FELADATOK A „FÉLCSOPORTOK, CSOPORTOK” TÉMAKÖRHÖZ

6.1. Feladat. Határozza meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak részfélcsoportot, illetve részcsoportot a megadott félcsoportban:
(a) a $V = \{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ halmaz S_4-ben;
(b) azon permutációk halmaza S_5-ben, amelyek a 2 elemet nem mozgatják;
(c) azon permutációk halmaza S_5-ben, amelyek a 2 elemet mozgatják;
(d) az $X = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz injektív transzformációinak halmaza $T(X)$-ben;
(e) $\mathbb{N}$ nem szürjektív transzformációinak halmaza $T(\mathbb{N})$-ben;
(f) $\mathbb{N}$ nem bijektív transzformációinak halmaza $T(\mathbb{N})$-ben;
(g) az $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 6\}$ halmaz $(\mathbb{Z};\, +)$-ban;
(h) a legalább négyjegyű pozitív egész számok halmaza $(N;\, \cdot\,)$-ban;
(i) a 0-ra végződő egész számok halmaza $(\mathbb{Z};\, \cdot\,)$-ban;
(j) a pozitív valós számok halmaza $(\mathbb{R};\, \cdot\,)$-ban;
(k) a negatív racionális számok halmaza $(\mathbb{Q} \setminus \{0\};\, \cdot\,)$-ban;
(l) a negatív racionális számok halmaza $(\mathbb{Q};\, +)$-ban.

6.2. Feladat. Határozza meg a megadott G csoport A részhalmaza által G-ben generált részfélcsoportot, illetve részcsoportot:
(a) $G = S_4,\ A = \{(1\,2\,3)\}$;
(b) $G = S_4,\ A = \{\pi \in G \mid 4\pi = 4\}$;
(c) $G = S_5,\ A = \{(1\,2), (1\,3), (1\,4), (1\,5)\}$;
(d) $G = (\mathbb{Z}_{12};\, +),\ A = \{\overline{3}\}$;
(e) $G = (\mathbb{Z}_{12};\, +),\ A = \{\overline{5}\}$;
(f) $G = (\mathbb{Z}_{12};\, +),\ A = \{\overline{8}, \overline{10}\}$;
(g) $G = (R_{15};\, \cdot\,),\ A = \{\overline{2}, \overline{7}\}$;
(h) $G = (\mathbb{Z};\, +),\ A = \{1\}$;
(i) $G = (\mathbb{Z};\, +),\ A = \{2, 3\}$;
(j) $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\};\, \cdot\,),\ A = \mathbb{N}$;
(k) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\};\, \cdot\,),\ A = \mathbb{Q}^-$;
(l) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\};\, \cdot\,),\ A = \{bi \mid b \in \mathbb{R}^+\}$;
(m) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\};\, \cdot\,),\ A = \{i\}$;
(n) $G = ((\mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x + \overline{1})) \setminus \{\overline{0}\};\, \cdot\,),\ A = \{\overline{x}\}$.

6.3. Feladat. Adja meg a $(\mathbb{Z}_3;\, +)$ és a $V = \{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \subseteq S_4$ csoportok Cayley-ábrázolását.

6.4. Feladat. Adja meg az alábbi félcsoportok reguláris ábrázolását, illetve kiterjesztett reguláris ábrázolását. Mely ábrázolások injektívek ezek közül?
(a) $(\{a, b\};\, \cdot\,)$, ahol $x \cdot y = x$ teljesül az alaphalmaz tetszőleges x, y elemeire;
(b) $(\{a, b\};\, \cdot\,)$, ahol $x \cdot y = y$ teljesül az alaphalmaz tetszőleges x, y elemeire;
(c) $(\{a, b, c\};\, \cdot\,)$, ahol $x \cdot y = a$ teljesül az alaphalmaz tetszőleges x, y elemeire;
(d) $T(\{1, 2\})$;
(e) $C_{2,2}$;
(f) $(\{-1, 0, 1\};\, \cdot\,)$, ahol $x \cdot y = \max(x, y)$ teljesül az alaphalmaz tetszőleges x, y elemeire.

6.5. Feladat. Legyen $C_{3,7} = [a]$ egy 3 indexű, 7 periódusú ciklikus félcsoport.
(a) A generátorelem következő hatványai közül melyek egyenlőek és melyek nem egyenlőek egymással: a^{80}, a^{92}, a^{23}, a^{701}, a^{779}, a^3, a^9, a^{44}, a^{58}, a, a^{17}, a^2, a^8, a^{70}?
(b) Végezze el a következő műveleteket $C_{3,7}$-ben: $a^2 a^8$, $\left(a^7\right)^{628}$, $\left(a^6\right)^{1451}$, $\left(a^4\right)^{10}\left(a^9\right)^5$.
(c) Adjon meg részcsoportot $C_{3,7}$-ben. Mi ennek a részcsoportnak az egységeleme? Van-e olyan eleme a részcsoportnak, amely generálja őt? Ha igen, akkor adja meg az összes ilyen elemet.
(d) Megoldhatók-e $C_{3,7}$-ben a következő egyenletek? A megoldható egyenletek esetében adja meg az összes megoldást.
  (d_1) $a^5 \cdot x^3 = a^2$;
  (d_2) $a^6 \cdot x^3 = a^4$;

(d$_3$) $a^5 \cdot x^3 = a^4$.

6.6. Feladat. Határozza meg azokat a ciklikus félcsoportokat, amelyeknek van egységeleme, illetve azokat, amelyeknek van zéruseleme.

6.7. Feladat. Határozza meg a $T(\{1,2,3,4\})$ félcsoportban az

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

elem által generált ciklikus félcsoport indexét és periódusát.

6.8. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi leképezések közül melyek homomorfizmusok, és melyek nem. A homomorfizmusok közül melyek izomorfizmusok, és melyek nem?

(a) $(\mathbb{Z};\,+\,) \to S_3,\ n \mapsto (1\,2\,3)^n$;

(b) $T(\{1,2,3\}) \to T(\{1,2,3\}),\ \varphi \mapsto \varphi \circ \varphi$;

(c) $T(\{1,2\}) \to T(\{1,2\}),\ \varphi \mapsto \varphi \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $(R_{10};\,\cdot\,) \to (\mathbb{Z}_4;\,+\,),\ \overline{3^n} \mapsto \overline{n}\ (n = 0,1,2,3)$;

(e) $(R_{10};\,\cdot\,) \to (\mathbb{Z}_4;\,+\,),\ \overline{3^n} \mapsto \overline{2n}\ (n = 0,1,2,3)$;

(f) $(R_{10};\,\cdot\,) \to (\mathbb{Z}_8;\,+\,),\ \overline{3^n} \mapsto \overline{n^3}\ (n = 0,1,2,3)$;

(g) $(\mathbb{Z}_{10};\,+\,) \to (\mathbb{Z}_{10};\,+\,),\ \overline{k} \mapsto \overline{5}$;

(h) $(\mathbb{Z}_{12};\,+\,) \to (\mathbb{Z}_8;\,+\,),\ \overline{k} \mapsto \overline{2k}$;

(i) $(\mathbb{Z}_{12};\,+\,) \to (\mathbb{Z}_4;\,+\,),\ \overline{k} \mapsto \overline{3k}$;

(j) $(\mathbb{Q};\,+\,) \to (\mathbb{C};\,+\,),\ x \mapsto 3x + 7i$;

(k) $(\mathbb{R};\,+\,) \to (\mathbb{C};\,+\,),\ x \mapsto 2x - 5xi$;

(l) $(\mathbb{C};\,+\,) \to (\mathbb{R};\,+\,),\ x + iy \mapsto y$;

(m) $(\mathbb{R}^+;\,\cdot\,) \to (\mathbb{R}^+;\,\cdot\,),\ x \mapsto \sqrt{x}$;

(n) $(\mathbb{Z};\,+\,) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\};\,\cdot\,),\ k \mapsto \cos\dfrac{2k\pi}{7} + i\sin\dfrac{2k\pi}{7}$;

(o) $(\mathbb{N};\,\cdot\,) \to (\mathbb{N};\,\cdot\,),\ n \mapsto 1$;

(p) $(\mathbb{R}^+;\,\cdot\,) \to (\mathbb{R};\,+\,),\ x \mapsto \log_2 x$;

(q) $(\mathbb{Z};\,+\,) \to (\mathbb{Q};\,+\,),\ x \mapsto x - 1$;

(r) $(\mathbb{C};+) \to (\mathbb{C};+),\ x+iy \mapsto (2x+6y)+(4x-10y)i$;

(s) $(\mathbb{R};\,\cdot\,) \to (\mathbb{R};\,\cdot\,),\ x \mapsto x^{15}$;

(t) $(\mathbb{Z};\,\cdot\,) \to (\mathbb{N}_0;\,\cdot\,),\ x \mapsto |x|$;

(u) $(\mathbb{R};\,\cdot\,) \to (\mathbb{R};\,\cdot\,),\ x \mapsto \sin x$;

(v) $(\mathbb{C} \setminus \{0\};\,\cdot\,) \to (\mathbb{C};\,\cdot\,),\ x + iy \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x - iy}$;

(w) $(\mathbb{C} \setminus \{0\};\,\cdot\,) \to (\mathbb{R};\,+\,),\ r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \mapsto \varphi$, ahol $\varphi \in \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r < 2\pi\}$.

6.9. Feladat. Adott az $F_{\{x\}}$ szabad félcsoport, és az $(\mathbb{N};\,+\,)$ félcsoport. Határozza meg azokat a φ homomorfizmusokat, amelyekre $\varphi\colon F_{\{x\}} \to \mathbb{N},\ x\varphi = 1$. Hány ilyen homomorfizmus van?

Van-e $F_{\{x\}}$-ből $(\mathbb{N};\,+\,)$-ba olyan ψ homomorfizmus, amelyre $x\psi \neq 1$? Ha van, akkor adjon is meg egy ilyet.

6.10. Feladat. Adott az $F_{\{x,y\}}$ szabad félcsoport és az $A = (\{a,b\};\,\cdot\,)$ félcsoport, melyben az alaphalmaz bármely u, v elemére

(a) $u \cdot v = a$;

(b) $u \cdot v = u$

teljesül. Adja meg azt a $\varphi\colon F_{\{x,y\}} \to A$ homomorfizmust, amelyre $x\varphi = a,\ y\varphi = b$.

6.11. Feladat. Az inverziók számának meghatározásával döntse el, hogy az alábbi S_6-beli permutációk közül melyek párosak, és melyek páratlanok.

(a) id;

(b) $(1\,4\,2)$;

(c) $(6\,2)(5\,3\,1)$;

(d) $(1\,3)(2\,6)(5\,4)$;

(e) $(1\,2\,3\,4\,5\,6)$;

(f) $(1\,2\,4\,3\,5\,6)$.

6.12. Feladat. Transzpozíciókra bontás segítségével döntse el, hogy az alábbi S_6-beli permutációk közül melyek párosak, és melyek páratlanok.

(a) id;

(b) $(1\,2\,3\,4\,5\,6)$;

(c) $(1\,5)(2\,3)$;

(d) $(1\,2)(3\,5)(2\,3)(4\,5)$;

(e) $(1\,6\,4)(2\,5\,3)$;

(f) $\big((1\,5)(2\,4\,6\,3)\big)^{2004}$;

(g) $\big((2\,4\,3)(6\,5)\big)^{2004^{2003^{2004}} + 2003^{2004^{2003}}}$.