FELADATOK A „LEKÉPEZÉSEK, PERMUTÁCIÓK” TÉMAKÖRHÖZ

Diszkrét Matematika

4. LEKÉPEZÉSEK

Értelmezési tartomány és értékkészlet meghatározása :
Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából („zöld könyv”): XIII. fejezet: 1583, 1587, 1588, 1590, 1600.
Matematikai feladatgyűjtemény II. („zöld csíkos”): I./ 22, 43, 44, 50

Szorzás : „zöld csíkos”: I/227, 231, 233

Inverz számítás : „zöld csíkos”: I/236, 239, 241

DM II/10-12.,14-25. feladatok

4.1. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
(b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
(c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
(d) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.

Mutasson rá egy példával, hogy általában $(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$.

4.2. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét, és döntse el, hogy melyik parciális leképezés, illetve melyik leképezés:
($\mathbb{H}$: a sík nemelfajuló háromszögeinek halmaza; $\mathbb{E}$: az emberek halmaza)

(a) $\alpha = \{(x, y) :\ y = |x|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
(b) $\beta = \{(x, y) :\ x = |y|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
(c) $\gamma = \{(x, y) :\ |x| = |y|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
(d) $\delta = \{(x, y) :\ 2x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
(e) $\varepsilon = \{(x, y) :\ x = 2^y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
(f) $\zeta = \{(x, y) :\ 10x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
(g) $\eta = \{(x, y) :\ x = \lg y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
(h) $\vartheta = \{(a, b) :\ a \leq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$;
(i) $\iota = \{(a, b) :\ a = b^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(j) $\kappa = \{(a,b) : a^2 = b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$;
(k) $\lambda = \{(a,b) : a \leq b^2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$;
(l) $\mu = \{(x,y) : yx = 8\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$;
(m) $\nu = \{(x,y) : xy = 4\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$;
(n) $\xi = \{(x,y) : x + |y| = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
(o) $o = \{(x,y) : y^2 < x\} \subseteq \mathbb{R} \times (-2;2)$;
(p) $\pi = \{(a,b) : \sin a = b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$;
(q) $\varrho = \{(x,y) : (x-1)^2 = 2y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$;
(r) $\sigma = \{(x,y) : x + 3 = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$;
(s) $\tau = \{(x,y) :$ az x háromszög kerülete y méter$\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$;
(t) $\upsilon = \{(x,y) : x$ anyja $y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$.

4.3. Feladat. Határozza meg az $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ leképezéseket!

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3x + 1$;
(b) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = |x|, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 2x + 3$.

4.4. Feladat. Tekintsük a következő $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezéseket:

$$x\varphi = \begin{cases} -x, & \text{ha } x > 0, \\ x^2, & \text{ha } x \leq 0, \end{cases} \qquad x\psi = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x > 1, \\ 1 - x, & \text{ha } x \leq 1. \end{cases}$$

Határozza meg a $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ leképezéseket!

4.5. Feladat. Legyen $X = \{1,2,3,4\}$. Tekintsük a következő $\varphi\colon X \to X$ leképezést:

$$x\varphi = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \leq 3, \\ 1, & \text{ha } x = 4. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy egyetlen olyan $\psi\colon X \to X$ leképezés van, amelyre $1\psi = 3$, és $\varphi\psi = \psi\varphi$!

4.6. Feladat. Adjon minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

(a) nem szürjektív;
(b) szürjektív, de nem bijektív;
(c) injektív, de nem bijektív;
(d) bijektív.

Igazolja is a fenti tulajdonságokat!

4.7. Feladat. Vizsgálja meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, illetve szürjektívek-e:

(a) $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x\alpha = \dfrac{4}{x}$;
(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 1 - |x|$;
(c) $\gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x\gamma = 3x^2 - 2$;
(d) $\delta = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\} \subseteq [-2;2] \times [0;2]$;
(e) $\epsilon = \{(x,y) :$ az x háromszög kerülete y méter$\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}^+$;
(f) $\zeta = \{(x,y) : x$ anyja $y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$;
(g) $\eta = \{(x,y) : x$ hajszálainak száma $y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{N}_0$.

4.8. Feladat. Injektívek-e, illetve szürjektívek-e az alábbi leképezések?

(a) $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto (n-2)^2 + 1;$
(b) $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto |n-3| + 1;$
(c) $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma;
(d) $\delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ pozitív osztóinak összege;
(e) $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ prímosztóinak száma;
(f) $\zeta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ legnagyobb páratlan osztója.

4.9. Feladat. Injektívek-e, illetve szürjektívek-e az alábbi leképezések?

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 3;$
(b) $\beta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 2x + 1;$
(c) $\gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x-1, 1);$
(d) $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3;$
(e) $\zeta\colon [-3\,;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^{\sqrt{x+3}} - 6;$
(f) $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2}, & \text{ha } x \neq -2,\\ 1, & \text{ha } x = -2; \end{cases}$
(g) $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-1)x(x+1);$
(h) $\iota\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x + 1;$
(i) $\kappa\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto (-1)^x \left\lceil \dfrac{x}{2} \right\rceil;$
(j) $\lambda\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (n,m) \mapsto nm - n + m.$

4.10. Feladat. Vizsgálja meg, hogy szürjektív-e, illetve injektív-e az alábbi ψ leképezés, és adja meg a $\psi^2(=\psi\psi)$ leképezést:

(a) $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ a\psi = (a-2)^2 + 3;$
(b) $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a\psi = |a+3| - 2;$
(c) $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a\psi = \begin{cases} \dfrac{a}{2}, & \text{ha } a \text{ páros},\\ a, & \text{ha } a \text{ páratlan}; \end{cases}$
(d) $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ a\psi = \begin{cases} a-1, & \text{ha } a < 0,\\ 0, & \text{ha } a = 0,\\ a+1, & \text{ha } a > 0. \end{cases}$

4.11. Feladat. A $\varphi, \psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n\varphi = 2n,\ n\psi = 2n+1$ leképezésekhez adjon meg olyan $\eta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ leképezést, amelyre $\varphi\eta = \mathrm{id}$ és $\psi\eta = \mathrm{id}$ egyszerre teljesülj.

4.12. Feladat. Jelöljük $\mathbb{R}_0^+$-szal a nemnegatív valós számok halmazát és tekintsük ennek a halmaznak az alábbi transzformációját:

$$\varphi\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Mutassa meg, hogy φ injektív, és adjon meg két különböző olyan ψ, η leképezést, hogy $\varphi\psi = \varphi\eta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_0^+}$ teljesüljön.

4.13. Feladat. Ellenőrizze, hogy bijektívek az alábbi leképezések, és adja meg az inverzüket!

(a) $\alpha\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x\alpha = (x+2)^2 - 4;$

(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x\beta = \begin{cases} 2x - 6, & \text{ha } x \geq 4, \\ \frac{1}{4}x + 1, & \text{ha } 0 \leq x < 4, \\ -x^2 + 1, & \text{ha } x < 0. \end{cases};$

(c) $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times [0\,;1), \quad x\gamma = ([x], \{x\}).$

4.14. Feladat. Tekintsük a következő $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezéseket:

$$x\varphi = \begin{cases} 1 - x, & \text{ha } x \geq 0, \\ x^2, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad x\psi = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ x - 1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Határozza meg a $\varphi\psi$ és $\psi\varphi$ szorzatokat, és vázolja a grafikonjukat. Igazolja, hogy $\psi\varphi$ bijektív, és adja meg az inverzét. Injektív-e, illetve szürjektív-e az $\varphi\psi$ leképezés?

4.15. Feladat. Határozza meg a értékét úgy, hogy ψ bijektív legyen, majd adja meg az inverzét:

$$\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x\psi = \begin{cases} \dfrac{3x+2}{-x+5}, & \text{ha } x \neq 5, \\ a, & \text{ha } x = 5. \end{cases}$$

4.16. Feladat. Adjon meg minél egyszerűbben olyan φ és ψ leképezéseket, amelyekre

(a) a $\varphi\psi$ szorzat injektív, de φ és ψ közül legalább az egyik nem injektív;

(b) a $\varphi\psi$ szorzat szürjektív, de φ nem az.

4.17. Feladat. Legyen $\varphi\colon A \to B$ tetszőleges, $\psi\colon B \to C$ bijektív leképezés. Mutassa meg, hogy $\varphi\psi$ akkor és csak akkor injektív, ha φ az.

5. PERMUTÁCIÓK

DM II./26.-30. feladatok

5.1. Feladat. Mely permutációk azonosak π_1-gyel, és melyek különbözők az alábbi permutációk közül? (Válaszát indokolja!)

$$\pi_1 = (1\,2\,3\,4) \in S_4, \quad \pi_2 = (1\,2\,3\,4) \in S_5, \quad \pi_3 = (4\,3\,2\,1) \in S_4, \quad \pi_4 = (3\,4\,1\,2) \in S_4$$

5.2. Feladat. Tekintsük a következő S_5-beli permutációkat:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ada meg az $(\alpha\beta)^2$, $\alpha^2\gamma$, $\alpha^2\beta^2$, $\gamma\alpha^2$ permutációkat idegen ciklusokra bontott alakban.

5.3. Feladat. Adja meg idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat, és számítsa ki az $\alpha^{-1}\beta$ és $\beta^2\alpha$ szorzatokat.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

5.4. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat:

(a) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{2002}$;

(b) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2002}$.

5.5. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat:

(a) $(2\,3\,4\,1)(5\,1\,2\,6)$;

(b) $\big((5\,6\,2\,1)(3\,4\,2\,1)\big)^{-1}$;

(c) $\big((1\,5\,2)((1\,5\,4\,6)(4\,7\,5\,2\,3))^{-1}\big)^{2001}$;

(d) $\big((1\,5\,4\,6)((4\,7\,5\,2\,3)(1\,5\,2))^{-1}\big)^{2002}$;

(e) $(2\,1\,3\,4)^{-1}((1\,2\,3)(4\,3\,1))^{101}$;

(f) $((2\,1\,3\,4)(1\,2\,3))^{-1}(4\,3\,1)^{101}$;

(g) $((123)(347))^{-1}(567321)^{65}$;

(h) $\big((2\,4\,1)^2(2\,5\,6\,1\,4)^{-1}\big)^{26}(1\,3\,4\,5)$;

(i) $\big((1\,4\,5\,6)^{18}(6\,1\,3)(2\,4\,5)^{-1}\big)^3$;

(j) $\big((1\,3\,6)(1\,4\,5\,6\,3)^{17}(2\,4\,5)^2\big)^{-1}$;

(k) $\big((1\,3\,4)^{47}(2\,3\,6\,7\,1)^{-1})\big)^3$;

(l) $\big((2\,3\,6)^{29}(1\,4\,5\,3)^{-1}(27)\big)^2$;

(m) $\big((3\,4\,7)^{40}(2\,6)\big)^2(1\,5\,7\,3)^{-1}$;

(n) $\big((1\,2\,3)^{-1}(2\,3\,4\,5)(1\,2\,3)(4\,5\,6\,7)\big)^{2002}(1\,3)$;

(o) $\Big(\big((1\,2\,3)(1\,2\,3\,4)\big)^{-1}(3\,4\,5\,6)(1\,2\,3)\Big)^{2002}(1\,2)$;

(p) $\big((4\,5\,7\,2\,3)(1\,3\,2\,4)\big)^{17}\big((1\,2\,7\,3)(5\,3\,4)\big)^{-1}$;

(q) $(1\,3)\big((1\,2\,3\,4\,6)(7\,5\,3\,1)^{-1}\big)^{2000}(1\,4\,2)^{-2}$.

5.6. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}(2\,3\,4)^{-1}(1\,4\,5\,2)$;

(b) $\big((1\,3\,4\,5)(2\,3\,4)(1\,2\,3)\big)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^4$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{23}\big((765)(543)\big)^{-1}$;

5.7. Feladat. Legyen $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in S_8$. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként a $\pi((1\,2\,4)(5\,6\,7))^{-1}$ és a π^{2002} permutációkat.

5.8. Feladat. Mely $\pi \in S_5$ permutációra teljesül az alábbi egyenlőség?

$$\pi(1\,2)(3\,4)\pi = \pi(1\,2\,5)\pi^{-1}(2\,3)\pi\,.$$

5.9. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként azokat a $\gamma \in S_3$ permutációkat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

(a) $(231)\gamma(32) = \mathrm{id}$;
(b) $(1\,2)\gamma(1\,2\,3) = \mathrm{id}$.

5.10. Feladat. Határozza meg azokat a $\sigma \in S_7$ permutációkat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

(a) $(1\,3\,6)\,\sigma\,(3\,4\,5) = (4\,1\,2)\,;$
(b) $(1\,5\,3)\,\sigma\,(6\,2\,1)\,(4\,1\,3) = (3\,1\,5)\,;$
(c) $(6\,2\,1)\,(4\,1\,3)\,\sigma\,(1\,5\,3) = (3\,1\,5)\,;$
(d) $(1\,4\,2)\,(1\,3\,5)\,\sigma\,(2\,6\,7) = (1\,2)\,;$
(e) $(1\,2\,5)\,\sigma\,(1\,3\,7)\,(2\,6\,7) = (3\,4)\,;$
(f) $(1\,2\,3)\,(4\,5)\,\sigma\,(1\,4\,2) = (2\,1\,3)^5\,;$
(g) $(1\,2\,6\,3)\,(4\,1\,3)\,\sigma\,(5\,1\,4) = (1\,2\,3\,4\,6)^6\,;$
(h) $(1\,4\,5\,2)^{-1}\,(4\,5\,3\,1)\,\sigma\,(1\,4\,3) = (1\,2\,3\,5\,4\,6)^7\,.$

5.11. Feladat. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként azokat a $\varrho \in S_7$ permutációkat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

(a) $(326)\,\varrho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}^{2000} = (24)\,;$

(b) $((4\,5\,6\,3)\,(3\,4))^{-10}\,\varrho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = ((1\,2\,7\,3)(5\,3\,4))^{6002}\,;$

(c) $\big((3\,2\,4)\,(1\,3)\big)\,\varrho \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{2001} = \big((1\,2\,3)\,(1\,4)\big)^{-2}\,;$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}^{1611} \varrho^{-1}(1\,2)\,(2\,3)(3\,4) = (1\,4\,7)\,;$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{2003} \varrho^{-1}\,(275)\,(132) = (56)\,.$

5.12. Feladat. Oldja meg S_3-ban a $\sigma^2 = (123)$ egyenletet.