

FELADATOK A „FÉLCSOPORTOK, CSOPORTOK” TÉMAKÖRHÖZ

6.1. Feladat. Határozza meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak részfélcsoportot, illetve részcsoporthat a megadott félcsoportban:

- (a) a $V = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ halmaz S_4 -ben;
- (b) azon permutációk halmaza S_5 -ben, amelyek a 2 elemet nem mozgatják;
- (c) azon permutációk halmaza S_5 -ben, amelyek a 2 elemet mozgatják;
- (d) az $X = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz injektív transzformációinak halmaza $T(X)$ -ben;
- (e) $\mathbb{N}$ nem szürjektív transzformációinak halmaza $T(\mathbb{N})$ -ben;
- (f) $\mathbb{N}$ nem bijektív transzformációinak halmaza $T(\mathbb{N})$ -ben;
- (g) az $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 6\}$ halmaz $(\mathbb{Z}; +)$ -ban;
- (h) a legalább négyjegyű pozitív egész számok halmaza $(\mathbb{N}; \cdot)$ -ban;
- (i) a 0-ra végződő egész számok halmaza $(\mathbb{Z}; \cdot)$ -ban;
- (j) a pozitív valós számok halmaza $(\mathbb{R}; \cdot)$ -ban;
- (k) a negatív racionális számok halmaza $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ -ban;
- (l) a negatív racionális számok halmaza $(\mathbb{Q}; +)$ -ban.

6.2. Feladat. Határozza meg a megadott G csoport A részhalmaza által G -ben generált részfélcsoportot, illetve részcsoporthat:

- (a) $G = S_4$, $A = \{(1\ 2\ 3)\}$;
- (b) $G = S_4$, $A = \{\pi \in G \mid 4\pi = 4\}$;
- (c) $G = S_5$, $A = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (1\ 5)\}$;
- (d) $G = (\mathbb{Z}_{12}; +)$, $A = \{\overline{3}\}$;
- (e) $G = (\mathbb{Z}_{12}; +)$, $A = \{\overline{5}\}$;
- (f) $G = (\mathbb{Z}_{12}; +)$, $A = \{\overline{8}, \overline{10}\}$;
- (g) $G = (R_{15}; \cdot)$, $A = \{\overline{2}, \overline{7}\}$;
- (h) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $A = \{1\}$;
- (i) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $A = \{2, 3\}$;
- (j) $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$, $A = \mathbb{N}$;
- (k) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$, $A = \mathbb{Q}^-$;
- (l) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$, $A = \{bi \mid b \in \mathbb{R}^+\}$;
- (m) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$, $A = \{i\}$;
- (n) $G = ((\mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x + 1)) \setminus \{\overline{0}\}; \cdot)$, $A = \{\overline{x}\}$.

6.3. Feladat. Adja meg a $(\mathbb{Z}_3; +)$ és a $V = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subseteq S_4$ csoportok Cayley-ábrázolását.

6.4. Feladat. Adja meg az alábbi félcsoportok reguláris ábrázolását, illetve kiterjesztett reguláris ábrázolását. Mely ábrázolások injektívek ezek közül?

- (a) $(\{a, b\}; \cdot)$, ahol $x \cdot y = x$ teljesül az alaphalmaz tetszőleges x, y elemeire;
- (b) $(\{a, b\}; \cdot)$, ahol $x \cdot y = y$ teljesül az alaphalmaz tetszőleges x, y elemeire;
- (c) $(\{a, b, c\}; \cdot)$, ahol $x \cdot y = a$ teljesül az alaphalmaz tetszőleges x, y elemeire;
- (d) $T(\{1, 2\})$;
- (e) $C_{2,2}$;
- (f) $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$, ahol $x \cdot y = \max(x, y)$ teljesül az alaphalmaz tetszőleges x, y elemeire.

6.5. Feladat. Legyen $C_{3,7} = [a]$ egy 3 indexű, 7 periódusú ciklikus félcsoport.

- (a) A generátorelem következő hatványai közül melyek egyenlőek és melyek nem egyenlőek egymással: a^{80} , a^{92} , a^{23} , a^{701} , a^{779} , a^3 , a^9 , a^{44} , a^{58} , a , a^{17} , a^2 , a^8 , a^{70} ?
- (b) Végezze el a következő műveleteket $C_{3,7}$ -ben: $a^2 a^8$, $(a^7)^{628}$, $(a^6)^{1451}$, $(a^4)^{10} (a^9)^5$.
- (c) Adjon meg részcsoporthat $C_{3,7}$ -ben. Mi ennek a részcsoporthat az egységeleme? Van-e olyan eleme a részcsoporthatnak, amely generálja őt? Ha igen, akkor adja meg az összes ilyen elemet.
- (d) Megoldhatók-e $C_{3,7}$ -ben a következő egyenletek? A megoldható egyenletek esetében adja meg az összes megoldást.
 - (d₁) $a^5 \cdot x^3 = a^2$;
 - (d₂) $a^6 \cdot x^3 = a^4$;

$$(d_3) \ a^5 \cdot x^3 = a^4.$$

6.6. Feladat. Határozza meg azokat a ciklikus félcsoportokat, amelyeknek van egységeleme, illetve azokat, amelyeknek van zéruseleme.

6.7. Feladat. Határozza meg a $T(\{1, 2, 3, 4\})$ félcsoportban az

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

elem által generált ciklikus félcsoport indexét és periódusát.

6.8. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi leképezések közül melyek homomorfizmusok, és melyek nem. A homomorfizmusok közül melyek izomorfizmusok, és melyek nem?

$$(a) (\mathbb{Z}; +) \rightarrow S_3, n \mapsto (1\ 2\ 3)^n; \quad (b) T(\{1, 2, 3\}) \rightarrow T(\{1, 2, 3\}), \varphi \mapsto \varphi \circ \varphi;$$

$$(c) T(\{1, 2\}) \rightarrow T(\{1, 2\}), \varphi \mapsto \varphi \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (d) (R_{10}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_4; +), \overline{3^n} \mapsto \overline{n} \ (n = 0, 1, 2, 3);$$

$$(e) (R_{10}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_4; +), \overline{3^n} \mapsto \overline{2n} \ (n = 0, 1, 2, 3); \quad (f) (R_{10}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_8; +), \overline{3^n} \mapsto \overline{n^3} \ (n = 0, 1, 2, 3);$$

$$(g) (\mathbb{Z}_{10}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{10}; +), \overline{k} \mapsto \overline{5}; \quad (h) (\mathbb{Z}_{12}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}_8; +), \overline{k} \mapsto \overline{2k};$$

$$(i) (\mathbb{Z}_{12}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}_4; +), \overline{k} \mapsto \overline{3k}; \quad (j) (\mathbb{Q}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +), x \mapsto 3x + 7i;$$

$$(k) (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +), x \mapsto 2x - 5xi; \quad (l) (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{R}; +), x + iy \mapsto y;$$

$$(m) (\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+; \cdot), x \mapsto \sqrt{x}; \quad (n) (\mathbb{Z}; +) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot), k \mapsto \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7};$$

$$(o) (\mathbb{N}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{N}; \cdot), n \mapsto 1; \quad (p) (\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +), x \mapsto \log_2 x;$$

$$(q) (\mathbb{Z}; +) \rightarrow (\mathbb{Q}; +), x \mapsto x - 1; \quad (r) (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{C}; +), x + iy \mapsto (2x + 6y) + (4x - 10y)i;$$

$$(s) (\mathbb{R}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; \cdot), x \mapsto x^{15}; \quad (t) (\mathbb{Z}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{N}_0; \cdot), x \mapsto |x|;$$

$$(u) (\mathbb{R}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; \cdot), x \mapsto \sin x; \quad (v) (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}; \cdot), x + iy \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x - iy};$$

$$(w) (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +), r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \mapsto \varphi, \text{ ahol } \varphi \in \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r < 2\pi\}.$$

6.9. Feladat. Adott az $F_{\{x\}}$ szabad félcsoport, és az $(\mathbb{N}; +)$ félcsoport. Határozza meg azokat a φ homomorfizmusokat, amelyekre $\varphi: F_{\{x\}} \rightarrow \mathbb{N}$, $x\varphi = 1$. Hány ilyen homomorfizmus van?

Van-e $F_{\{x\}}$ -ből $(\mathbb{N}; +)$ -ba olyan ψ homomorfizmus, amelyre $x\psi \neq 1$? Ha van, akkor adjon is meg egy ilyen.

6.10. Feladat. Adott az $F_{\{x,y\}}$ szabad félcsoport és az $A = (\{a, b\}; \cdot)$ félcsoport, melyben az alaphalmaz bármely u, v elemére

$$(a) \ u \cdot v = a;$$

$$(b) \ u \cdot v = u$$

teljesül. Adj meg azt a $\varphi: F_{\{x,y\}} \rightarrow A$ homomorfizmust, amelyre $x\varphi = a$, $y\varphi = b$.

6.11. Feladat. Az inverziók számának meghatározásával döntse el, hogy az alábbi S_6 -beli permutációk közül melyek párosak, és melyek páratlanok.

$$(a) \text{id}; \quad (b) (1\ 4\ 2); \quad (c) (6\ 2)(5\ 3\ 1);$$

$$(d) (1\ 3)(2\ 6)(5\ 4); \quad (e) (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6); \quad (f) (1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 6).$$

6.12. Feladat. Transzpozíciókra bontás segítségével döntse el, hogy az alábbi S_6 -beli permutációk közül melyek párosak, és melyek páratlanok.

$$(a) \text{id}; \quad (b) (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6); \quad (c) (1\ 5)(2\ 3);$$

$$(d) (1\ 2)(3\ 5)(2\ 3)(4\ 5); \quad (e) (1\ 6\ 4)(2\ 5\ 3); \quad (f) ((1\ 5)(2\ 4\ 6\ 3))^{2004};$$

$$(g) ((2\ 4\ 3)(6\ 5))^{2004^{2003^{2004}} + 2003^{2004^{2003}}}.$$