámozott, és $I(a) + I(b) = I(a \vee b)$ teljesül minden olyan $a, b \in L$ -re, amelyre $a \wedge b = 0$.*
- (ii) L 0-moduláris, és L CD-bázisai azonos elemszámúak.*

Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen L véges, gyengén 0-disztributív háló. Ekkor a következő két feltétel ekvivalens:

- (i) *L fokszámozott, és $I(a) + I(b) = I(a \vee b)$ teljesül minden olyan $a, b \in L$ -re, amelyre $a \wedge b = 0$.*
- (ii) *L 0-moduláris, és L CD-bázisai azonos elemszámúak.*

Tétel (K. H. E., Radeleczki S.)

Legyen L véges, gyengén 0-disztributív háló. Ekkor a következő két feltétel ekvivalens:

- (i) L fokszámozott, és $l(a) + l(b) = l(a \vee b)$ teljesül minden olyan $a, b \in L$ -re, amelyre $a \wedge b = 0$.
- (ii) L 0-moduláris, és L CD-bázisai azonos elemszámúak.

We say that two elements $a, b \in L$ form a *modular pair* in the lattice L and we write $(a, b)M$ if for all $x \in L$, $x \leq b$ implies $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$.

Also, a and b form a *dual-modular pair* if for all $x \in L$, $x \geq b$ implies $x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee b$. This is denoted by $(a, b)M^*$.

Clearly, if a and b form a distributive pair, then $(a, b)M^*$ is satisfied.

By means of modular pairs, the 0-modularity condition can be reformulated as follows: For all $a, b \in L$,

Lemma (M. Stern) In a graded lattice of finite length, $(a, b)M$ implies $l(a) + l(b) \leq l(a \wedge b) + l(a \vee b)$.

With the help of the previous Lemma of M. Stern above, using an N_5 sublattice containing 0 as well as the dual lattice, we obtain

Proposition If $\mathbb{L}$ is a lattice with 0 such that $(a, b)M^*$ holds for all $a, b \in L$ with $a \wedge b = 0$, then L is 0-modular. If in addition $\mathbb{L}$ is a graded lattice of finite length, then $l(a \vee b) = l(a) + l(b)$ holds for all $a, b \in L$ with $a \wedge b = 0$.

Corollary (i) Let $\mathbb{L}$ be a finite, weakly 0-distributive lattice such that for each $a, b \in L$ with $a \wedge b = 0$, condition $(a, b)M^*$ holds. Then the CD-bases of $\mathbb{L}$ have the same number of elements if and only if $\mathbb{L}$ is graded.

(ii) If $\mathbb{L}$ is a finite pseudocomplemented modular lattice, then the CD-bases of $\mathbb{L}$ have the same number of elements.

As any dp-distributive lattice $\mathbb{L}$ is weakly 0-distributive, and $(a, b)M^*$ holds for all $a, b \in L$ with $a \wedge b = 0$ since (a, b) is a distributive pair, we obtain

Corollary

- (i) Any dp-distributive lattice is 0-modular. If $\mathbb{L}$ is a dp-distributive graded lattice with finite length, then $l(a \vee b) = l(a) + l(b)$ holds for all $a, b \in L$ with $a \wedge b = 0$.
- (ii) The CD-bases in a finite dp-distributive lattice $\mathbb{L}$ have the same number of elements if and only if $\mathbb{L}$ is graded.

An *interval system* $(V, \mathcal{I})$ is an algebraic closure system satisfying the axioms:

(I₀) $\{x\} \in \mathcal{I}$ for all $x \in V$, and $\emptyset \in \mathcal{I}$;

(I₁) $A, B \in \mathcal{I}$ and $A \cap B \neq \emptyset$ imply $A \cup B \in \mathcal{I}$;

(I₂) For any $A, B \in \mathcal{I}$ the relations $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subseteq B$ and $B \not\subseteq A$ imply $A \setminus B \in \mathcal{I}$ (and $B \setminus A \in \mathcal{I}$).

The *modules* (*X-sets*, or *autonomous sets*) of an undirected graph $G = (V, E)$, the *intervals* of an n -ary relation $R \subseteq V^n$ on the set V for $n \geq 2$ – in particular, the usual intervals of a linearly ordered set $(V, \leq)$ – form interval systems.

Let us consider now the condition:

$$(II) \text{ If } a \wedge b \neq 0, \text{ then } (x \leq a \vee b \text{ and } x \wedge a = 0) \Rightarrow x \leq b \text{ for all } a, b, x \in L.$$

Lattices with 0 satisfying condition (II) and with the property that $\uparrow a$ is a modular lattice for all $a \in L$, $a \neq 0$, can be considered as a generalization of the lattice $(\mathcal{I}, \subseteq)$ of an interval system $(V, \mathcal{I})$. To study their CD-bases, first we proved:

Lemma Let $\mathbb{L}$ be an atomic lattice satisfying condition (II). Assume $D \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ and define $S_D = \{s \in L \setminus (D \cup \{0\}) \mid d \wedge s = 0 \text{ or } d < s, \text{ for all } d \in D\}$. Then for all $b, c \in S_D$ with $b \wedge c \neq 0$ and all $d \in D$, $d \wedge (b \vee c) \neq 0$ if and only if $0 < d < b$ or $0 < d < c$ holds.

Let us consider now the condition:

Remark Let $\mathbb{L}$ be a finite lattice and $D = \{d_j \mid j \in J\} \in \mathcal{DC}(\mathbb{L})$. If $D \prec D'$ for some $D' \in D(\mathbb{L})$; then, there is a minimal element $a \in S_D$ such that $D' = \{a\} \cup \{d_j \in D \setminus \{0\} \mid d_j \wedge a = 0\}$. In this case there exists a set $K \subseteq J$ such that

$$K = \{j \in J \mid d_j < a\} \neq \emptyset \text{ and } D' = \{a\} \cup \{d_j \mid j \in J \setminus K\}. \quad (14)$$

It is well-known that a finite lattice $\mathbb{L}$ is semimodular if and only if it satisfies *Birkhoff's condition*, namely, for all $a, b \in L$

$$(Bi) \qquad a \wedge b \prec a, b \text{ implies } a, b \prec a \vee b.$$

We also say that a pair $a, b \in L$ satisfies Birkhoff's condition if the above implication (Bi) is valid for a, b . It is known that any distributive pair $a, b \in L$ satisfies Birkhoff's condition.

Theorem 3. (K. H. E., Radeleczki S.) Let $\mathbb{L}$ be a finite lattice satisfying condition (II) such that any principal filter $\uparrow a$ with $a \in L \setminus \{0\}$ is a modular lattice. Then $\mathcal{DC}(\mathbb{L})$ is a semimodular lattice.

Corollary (i) If $\mathbb{L}$ is a finite distributive lattice, then $\mathcal{DC}(\mathbb{L})$ is a semimodular lattice.

(ii) If $\mathbb{L}$ is a finite lattice that satisfies the conditions in Theorem 3, then its CD-bases have the same number of elements.

By applying this to interval systems we obtain:

If $(V, \mathcal{I})$ is a finite interval system, then the CD-bases of the lattice $(\mathcal{I}, \subseteq)$ contain the same number of elements.

Corollary (i) If $\mathbb{L}$ is a finite distributive lattice, then $\mathcal{DC}(\mathbb{L})$ is a semimodular lattice.

(ii) If $\mathbb{L}$ is a finite lattice that satisfies the conditions in Theorem 3, then its CD-bases have the same number of elements.

By applying this to interval systems we obtain:

Corollary

If $(V, \mathcal{I})$ is a finite interval system, then the CD-bases of the lattice $(\mathcal{I}, \subseteq)$ contain the same number of elements.

$$U \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(U)$$

Let $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ be a height function and let $S \in \mathcal{C}$ be a nonempty set.

We say that S is an *pre-island* with respect to the triple $(\mathcal{C}, \mathcal{K}, h)$, if every $K \in \mathcal{K}$ with $S \prec K$ satisfies

$$\min h(K) < \min h(S).$$

We say that S is a *island* with respect to the triple $(\mathcal{C}, \mathcal{K}, h)$, if every $K \in \mathcal{K}$ with $S \prec K$ satisfies

$$h(u) < \min h(S) \text{ for all } u \in K \setminus S.$$

$$U \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(U)$$

Let $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ be a height function and let $S \in \mathcal{C}$ be a nonempty set.

We say that S is an *pre-island* with respect to the triple $(\mathcal{C}, \mathcal{K}, h)$, if every $K \in \mathcal{K}$ with $S \prec K$ satisfies

$$\min h(K) < \min h(S).$$

We say that S is a *island* with respect to the triple $(\mathcal{C}, \mathcal{K}, h)$, if every $K \in \mathcal{K}$ with $S \prec K$ satisfies

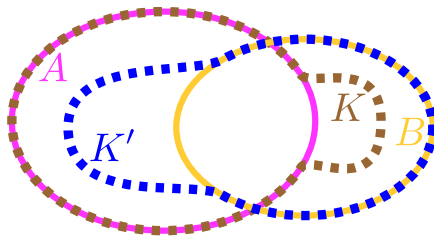
$$h(u) < \min h(S) \text{ for all } u \in K \setminus S.$$

Connective island domains

Definition

A pair $(\mathcal{C}, \mathcal{K})$ is an *connective island domain* if

$$\forall A, B \in \mathcal{C} : (A \cap B \neq \emptyset \text{ and } B \not\subseteq A) \implies \exists K \in \mathcal{K} : A \subset K \subseteq A \cup B.$$



Theorem

The following three conditions are equivalent for any pair $(\mathcal{C}, \mathcal{K})$:

(i) $(\mathcal{C}, \mathcal{K})$ is a connective island domain.

(ii) Every system of pre-islands corresponding to $(\mathcal{C}, \mathcal{K})$ is CD-independent.

Theorem

The following three conditions are equivalent for any pair $(\mathcal{C}, \mathcal{K})$:

(i) $(\mathcal{C}, \mathcal{K})$ is a connective island domain.

(ii) Every system of pre-islands corresponding to $(\mathcal{C}, \mathcal{K})$ is CD-independent.

Thank you for your attention!



Think, think, think.

Thank you for your attention!