FELADATOK A „MŰVELETEK, MŰVELETI TULAJDONSÁGOK" TÉMAKÖRHÖZ

1.1. Feladat. Művelet-e
(a) a szokásos összeadás, illetve szorzás a $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ halmazon;
(b) a szokásos összeadás, illetve szorzás a 3-jegyű pozitív egész számok halmazán;
(c) a szokásos összeadás, illetve szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon;
(d) a transzformációszorzás a sík összes eltolásainak halmazán;
(e) a metszés, illetve egyesítés az $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ halmazon;
(f) a diszjunkció, illetve konjunkció az $\{\mathbf{i}\}$ halmazon, ahol $\mathbf{i}$ az igaz logikai érték;
(g) a vektoriális szorzás az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, -\underline{i}, -\underline{j}, -\underline{k}\}$ halmazon, ahol $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a térbeli derékszögű koordinátarendszert kifeszítő egységvektorok;
(h) a szokásos összeadás a $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\}$ halmazon, ahol $\overline{0}, \overline{3}, \overline{6} \in \mathbb{Z}_9$?

1.2. Feladat. Művelet-e
(a) az $\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 2\}$ halmazon $\circ$, ahol $a \circ b = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$;
(b) az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon $*$, ahol $a * b = \dfrac{a}{b} + 1$;
(c) az $\{r \in \mathbb{R} \mid -1 < r < 1\}$ halmazon $\square$, ahol $a \,\square\, b = \dfrac{a + b}{1 + ab}$;
(d) az $\{r \in \mathbb{R} \mid 10 \leq r \leq 20\}$ halmazon $\triangle$, ahol $a \triangle b = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$;
(e) az $\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}$ halmazon $\oplus$, ahol $a \oplus b = a + b - ab$;
(f) az $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 1\}$ halmazon $\sqcap$, ahol $a \sqcap b = \min(a + b, 1)$?

1.3. Feladat. Készítse el az alábbi grupoidok művelettábláját, és ennek alapján állapítsa meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.
(a) $(\{-1, 0, 1\};\ \cdot\ )$;
(b) $(\{-1, 0, 1\};\ \sqcup\ )$, ahol $a \sqcup b = \max(a, b)$;
(c) $(\{\underline{0}, \underline{i}\};\ \times\ )$, ahol $\underline{0} = (0, 0, 0)$, $\underline{i} = (1, 0, 0)$;
(d) $(R_8;\ \cdot\ )$;
(e) $(P(\{1, 2\});\ \setminus\ )$;
(f) $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \rightarrow)$, ahol $\mathbf{i}$ az igaz, $\mathbf{h}$ a hamis logikai érték.

1.4. Feladat. Az $(\{a, b, c, d\};\ \circ\ )$ grupoid művelettáblája:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	b	c	b	b
d	d	d	a	a

Kommutatív-e a $\circ$ művelet? Van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

1.5. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok asszociatívak-e, kommutatívak-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keresse meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze.
(a) $(\mathbb{N}_0;\ *\ )$, ahol $m * n = mn - m + n$;
(b) $(\mathbb{N};\ \circ\ )$, ahol $m \circ n = mn + m + n$;
(c) $(\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 2\};\ \triangle\ )$, ahol $x \triangle y = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;
(d) $(\mathbb{Q};\ \square\ )$, ahol $q \,\square\, r = q$;
(e) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 5 \leq r \leq 8\};\ *\ )$, ahol $x * y = \frac{3}{7}x + \frac{4}{7}y$;
(f) $(\mathbb{Z};\ \oplus\ )$, ahol $a \oplus b = 2a - 5b$;
(g) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\};\ \circ\ )$, ahol $x \circ y = \frac{1}{3}$;
(h) $(\mathbb{R};\ \triangle\ )$, ahol $x \triangle y = xy - 2(x + y) + 6$;

(i) $(\mathbb{R};\ \square\ )$, ahol $x \square y = 12 - 3x - 3y + xy$;
(j) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1\};\ \oplus\ )$, ahol $x \oplus y = |x - y|$;
(k) $(\mathbb{R}^+;\ *\ )$, ahol $x * y = x^y$;
(l) $(\mathbb{N}_0; \text{ln.k.o.})$;
(m) $(\mathbb{R};\ \sqcup\ )$, ahol $x \sqcup y = \max(x, y)$;
(n) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1\};\ \circ\ )$, ahol $x \circ y = x + y - xy$;
(o) $(\mathbb{R}^+;\ \triangle\ )$, ahol $x \triangle y = \sqrt{xy}$;
(p) $(\mathbb{R};\ \square\ )$, ahol $x \square y = \dfrac{x+y}{2}$.

1.6. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok.
(a) $(\mathbb{N};\ +\ ),\ (\mathbb{N}_0;\ +\ ),\ (\mathbb{Z};\ +\ )$;
(b) $(\mathbb{Q};\ \cdot\ ),\ (\mathbb{R}^+;\ \cdot\ ),\ (\mathbb{C} \setminus \{0\};\ \cdot\ )$;
(c) $(P(\mathbb{N});\ \setminus\ ),\ (P(\mathbb{N});\ \cap\ ),\ (P(\mathbb{N});\ \Delta\ )$;
(d) $(\mathbb{Z}_{12};\ +\ ),\ (\mathbb{Z}_{12};\ \cdot\ )$;
(e) $(\{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \varepsilon^{10} = 1\};\ \cdot\ )$;
(f) $(S_4;\ \cdot\ )$;
(g) $([-1, 1];\ \sqcap\ )$, ahol $x \sqcap y = \min(x, y)$;
(h) $(\mathbb{Z};\ \circ\ )$, ahol $a \circ b = a + (-1)^a b$;
(i) $(\mathbb{Z};\ \circ\ )$, ahol $a \circ b = (-1)^b a + (-1)^a b$;
(j) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\};\ *\ )$, ahol $(a, b) * (c, d) = (ad + bc, bd)$.

1.7. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek érvényesek tetszőleges csoport minden a, b, x, y elemére, és melyek nem érvényes?
(a) Ha $axb = ayb$, akkor $x = y$.
(b) Ha $a^{-1} = b^{-1}$, akkor $a = b$.
(c) Ha $xa = ya$, akkor $x = y$.
(d) Ha $ax = 1\ x = a^{-1}$.
(e) Ha $abx = 1$, akkor $x = a^{-1}b^{-1}$.
(f) Ha $(ab)^2 = a^2b^2$, akkor $ab = ba$.

1.8. Feladat. Döntse el, hogy az A halmazon megadott műveletek közül valamelyik disztributív-e egy másikra, vagy saját magára vonatkozóan.
(a) $A = \mathbb{R}$, műveletek: összeadás, kivonás, szorzás;
(b) $A = \mathbb{R}^+$, műveletek: szorzás, osztás, hatványozás;
(c) $A = P(X)$, ahol X rögzített halmaz, műveletek: unió, metszet;
(d) $A = \mathbb{N}$, műveletek: legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös képzése;

1.9. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebrák közül?
(a) $(\mathbb{N};\ +\ ,\ \cdot\ ),\ (\mathbb{Z};\ +\ ,\ \cdot\ ),\ (\mathbb{R};\ +\ ,\ \cdot\ ),\ (\mathbb{C};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(b) $(\mathbb{R}^3;\ +\ ,\ \times\ )$;
(c) $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\};\ \leftrightarrow\ ,\ \vee\ )$;
(d) $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(e) $(\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(f) $(\{\frac{a}{5^n} \mid a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0\};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(g) $(\mathbb{Z}_{12};\ +\ ,\ \cdot\ ),\ (\mathbb{Z}_{13};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(h) $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$, ahol $x \oplus y = x + y - 1,\ x \odot y = x + y - xy$.

1.10. Feladat. Bizonyítsa be, hogy bármely R gyűrű tetszőleges a, b, c elemére fennállnak az alábbi egyenlőségek.
(a) $(a - b) + b = a$;
(b) $a - a = 0$ és $-(a - b) = (-a) - (-b) = b - a$;
(c) $(a - b) + (b - c) = a - c$;
(d) $(a - c) - (b - c) = a - b$;
(e) $(a - b)c = ac - bc$;
(f) $c(a - b) = ca - cb$.

1.11. Feladat. (a) Végezze el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{37}$ testben:

$$\overline{22} + \overline{15}, \qquad \overline{22} \cdot \overline{15}, \qquad \overline{23}^{\,-1}, \qquad \overline{2}^{10}, \qquad \overline{3}^{\,-10}, \qquad \overline{36}^{1526}.$$

(b) Oldja meg a $\mathbb{Z}_{42}$ gyűrűben az alábbi egyenletek közül a megoldhatókat:

$$\overline{26}x = \overline{14}; \qquad \overline{18}x = \overline{16}; \qquad \overline{37}x = \overline{19}; \qquad \overline{20}^2 x = -\overline{20}x.$$

EREDMÉNYEK A „MŰVELETEK, MŰVELETI TULAJDONSÁGOK” TÉMAKÖRHÖZ

1.1. Megoldás. (a) igen; (b) nem; (c) nem; (d) igen; (e) igen; (f) igen; (g) nem; (h) igen.

1.2. Megoldás. (a) igen; (b) nem; (c) igen; (d) igen; (e) igen; (f) nem.

1.3. Megoldás.
(a) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 0, egységeleme: 1, az invertálható elemek halmaza: $\{1, -1\}$;
(b) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 1, egységeleme: -1, az invertálható elemek halmaza: $\{-1\}$;
(c) A grupoid kommutatív, zéruseleme: $\underline{0}$, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(d) A grupoid kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme: $\overline{1}$, az invertálható elemek halmaza: $\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$;
(e) A grupoid nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(f) A grupoid nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$.

1.4. Megoldás. A grupoid nem kommutatív, zéruselem nincs, a b elem egységelem, a b és c elemeknek van inverze: $b^{-1} = b,\ c^{-1} = c$.

1.5. Megoldás.
(a) A grupoid nem asszociatív, nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(b) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme: 0, az invertálható elemek halmaza: $\{0\}$;
(c) A grupoid nem asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(d) A grupoid asszociatív, nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(e) A grupoid nem asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(f) A grupoid nem asszociatív, nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(g) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme: $\frac{1}{3}$, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(h) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme: 2, egységeleme: 3, az invertálható elemek halmaza: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$;
(i) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme: 3, egységeleme: 4, az invertálható elemek halmaza: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$;
(j) A grupoid nem asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme: 0, az invertálható elemek halmaza: $\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}$;
(k) A grupoid nem asszociatív, nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(l) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme: 1, egységeleme: 0, az invertálható elemek halmaza: $\{0\}$;
(m) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(n) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme: 1, egységeleme: 0, az invertálható elemek halmaza: $\{0\}$;
(o) A grupoid nem asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$;
(p) A grupoid nem asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: $\emptyset$.

1.6. Megoldás.
(a) $(\mathbb{N};\ +)$ félcsoport, $(\mathbb{N}_0;\ +)$ monoid, $(\mathbb{Z};\ +)$ Abel-csoport;
(b) $(\mathbb{Q};\ \cdot)$, monoid, $(\mathbb{R}^+;\ \cdot)$ Abel-csoport, $(\mathbb{C} \setminus \{0\};\ \cdot)$ Abel-csoport;
(c) $(P(\mathbb{N});\ \setminus)$ nem félcsoport, $(P(\mathbb{N});\ \cap)$ monoid, $(P(\mathbb{N});\ \Delta)$ Abel-csoport;
(d) $(\mathbb{Z}_{12};\ +)$ Abel-csoport, $(\mathbb{Z}_{12};\ \cdot)$ monoid;

(e) Abel-csoport; (f) csoport; (g) monoid; (h) csoport; (i) Abel-csoport; (j) monoid.

1.7. Megoldás. A (a), (b), (d) és (f) minden csoportban érvényes, a többi nem.

1.8. Megoldás.
(a) a szorzás disztributív az összeadásra és a kivonásra;
(b) egyik művelet sem disztributív valamely másikra;
(c) az unió és a metszet disztributívak egymásra és saját magukra;
(d) a két művelet disztributí egymásra és saját magára.

1.9. Megoldás.
(a) $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ nem gyűrű, $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ gyűrű, $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ test, $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ test;
(b) nem gyűrű; (c) test; (d) gyűrű; (e) test; (f) gyűrű;
(g) $(\mathbb{Z}_{12}; +, \cdot)$ gyűrű, $(\mathbb{Z}_{13}; +, \cdot)$ test; (h) test.

1.10. Megoldás. HF

1.11. Megoldás.
(a) $\overline{22}+\overline{15}=\overline{0}$, $\overline{22}\cdot\overline{15}=\overline{34}$, $\overline{23}^{\,-1}=\overline{29}$, $\overline{2}^{10}=\overline{25}$, $\overline{3}^{\,-10}=\overline{12}$, $\overline{36}^{1526}=\overline{1}$.
(b) az $\overline{26}x=\overline{14}$ egyenlet megoldásai: $\overline{7},\overline{28}$;
az $\overline{18}x=\overline{16}$ egyenletnek nincs megoldása;
az $\overline{37}x=\overline{19}$ egyenlet megoldása: $\overline{13}$;
az $\overline{20}^2x=-\overline{20}x$ egyenletnek a $\mathbb{Z}_{42}$ gyűrű minden eleme megoldása.