

Válogatott témák
a diszkrét matematika köréből
speciálkollégium

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, Szeged

1994. tavasz

Tartalom

(A) Gráfok Shannon-kapacitása	1
• Gráfok Shannon-kapacitása • A lineáris programozás és a Shannon-kapacitás kapcsolata • Gráfok ortonormált-reprezentációja és a Shannon-kapacitás kapcsolata • A C_5 gráf Shannon kapacitása • A $\vartheta(G)$ függvény ekvivalens definíciói • Szimmetrikus gráfok ϑ paramétere és a sajátértékek kapcsolata • A $\vartheta(C_n)$ és $\vartheta(K(n, r))$ paraméterek kiszámítása	
(B) Kommunikációs bonyolultság	12
• Chipek és kommunikáció • 0-1 mátrixok kombinatorikus paraméterei és kommunikációs bonyolultság • Rang alsó becslés • Partíciós mátrix • Részen rendezett halmazok, Möbius függvény, hálók • Determinisztikus és nem determinisztikus bonyolultság közötti kapcsolat • Példák kommunikációs protokollokra • Véletlen kommunikációs protokollok	
(C) Gráfok kromatikus száma	33
• Nem-k-színezhető gráfok karakterizációja, Hajós tétel • Háromszög nélküli gráfok nagy kromatikus számmal • Rövid páratlan kör nélküli gráfok nagy kromatikus számmal: Kneser gráf és kromatikus száma • Rövid kör nélküli gráfok nagy kromatikus számmal • A sík kromatikus száma • Szorzat-gráfok kromatikus száma	
(D) Döntési fák	36
• A döntési fa modell, zárkózott függvények • Zárkózottság bizonyítások az "ellenséges stratégia" módszerével • Zárkózottság bizonyítások paritási megfontolások segítségével: Rivest-Vuillemin tétel	

1. óra

Gráfok Shannon -kapacitása

Lejegyezte: Csaba Béla

1 Jelölések

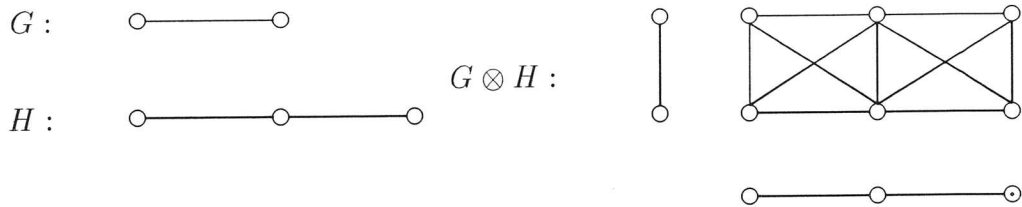
$G = (V(G), E(G))$ egyszerű gráf, G egy éle $e = xy \in E(G)$, ahol $x, y \in V(G)$. $\alpha(G)$ G egy maximális méretű független csúcshalmazának elemszáma, $\omega(G)$ a maximális klikk elemszáma, míg $\chi(G)$ -vel a G gráf kromatikus számát jelöljük. K_n a teljes n pontú gráf.

Legyen most Σ ábécé, és tegyük fel, hogy Σ bizonyos jelei összetéveszthetők. Σ -hoz megadhatunk egy G gráfot: $V(G) = \Sigma$, és $xy \in E(G)$ pontosan akkor, ha x és y összetéveszthetők. Ekkor nyilván $\alpha(G)$ a maximális méretű, páronként megkülönböztethető csúcsokból álló halmaz elemszáma. Legyen most $\sigma, \tau \in \Sigma^*$. σ és τ összetéveszthetők, ha egyenlő hosszúak, és a megfelelő helyen lévő jelek összetéveszthetők, vagy azonosak.

2 Definíciók és tételek

Definíció 2.1 Legyen G és H gráf. Ekkor szorzatuk, a $G \otimes H$ gráf a következő: $V(G \otimes H) = V(G) \times V(H)$; $E(G \otimes H) = \{(x, y)(u, v) \mid x = u, yv \in E(H), \text{ vagy } xu \in E(G), y = v, \text{ vagy } xu \in E(G), yv \in E(H)\}$. $G^k = G \times G \times \dots \times G$ (k tényezős szorzat).

Példa:



Ekkor $\alpha(G^k)$ a maximális méretű, k hosszú és páronként összetéveszthetetlen szavakból álló halmaz elemszáma.

Lemma 2.2 $\alpha(G \otimes H) \geq \alpha(G) \cdot \alpha(H)$.

Biz.: Legyen $A \subseteq V(G), B \subseteq V(H)$ független halmaz. Ekkor a szorzat definíciója alapján az $A \times B$ "téglalapban" nem lehet él, így $A \times B$ független $G \otimes H$ -ban. $\square$

További észrevételek: ha $G = K_l \Rightarrow \alpha(G^k) = 1$. Ha $G \neq K_l$ és $G \neq 0 \Rightarrow \alpha(G) \geq 1$, és így $|V(G)|^k > \alpha(G^k) > 2^k$.

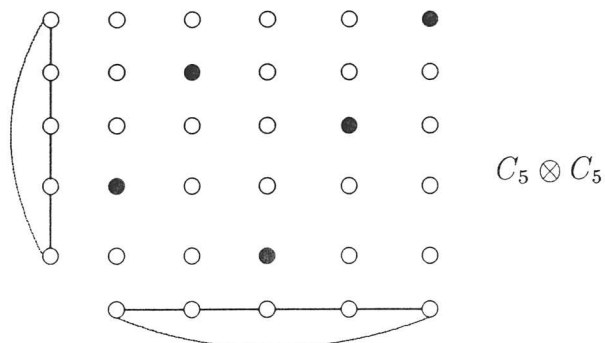
Lemma 2.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$ létezik.

Biz.: Legyen $n = b \cdot k + m$ ($0 \leq m < k$). $\alpha(G^n) \geq \alpha(G^k)^b \cdot \alpha(G^m) \geq \alpha(G^k)^b \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha(G^n)} \geq \alpha(G^k)^{\frac{b}{bk+m}} \geq \sqrt[k]{\alpha(G^k)^{\frac{b}{b+1}}} > \sqrt[k]{\alpha(G^k)} - \varepsilon$. ε tetszőlegesen kicsi lehet, ha b elég nagy. Ebből a határérték létezése adódik. $\square$

Definíció 2.4 Legyen G gráf. Ekkor $\Theta(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$ a G Shannon-kapacitása.

Megjegyzés 2.5 $\Theta(G) \geq \alpha(G), \sqrt{\alpha(G^2)}, \sqrt[3]{\alpha(G^3)}, \dots$

Jelöljük C_5 -tel az ötpontú körgráfot. Nyilván $5 \geq \Theta(C_5) \geq 2 = \alpha(C_5)$.



Mivel $C_5 \times C_5$ -ben ez az öt pont független, így $\Theta(C_5) \geq \sqrt{5}$.

3 $\alpha^*(G)$ és kapcsolata a Shannon-kapacitással

$A \subseteq V(G)$ azonosítható a $|V(G)|$ hosszú 0-1 vektorral, amiben pontosan az A elemeinek helyén áll 1-es, jele: $\underline{x}_A$. Ekkor $\alpha(G) = \max\{(\underline{1}, \underline{x}_A) \mid A \text{ független}\}$.

Definíció 3.1 $STAB(G) = \text{conv}\{\underline{x}_A \mid A \text{ független}\}$. Ekkor $\alpha(G) = \max\{(\underline{1}, \underline{x}) \mid \underline{x} \in STAB(G)\}$.

Ha $x \in STAB(G)$, akkor

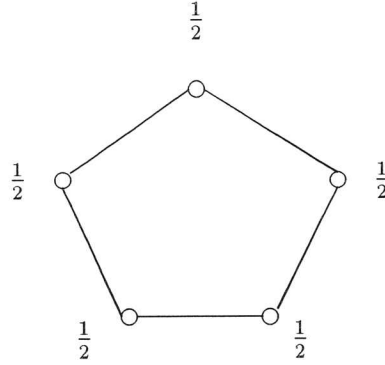
$$(1)_v \quad 0 \leq x_v \leq 1,$$

$$(2)_K \quad \sum_{v \in V(K)} x_v \leq 1.$$

Itt x_v x v -nek megfelelő koordinátája, és K G -beli klikk.

Definíció 3.2 $QSTAB(G) = \{x \mid (1)_v \text{ és } (2)_K \text{ teljesül } \forall v, K \text{ esetén}\}$.

Megjegyzés 3.3 $STAB(C_5) \subset QSTAB(C_5)$, hiszen $STAB(G) \subseteq QSTAB(G) \forall G$ -re, másrészt az $x = (1/2, \dots, 1/2)$ vektor csak $QSTAB(C_5)$ -nek eleme.



Definíció 3.4 $\alpha^*(G) = \max\{(\underline{1}, \underline{x}) \mid \underline{x} \in QSTAB(G)\}$.

Legyenek most G, H gráfok, K G -beli klikk, az A ponthalmaz $G \otimes H$ -nak egy független részhalmaza. Legyen $\Pi_G : V(G) \times V(H) \rightarrow V(G)$ projekció, hasonlóan értelmezzük a Π_H leképezést. Legyen továbbá $w_x = |\Pi_G^{-1}(x) \cap A|$. Ekkor igaz a következő tétel:

Tétel 3.5

$$\sum_{x \in V(K)} w_x \leq \alpha(H)$$

Biz.: $|\Pi_G^{-1}(x) \cap A| = |\Pi_H(\Pi_G^{-1}(x) \cap A)|$ (vízszintes halmaz projekciója). Mivel A független, így a $\Pi_H(\Pi_G^{-1}(x) \cap A)$ halmazok $\forall x$ -re diszjunktak, és az uniójuk független H -ban. Tehát

$$\sum_{x \in V(K)} w_x = \left| \bigcup_{x \in V(K)} \Pi_H(\Pi_G^{-1}(x) \cap A) \right|,$$

így kaptuk, hogy az állítás igaz. □

Következmény 3.6 Tekintsük a $(\frac{w_x}{\alpha(H)})_{x \in V(G)}$ vektort. Mivel mind az $(1)_v$, mind a $(2)_K$ feltételeket teljesíti, $QSTAB(G)$ -be tartozik. Lesz:

$$\alpha^*(G) \geq \sum_{x \in V(G)} \frac{w_x}{\alpha(H)} = \frac{|A|}{\alpha(H)}$$

A tetszőleges volt, így $\alpha^*(G) \geq \frac{\alpha(G \otimes H)}{\alpha(H)}$. Tekintsük most a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{aligned} \alpha^*(G) &\geq \alpha(G) \\ \alpha^*(G) &\geq \frac{\alpha(G^2)}{\alpha(G)} \\ &\vdots \\ \alpha^*(G) &\geq \frac{\alpha(G^k)}{\alpha(G^{k-1})} \end{aligned}$$

A tagokat összeszorozva kapjuk, hogy $\alpha^*(G)^k \geq \alpha(G^k)$. Tehát $\alpha^*(G) \geq \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$, és mivel ez minden k -ra igaz, így $\alpha^*(G) \geq \Theta(G)$. Speciálisan $2.5 \geq \Theta(C_5) \geq \sqrt{5}$.

Tétel 3.7 $\chi(\overline{G}) \geq \alpha^*(G)$.

Biz.: Tegyük fel, hogy $x \in QSTAB(G)$. $\overline{G}$ színezése G -nek egy klikkfedését adja, és viszont. $\overline{G}$ legkevesebb színnel való színezése tehát egyúttal G -nek minimális számú klikkkel való lefedése. A $(2)_K$ feltétel szerint x koordinátáinak összege bármely klikkre vonatkozóan legfeljebb 1. A minimális klikkfedést tekintve, x összes komponensének összege legfeljebb a lefedő klikkek száma, amiből a tétel következik. $\square$

Összefoglalva: $\chi(\overline{G}) \geq \alpha^*(G) \geq \Theta(G) \geq \alpha(G)$.

* * *

Definíció 3.8 G univerzális, ha $\alpha^*(G) = \alpha(G)$.

Tétel 3.9 G pontosan akkor univerzális, ha $\forall H$ -ra $\alpha(G \otimes H) = \alpha(G) \cdot \alpha(H)$.

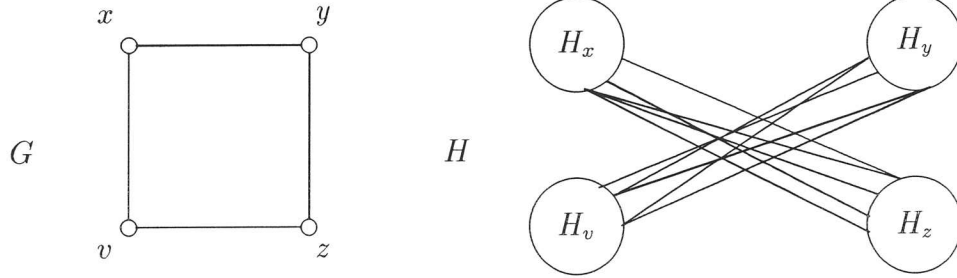
Biz.: Mivel $\alpha^*(G) \geq \frac{\alpha(G \otimes H)}{\alpha(H)} \geq \alpha(G)$, így ha G univerzális, akkor

$$\alpha(G \otimes H) = \alpha(G) \cdot \alpha(H).$$

Másrészt tegyük fel, hogy $\alpha^*(G) > \alpha(G)$. Ekkor létezik $\underline{x} \in QSTAB(G)$, hogy $(\underline{1}, \underline{x}) > \alpha(G)$, és $\underline{x}$ koordinátái racionálisak (a belső szorzat folytonos). Legyen $\underline{x}$ komponenseinek közös nevezője w . Ekkor igaz a következő:

$$\sum_{u \in V(G)} \frac{w_u}{w} > \alpha(G).$$

Most G csúcsait helyettesítsük halmazokkal, az u csúcs képe legyen w_u darab független pont: H_u . Két ponthalmaz között menjen az összes lehetséges él, ha a megfelelő pontok G -ben nincsenek összekötve, különben a halmazok legyenek függetlenek. Az így kapott gráf legyen H .



Tekintsük most a $G \otimes H$ gráfot. Az (u, H_u) halmazokon belül nincsenek élek, és ha $u \neq v$, akkor az (u, H_u) , (v, H_v) halmazok között sincsenek. Tehát $G \otimes H$ -ban létezik

$$|V(H)| = \sum_{u \in V(G)} w_u$$

elemszámú független halmaz. Egy előző egyenlőtlenség alapján kaptuk, hogy $\alpha(G \otimes H) > w \cdot \alpha(G)$. Látható:

$$\alpha(H) = \max_{K \text{ } G\text{-beli klikk}} \left| \bigcup_{u \in V(K)} H_u \right| = \max_{u \in V(K)} \sum_{u \in V(K)} w_u.$$

Mivel

$$\sum_{u \in V(K)} \frac{w_u}{w} \leq 1 \Rightarrow \max \sum w_u \leq w.$$

Innen pedig az $\alpha(G \otimes H) > \alpha(G) \cdot \alpha(H)$ egyenlőtlenség következik, ez pedig ellentmondás. $\square$

2-4. előadás

Gráfok ortonormált reprezentációja

DEFINÍCIÓ: A G gráf ortonormált (ON) reprezentációja egy $\varphi : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, ahol

- (i) minden csúcs képe egységvektor,
- (ii) minden nem összekötött csúcspárnak megfelelő két vektor merőleges egymásra. $\diamond$

DEFINÍCIÓ: Legyen φ a G gráf egy n -dimenziós ON-reprezentációja.

Ekkor a φ reprezentáció értéke a $c \in \mathbb{R}^n$ vektorra nézve:

$$v(\varphi, c) = \max_{x \in V(G)} \frac{1}{(c\varphi(x))^2}.$$

(Ha valamely $x \in V(G)$ esetén c és $\varphi(x)$ merőleges vektorok, akkor $v(\varphi, c) = \infty$.)

A φ reprezentáció értéke

$$v(\varphi) = \min_{c \in \mathbb{R}^n : \|c\|=1} v(\varphi, c). \quad \diamond$$

DEFINÍCIÓ: (Lovász-féle theta-függvény) Legyen G egy gráf.

$$\vartheta(G) = \min_{\varphi \text{ a } G \text{ gráf ON-reprezentációja}} v(\varphi). \quad \diamond$$

PÉLDA: C_5 egy ψ ON-reprezentációja egy c vektorral: Vegyünk fel 6 azonos egységvektort. Gondoljuk ezek közül egyre, mint "egy esernyő nyelére" (ez a c vektor) és a többire mint "az esernyő 5 bordájára" (ezek lesznek a reprezentációban C_5 csúcsainak megfelelő vektorok). Alkalmasan kinyitva az esernyőt, a bordák C_5 egy reprezentációját adják. Erre a reprezentációra és a c vektorra $v(\psi, c) = \sqrt{5}$.

A ϑ függvény és a Shannon kapacitás kapcsolata

PROPOZÍCIÓ: $\vartheta(G) \geq \alpha(G)$. $\blacksquare$

DEFINÍCIÓ: $c \in \mathbb{R}^n$ és $d \in \mathbb{R}^m$ két vektor. *Tenzorszorzatuk* $(c \otimes d)$ egy $\mathbb{R}^{nm}$ -beli vektor, amely pozíciói c és d pozícióiból alkotott párokkal vannak azonosítva. $(c \otimes d)_{uv} = c_u \cdot d_v$.

ψ a G gráf reprezentációja és ϕ a H gráf reprezentációja, akkor ezen reprezentációk szorzata $\psi \otimes \phi : V(G) \times V(H) \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ leképezés, ahol az (u, v) csúcs-pár képe $\phi(u) \otimes \psi(v)$.
 $\diamond$

LEMMA: Legyen ϕ a G gráf n -dimenziós ON-reprezentációja és ψ a H gráf m -dimenziós ON-reprezentációja. Legyen $c \in \mathbb{R}^n$ és $d \in \mathbb{R}^m$ két egységvektor.

(a) $\phi \otimes \psi$ a $G \boxtimes H$ gráf nm -dimenziós ON-reprezentációja.

(b) $v(\phi \otimes \psi, c \otimes d) = v(\phi, c)v(\psi, d)$. ■

KÖVETKEZMÉNY: $\vartheta(G \boxtimes H) \leq \vartheta(G)\vartheta(H)$. ■

KÖVETKEZMÉNY: $\theta(G) \leq \vartheta(G)$. ■

KÖVETKEZMÉNY: $\theta(C_5) = \sqrt{5}$.

BIZONYÍTÁS: $\theta(C_5) \leq \vartheta(C_5) \leq \sqrt{5}$. Korábbi eredményeink alapján egyenlőség áll fenn.
 $\blacksquare$

A C_5 eddig kiszámolt paraméterei összefoglalva:

$$\alpha(C_5) = 2 < \sqrt{5} = \theta(C_5) = \vartheta(C_5) < \frac{5}{2} = \alpha^*(C_5) < 3 = \chi(\bar{C}_5).$$

A ϑ függvény ekvivalens definíciói

A továbbiakban szereplő vektorok pozíciói, mátrixok sorai és oszlopai egy G gráf csúcsaival vannak azonosítva. $\underline{1}$ a csupa 1-et tartalmazó vektor és J a csupa 1-et tartalmazó mátrix.

DEFINÍCIÓ: Legyen ϕ egy ON-reprezentációja G -nek és c egy egységvektor. Egy x vektor kielégíti a $\mathcal{F}_{\phi, c}$ feltételt, ha

$$\sum_{v \in V(G)} (c\phi(v))^2 \cdot x_v \leq 1.$$

Legyen

$$TH(G) = \{ x \in \mathbb{R}^{|V(G)|} : x_v \geq 0 \text{ minden } v \text{ csúcsra és } x \text{ kielégíti } \mathcal{F}_{\phi, c}\text{-t} \\ \text{minden } \phi \text{ ON-reprezentációra és } c \text{ egységvektorra} \}. \quad \diamond$$

LEMMA: $STAB(G) \subseteq TH(G) \subseteq QSTAB(G)$. ■

DEFINÍCIÓ:

$$\vartheta_0(G) = \max\{ \underline{1}x : x \in TH(G) \}. \quad \diamond$$

Megjegyezzük, hogy $\vartheta_0(G) \leq \alpha^*(G)$.

DEFINÍCIÓ: Legyen

$$\mathcal{M}_G = \{ M : M \text{ szimmetrikus és } uv \notin E(G) \text{ esetén } M_{uv} = 0 \}.$$

$$\vartheta_2(G) = \min_{M \in \mathcal{M}_G} \Lambda(J + M),$$

ahol Λ a legnagyobb sajátértéket jelöli. $\diamond$

DEFINÍCIÓ: Legyen

$$\mathcal{M}_G^\perp = \{ M : M \text{ szimmetrikus és } uv \in E(G) \text{ esetén } M_{uv} = 0 \}.$$

$$\vartheta_3(G) = \max_{\substack{M \in \mathcal{M}_G^\perp \\ \text{Tr}(M)=1 \\ M \text{ pozitívszemidefinit}}} \underline{1}^\perp M \underline{1}. \quad \diamond$$

DEFINÍCIÓ: Legyen $\bar{\phi}$ a $\bar{G}$ gráfnak (G komplementerének) ON-reprezentációja. Azaz $\bar{\phi} : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^N$, $|\bar{\phi}(u)| = 1$ és $uv \in E(G)$ esetén $\bar{\phi}(u) \perp \bar{\phi}(v)$.

Legyen $\bar{v}(\bar{\phi}, c) = \sum_{v \in V(G)} (c\bar{\phi}(v))^2$. Továbbá

$$\vartheta_4(G) = \max_{\substack{\bar{\phi} \text{ a } \bar{G} \text{ gráf ON-reprezentációja} \\ |c|=1}} \bar{v}(\bar{\phi}, c). \quad \diamond$$

TÉTEL: $\vartheta_0(G) = \vartheta(G) = \vartheta_2(G) = \vartheta_3(G) = \vartheta_4(G) = \vartheta_0(G)$.

BIZONYÍTÁS: A következő egyenlőtlenségekből adódik az összes egyenlőség: $\vartheta_0(G) \leq \vartheta(G) \leq \vartheta_2(G) \leq \vartheta_3(G) \leq \vartheta_4(G) \leq \vartheta_0(G)$. A részletes, technikai bizonyítást lásd: M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag (1988), 287-290. old. ■

KÖVETKEZMÉNY: $\alpha(G) \leq \theta(G) \leq \vartheta(G) \leq \alpha^*(G)$. ■

KÖVETKEZMÉNY: $\vartheta(G \boxtimes H) = \vartheta(G)\vartheta(H)$. ■

Szimmetrikus gráfok ϑ paramétere és a sajátértékek kapcsolata

TÉTEL: Ha G reguláris gráf, akkor

$$\vartheta(G) \leq \frac{-n\lambda(G)}{\Lambda(G) - \lambda(G)},$$

ahol $\lambda(G)$ a G gráf legkisebb és $\Lambda(G)$ a G gráf legnagyobb sajátértéke. ■

TÉTEL: Ha G reguláris és éltranzitív gráf, akkor

$$\vartheta(G) = \frac{-n\lambda(G)}{\Lambda(G) - \lambda(G)}. \quad \blacksquare$$

LEMMA:

- (a) C_n sajátértékei $\cos \frac{k2\pi}{n}$, ahol $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.
 (b)

$$\vartheta(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{n \cos \frac{2\pi}{n}}{1 + \cos \frac{2\pi}{n}}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy C_7 paramétereire a következők ismertek:

$$3,2141\dots = 7^{3/5} \leq \theta(C_7) \leq \vartheta(C_7) = \frac{7 \cos \frac{2\pi}{7}}{1 + \cos \frac{2\pi}{7}} = 3,3176\dots$$

DEFINÍCIÓ: $K(n, r)$ Kneser-gráf csúcshalmaza $\binom{U}{r}$, ahol U egy n elemű halmaz. Két csúcs (U r elemű részhalmaza) össze van kötve, ha diszjunktak. $\diamond$

LEMMA: Legyen $2r \leq n$

- (a) A Kneser-gráf sajátértékei $(-1)^t \binom{n-r-t}{r-t}$, $\binom{n}{t} - \binom{n}{t-1}$ multiplicitással ($t = r, r-1, \dots, 2, 1, 0$).
 (b) $\vartheta(K(n, r)) = \binom{n-1}{r-1}$. $\blacksquare$

KÖVETKEZMÉNY: (Erdős-Rado tétel) Legyen $2r \leq n$. Egy n elemű halmaz r elemű részhalmazai közül legfeljebb $\binom{n-1}{r-1}$ választható ki úgy, hogy semelyik két részhalmaz se legyen diszjunkt.

BIZONYÍTÁS: $\alpha(K(n, r)) \geq \binom{n-1}{r-1}$ könnyen látható. $\binom{n-1}{r-1} \leq \alpha(K(n, r)) \leq \vartheta(K(n, r)) = \binom{n-1}{r-1}$ alapján egyenlőség áll fenn, ami éppen a bizonyítandó állítás. $\blacksquare$

Kommunikációs bonyolultság

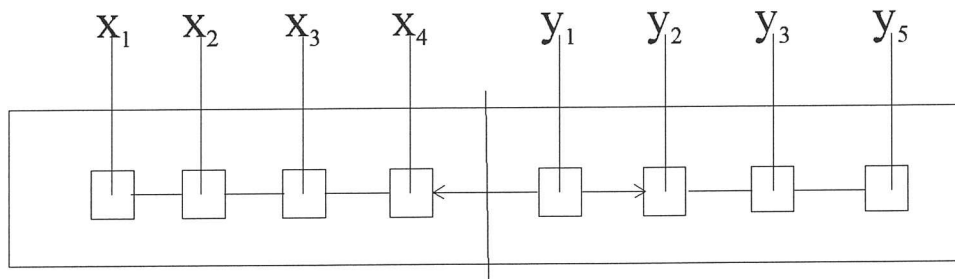
1. előadás

Előadó:
Dr. Hajnal Péter
egyetemi docens

Készítette:
Békési József
Ph.D. hallgató

Tekintsük a következő problémát. Adott két n hosszú 0-1 sorozat, x és y mint input. Szeretnénk olyan chipeket tervezni, amely eldönti x -ről és y -ről, hogy egyenlőek-e. Kérdés milyen mérete illetve időbonyolultsága van a fenti problémának.

I. algoritmus:



y_1 elküldi az ő bitjét a balról mellette levő elemnek, azzal hogy adja tovább, majd szól a jobbra levőnek, hogy ő is küldje a bitjét. Ezután y_2 csinálja ugyanezt, miközben a jobbról érkező biteket mindenki küldi tovább balra. Így n lépés után x_1 és y_1 találkoznak. Ekkor x_1 már tudja, hogy az első bitek megegyeznek-e. Elindul egy üzenet jobbra hogy "eddig minden jó", vagy "nem jó". A következő lépésnél x_2 is ellenőrzi, hogy az ő bitjei egyeznek-e, majd ezt kombinálva a hozzá balról érkező üzenettel, küldi tovább az információt jobbra. Amikor az eljárás x_n -hez ér, az már tudja az eredményt.

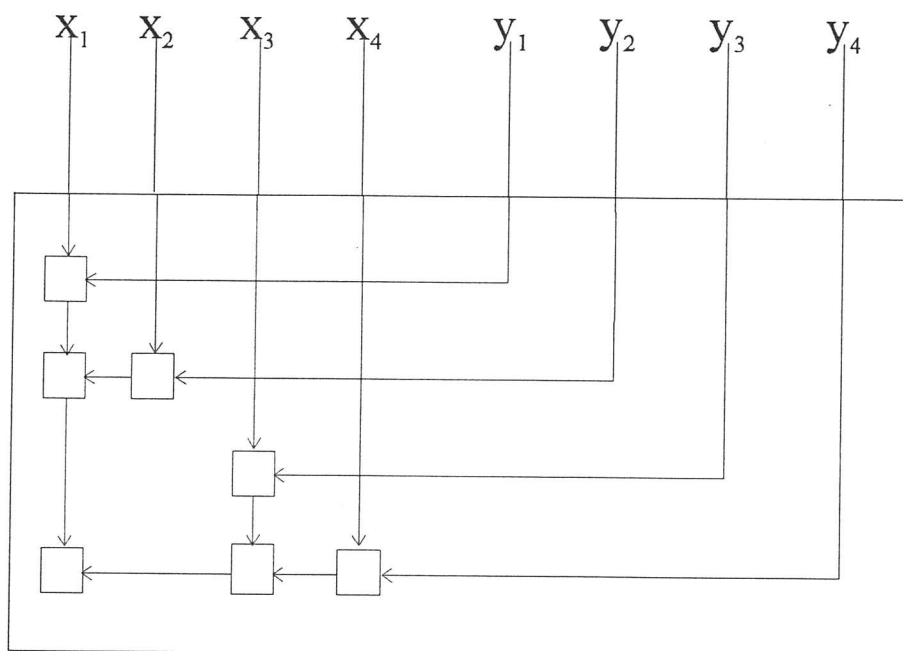
Ennek az eljárásnak két paramétere van, az időbonyolultsága illetve a mérete.

Az időbonyolultság : $T = \Theta(n) \approx 2n$.

A mérete: $A = cn$.

A méret optimális, az időt viszont lehet javítani az alábbi módon:

II. algoritmus:



Amennyiben a kommunikációt a fenti ábrának megfelelően folytatjuk, akkor:

$$T \approx \log_2 n$$

$$A = cn^2.$$

Vizsgáljuk most azt, mit lehet mondani az AT szorzatra, feltéve, hogy az elemek összehasonlítása céljából kommunikációra van lehetőség két egység között, amelyekkel az inputokat közöltük.

Tétel:

$$AT \geq n^2.$$

Bizonyítás:

Húzzunk képzeletben egy függőleges vonalat, amely két részre osztja a chipet, az egyik rész tartalmazza az $x_1, \dots, x_n$ kapukat, a másik rész pedig az $y_1, \dots, y_n$ kapukat. Nyilvánvaló, hogy legalább n bitnek mindenképpen át kell haladni ezen a felezővonalon. Mivel csupán T

lépésünk van, ezért lenni kell olyan lépésnek, amikor legalább $\frac{n}{T}$ bit lépi át a vonalat. Egy

vonal egyszerre csak egy bitet tud átvinni, ezért legalább $\frac{n}{T}$ olyan vonalnak kell lenni, ami

áthalad a felezővonalon. Toljuk most a felezővonalat egy pozícióval jobbra. Ekkor x_1 és y_1 ugyanarra az oldalra esik, így kevesebb információnak kell áthaladni a vonalon. Ezen az új

vonalon legalább $\frac{n-1}{T}$ bitnek kell egyszerre áthaladni. Hasonlóan, ha kettővel toljuk jobbra a

felezővonalat, $\frac{n-2}{T}$ huzal kell. Összeadva ezeket a számokat, megkapjuk a vízszintes huzalok teljes hosszát, ami alsó korlát a méretre vonatkozóan. Így

$$A \geq \frac{n}{T} + 2\frac{n-1}{T} + 2\frac{n-2}{T} + \dots = \frac{n^2}{T} \Rightarrow AT \geq n^2.. \quad \blacksquare$$

Legyen adott egy $f: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$ függvény, ahol $X = Y = \{0,1\}^n$. Tegyük fel A csak az X inputokat, B pedig csak az Y inputokat ismeri. Ezek ismeretében szeretnék kommunikáció segítségével kiszámolni f -et. Definiálhatunk egy kommunikációs protokollt, amely a következő:

A protokoll leírja, hogy az első bitet ki küldi. Ha B , akkor az általa küldött bitet az $f_1: Y \rightarrow \{0,1\}$ függvény írja le, míg ha A , akkor az általa küldött bitet az $f_2: X \rightarrow \{0,1\}$ függvény határozza meg.

Az f függvényhez egy mátrixot rendelhetünk, amelynek sorai az X halmaz, oszlopai az Y halmaz elemeit reprezentálják. Az M_f mátrix (x, y) eleme pedig az $f(x, y)$ értéket tartalmazza.

$$M_f = \begin{matrix} & y \\ x & \begin{pmatrix} f(x, y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Az előbbieken említett protokollt úgy is tekinthetjük, mint az M_f mátrix egy felbontását, az alábbiak szerint.

1. lépés:

$Y = Y_0 \cup Y_1 \rightarrow M_f = M_0 \cup M_1$, ahol $M_0 = M_{|X \times Y_0}$, $M_1 = M_{|X \times Y_1}$, vagy

$X = X_0 \cup X_1 \rightarrow M_f = M_0 \cup M_1$, ahol $M_0 = M_{|X_0 \times Y}$, $M_1 = M_{|X_1 \times Y}$.

$Y_0 = f_1^{-1}(0)$, $Y_1 = f_1^{-1}(1)$, $X_0 = f_2^{-1}(0)$, $X_1 = f_2^{-1}(1)$

$$(M_f) = (M_0 | M_1), \text{ vagy } M_f = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \end{pmatrix}.$$

i-edik lépés:

Az előző fázisban kapott mátrixokat egymástól függetlenül tovább osztjuk. Akkor állunk le, ha egy fázisban az összes mátrix homogén, azaz minden elem ugyanaz.

Az ilyen felbontást a mátrix Guillotine felbontásának nevezzük. A π protokoll tehát az M_f mátrix egy G Guillotine felbontását adja.

Definíciók, jelölések:

1. $C(x, y; \pi)$: = az elküldött bitek száma, ahol $x \in X, y \in Y, \pi$ protokoll.
2. $C(f)$: = $\min_{\pi \text{ kisz. } f\text{-et}} C(\pi)$
3. $C(G)$: = a G -hez tartozó fázisok száma, ahol G egy Guillotine felbontás.
Ekkor $\max_{x,y} C(x, y; \pi) = C(\pi)$.
4. $C(M_f)$: = $\min_{G \text{ Guillotine felbontása } M_f\text{-nek}} C(G)$.
5. $\tilde{C}(G)$: = az eljárás végén a mátrixok száma.
6. $\tilde{C}(M_f)$: = $\min_{G \text{ Guillotine felbontása } M_f\text{-nek}} \tilde{C}(G)$

Megjegyzés: $C(f) = C(M_f)$.

Állítás: $\tilde{C}(G) \leq 2^{C(G)}$.

Abból következik, hogy minden lépésben legfeljebb megduplázódnak a mátrixok.
Így $\log(\tilde{C}(G)) \leq C(G) \Rightarrow \log(\tilde{C}(M_f)) \leq C(M_f) = C(f)$.

Definíció:

$\Pi(M_f)$: = $\min_{F \perp M_f} \tilde{C}(F) \leq \tilde{C}(M_f)$, ahol $F \perp M_f = F$ felbontása M_f -nek diszjunkt homogén mátrixokra.

Így $\log_2(\Pi(M_f)) \leq \log_2(\tilde{C}(M_f)) \leq C(M_f) = C(f)$.

Definíció:

$K(M_f)$: = $\min_{F \angle M_f} \tilde{C}(f)$, ahol $F \angle M_f = F$ homogén részmátrixokkal való fedése M_f -nek.

A különbözőség Π -hez képest, hogy ezek nem feltétlenül diszjunktak.

$\Pi_1(M_f)$: = az 1-esek minimális felbontása

$\Pi_0(M_f)$: = az 0-sok minimális felbontása.

$\Pi(M_f) = \Pi_0(M_f) + \Pi_1(M_f)$.

$K_1(M_f)$: = az 1-esek fedéséből jövő érték.

$K_0(M_f)$: = a 0-sok fedéséből jövő érték.

$K(M_f) \leq \Pi(M_f)$

$K(M_f) = K_0(M_f) + K_1(M_f)$

Példa:

Legyen $f(x, y) = \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$, és tekintsük a hozzá tartozó M_f mátrixot, melynek főátlójában 1-esek vannak, többi eleme 0. $M_f = I_{n \times n}$, ahol n az x -ek száma ($= 2^k$, ha x k hosszú bitsorozat).

Állítás:

$$(i) K_1(M_f) = |X|.$$

$$(ii) K_0(M_f) \leq 2 \lceil \log_2(|X|) \rceil.$$

Bizonyítás:

(i)

Abból következik, hogy két egyes nem lehet ugyanabban a homogén téglalapban.

(ii)

Legyen $k = \log_2(|X|)$. Ekkor minden $x \in X$ azonosítható egy k hosszú bitsorozattal.

Legyen

$$N_i = \{x \in X : x \text{ kódjának } i\text{-edik bitje } 0\}, \text{ továbbá } E_i = \{x \in X : x \text{ kódjának } i\text{-edik bitje } 1\}.$$

Ekkor $E_i \times N_i$, illetve $N_i \times E_i$ $i = 1, \dots, k$ -ra 0 homogén téglalapok, amelyekkel lefedhető M_f ■

Rang alsó becslés

Az 1-homogén téglalapokkal optimálisan lefedett M_f mátrix felírható a következőképpen:

$$M_f = \sum_{i=1}^{\tilde{C}_1(F)} M_f^i, \text{ ahol } M_f^i \text{ olyan mátrix, amelynek minden eleme 0, kivéve az } i\text{-edik 1-}$$

homogén téglalapot, ahol 1. Az M_f^i mátrixok rangja 1, mert csupán kétféle sort tartalmaznak, vagy csupa 0-t, vagy olyat amelyik az 1-homogén téglalap oszlopaiban 1, máshol 0.

Ismert mátrix rangjára vonatkozóan az alábbi tétel: $rk(A+B) \leq rk(A) + rk(B)$, ahol $rk(A)$ az A mátrix rangját jelenti.

Ez alapján:

$$rk(M_f) = rk\left(\sum_{i=1}^{\tilde{C}_1(F)} M_f^i\right) \leq \sum_{i=1}^{\tilde{C}_1(F)} rk(M_f^i) = \Pi_1(M_f), \text{ ahol } \Pi_1(M_f) \text{ az 1-homogén téglalapok száma.}$$

Következmény:

$rk(J - M_f) \leq \Pi_0(M_f)$, ahol J a csupa 1-esből álló mátrix.

Bizonyítás:

$$rk(J - M_f) \leq \Pi_1(J - M_f) = \Pi_0(M_f). \quad \blacksquare$$

Következmény:

$$C(f) \geq \log_2(rk(M_f)).$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} C(f) &= C(M_f) \geq \log_2(\tilde{C}(M_f)) \geq \log_2(\Pi_1(M_f) + \Pi_0(M_f)) \geq \\ &\geq \log_2(rk(M_f)) + \log_2(rk(J - M_f)) \geq \log_2(rk(M_f)). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Megjegyzés:

Az eddigiekben tetszőleges test felett dolgozhattunk.

Példa:

Tekintsük az előző példát, vagyis legyen $M_f = I_{n \times n}$, az $n \times n$ -es egységmátrix.

$$\text{Mivel } rk(I_{n \times n}) = n \Rightarrow \Pi_1(I_{n \times n}) \geq n \Rightarrow \Pi_1(I_{n \times n}) = n.$$

$$\begin{aligned} rk(J - I) &= rk \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \\ &= rk \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & & 0 \\ 1 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & -1 \\ 1 & & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{cases} n & n-1 \neq_F 0 \\ n-1 & n-1 =_F 0 \end{cases}, \text{ ahol } F \text{ azt a testet jelenti, amely felett a} \end{aligned}$$

mátrixokat értelmezzük.

$$\text{Így } \Pi_0(I_{n \times n}) = n.$$

Kommunikációs bonyolultságelmélet

előadás

előadó: **Dr. Hajnal Péter** egyetemi docens

Kommunikációs mátrix rangja és a Moebius függvény

lejegyezte: Vincze Nándor Ph. D. hallgató

A probléma: Legyen G, H két gráf egy V csúcshalmazon, és legyen

$$f(G, H) = \begin{cases} 1 & \text{ha } G \cup H \text{ összefüggő} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Komponens struktúra alatt G egy partícióját értjük.

Ez egy ekvivalencia-reláció. A feladat kommunikációs mátrixában sok azonos sor van: ha G és G' komponens struktúrája azonos, akkor a megfelelő sorok megegyeznek. Az egyező sorok és oszlopok elhagyhatók a feladat lényegének megváltoztatása nélkül. Így egy $\mathcal{B}_n$ mátrixhoz jutunk, melynek sorai és oszlopai az ekvivalencia-relációkkal (partíciókkal) vannak azonosítva.

Az ekvivalencia relációk között tudjuk értelmezni az unió és metszet műveleteket.

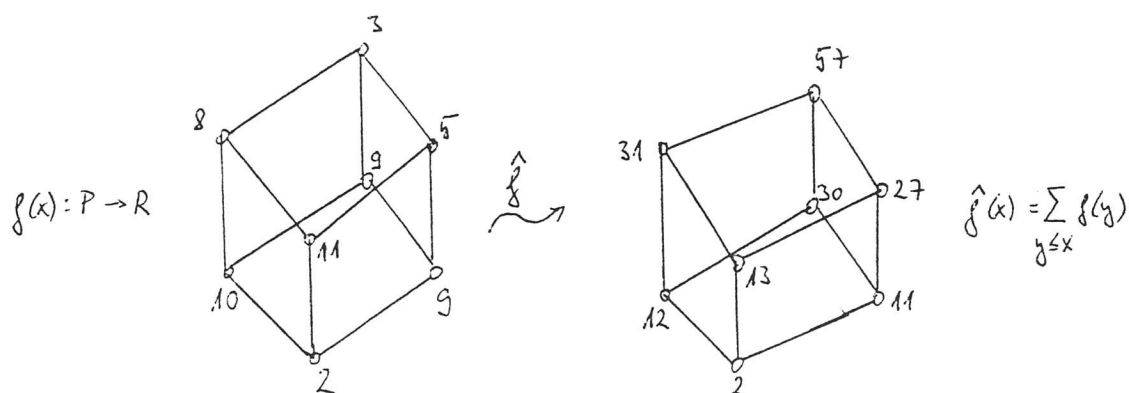
$$\begin{aligned} \pi \wedge \rho &= \pi \cap \rho \\ \pi \vee \rho &= \bigcap_{\substack{\pi, \rho \subseteq \eta \\ \eta \text{ ekv. rel.}}} \eta \end{aligned}$$

Jelölje 0 a legkisebb partíciót (azaz ahol minden elem külön osztály), és 1 a legnagyobb partíciót, ahol egyetlen osztály van.

$$\text{Ezzel a jelöléssel: } \mathcal{B}_n(\pi, \rho) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \pi \vee \rho = \hat{1} \\ 0 & \text{ha } \pi \wedge \rho = \hat{0} \end{cases}$$

Belátjuk, hogy $\text{rk } \mathcal{B}_n = |\{n \text{ elemű halmaz partíciói}\}| = B_n$, ezek a Bell számok. Ennek igazolásához néhány előkészítő lépést teszünk.

Részenrendezett halmazok Moebius függvénye:



Látható, hogy $\hat{f}$ -ot meg tudjuk határozni f segítségével, ha a legkisebb elemtől (itt ez 2) visszafelé számolunk.

Ha a számokat a Boole algebraban vektorként írjuk fel, mátrixszorzás alakban felírható az f és $\hat{f}$ közötti kapcsolat.

$$\begin{pmatrix} f \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & p \leq q \\ 0 & \text{ellen} \end{matrix} \end{pmatrix}_{P \times R} = \begin{pmatrix} \hat{f} \end{pmatrix}_R$$

Definíció: A két függvény közötti átmenet mátrixát jelölje ζ_p . Megfelelő sorrendben felsorolva ζ_p elemeit, alsó, vagy felső trianguláris lesz.

Hogy $\hat{f}$ meghatározza f -et ez azt jelenti, hogy a mátrix invertálható.

Definíció: Ezt az inverz mátrixot nevezzük a háló Moebius mátrixának

$$\zeta_p^{-1} = (\mu(x, y))$$

az itt szereplő $\mu(x, y)$ függvényt nevezzük a háló Moebius függvényének.

A definícióból $\mu \zeta = I$, így

$$I(x, y) = \sum_z \mu(x, z) \zeta(z, y) = \sum_{x, z \leq y} \mu(x, z) = \sum_{x, z \leq y} \mu(x, z)$$

Viszont

$$I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

így kapjuk, hogy

$$\sum_{x \leq z} \mu(x, z) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Könnyen belátható a következő állítás:

Állítás:

$$(i) \quad \mu(x, x) = 1$$

$$(ii) \quad \text{ha } x < y, \text{ akkor } \mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z)$$

$$(iii) \quad \text{ha } x > y, \text{ akkor } \mu(x, y) = 0$$

$$\mathbb{B}_n = \pi \left(\begin{matrix} \uparrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \left\{ \begin{matrix} 1 & \pi \vee g = \hat{1} \\ 0 & g \in n \end{matrix} \right. \end{matrix} \right)$$

Megjegyzés: Ez a három tulajdonság a μ függvény definíciójaként is szolgálhat.

$\mathbb{B}_n$ rangja és a Moebius függvény:

$$\mathbb{B}_n(x, y) = \begin{cases} 1 & x \vee y = \hat{1} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\mathbb{B}_n(x, y) = \sum_{x \vee y = \hat{1}} \mu(z, \hat{1}) = \sum_{\substack{x \leq z, \hat{1} \leq z \\ y \leq z}} \mu(z, \hat{1}) = \sum \mu(z, \hat{1}) \zeta(x, z) \zeta(y, z) =$$

$$= \sum_z \zeta(x, z) \mu(z, \hat{1}) \zeta^T(z, y) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta(x, z) \end{pmatrix} \mu(z, \hat{1}) \zeta^T(z, y) \right]$$

- 3 -

$$B_n = \zeta \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix} \zeta^T \Rightarrow rk B_n = rk \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix} = |\{x | \mu(x, \hat{1}) \neq 0\}|.$$

Igy a mátrix rangjának kiszámításához a Moebius függvény értékeinek kiszámítása kell. Legyen egy n elemű halmaz partícióira $\mu(\hat{0}, \hat{1}) =: \mu_n$.

Könnyű látni, hogy a háló bármely x elemére $\mu(x, \hat{1})$ csak az intervallum hosszától függ, így $\mu(x, \hat{1}) = \mu_k$.

Mivel $\sum_{\pi} \mu(\pi, \hat{1}) = 0$, így $\sum_{k=1}^n \mu_k S(n, k) = 0$, ahol $S(n, k)$ egy n elemű halmaz k osztályú partícióinak száma (másodfajú Stirling számok), így $\mu_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k S(n, k)$.

Most keressünk egy kevesebb tagú rekurziós formulát.

Hálók Moebius függvénye:

Legyen L egy háló, és vegyük az $L \rightarrow R$ függvényeket.

Az ilyen függvények vektorteret alkotnak, melynek dimenziószáma $|L|$.

Minden hálóbeli x elemhez van egy függvény, melyre $e_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, az ilyen függvények egy bázist fognak alkotni.

Most megadunk V -nek egy másik bázisát.

Legyen $f_x = \sum_{y \leq x} \mu(y, x) e_y$, ez a V egy másik bázisa lesz, mivel az e_x bázison végzett transzformáció ekkor ζ^{-1} , ami nem elfajuló, és az is látható, hogy $e_x = \sum_{y \leq x} f_y$.

Definiáljunk most mindkét bázisban egy szorzást.

$e_x \circ_2 e_y = e_{x \wedge y}$, ekkor, ha $A = \sum_x \alpha_x e_x$, $B = \sum_x \beta_x e_x$, $AB = \sum_{x, y} \alpha_x \beta_y e_{x \wedge y}$.

A másik bázisban ha $A = \sum_x \alpha_x f_x$ és $B = \sum_x \beta_x f_x$, akkor $AB = \sum_x \alpha_x \beta_x f_x$,

azaz a szorzás itt $f_x \circ_1 f_y = \begin{cases} f_x & x = y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$.

Állítás: A két szorzás ugyanaz.

Bizonyítás:

$$e_x o_2 e_y = \left(\sum_{z \leq x} f_z \right) o_2 \left(\sum_{t \leq y} f_t \right) = \sum_{\substack{z \leq x \text{ és} \\ t \leq y}} f_z o_2 f_t = \sum_{s \leq x \wedge y} f_s = e_{x \wedge y} = e_x o_1 e_y.$$

Alkalmazzuk most ezt, számítsuk ki e_a és f szorzatát úgy hogy mindkét definíciót kihasználjuk. A szorzat ekkor egyrészt $e_a \sum_x \mu(x, \hat{1}) e_x$ lesz,

másrészt $\left(\sum_{b \leq a} f_b \right) f$, ami viszont 0, ha $a < \hat{1}$. Így kapjuk, hogy

$e_a \sum_x \mu(x, \hat{1}) e_x = 0$ ekkor viszont a disztributivitás alkalmazásával kapjuk, hogy ha $a < \hat{1}$, akkor $\sum_{x: x \wedge a = 0} \mu(x, \hat{1}) = 0$ ami felfogható, mint egy rekurzió.

Válasszuk most a -t minél nagyobbának, úgy' hogy egy egyelemű osztály legyen és a többi elem egy osztályban legyen. Ekkor $x \wedge a = 0$ csak úgy lehet, ha $x=0$, vagy x olyan, hogy egy osztály az előbbi egyetlen elemből és egy másik tetszőlegesből áll, a többi osztály pedig egyelemű. Ilyen partíció $n-1$ van, így n tag lesz, azaz kapjuk, hogy $\mu_n = -(n-1)\mu_{n-1}$, ahonnan adódik, hogy $\mu_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

Következmény: $rk B_n = B_n$.

Következmény: A kiinduló kommunikációs feladat bonyolultsága $\lceil \log_2 B_n \rceil$.

Bizonyítás: Az alsó becslés a rang alsó becsléséből adódik. A felső becslés a következő nyilvánvaló protokollból: Az egyik résztvevő elküldi a másiknak az ő inputjának komponens struktúráját.

Válogatott témák a diszkrét matematika köréből

Előadó: Hajnal Péter
Lejegyezte: Széles Tibor

1993. április 5.

Áttekintés

0-homogén téglalap M -ben:

$$M = \left(\begin{array}{cccccc} | & & & & & | \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & | & & & & | \\ & \vdots & & & & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & | & & & & | \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & | & & & & | \end{array} \right)$$

$\pi(M)$ = minimális szám, hogy ennyi diszjunkt homogén téglalappal M lefedhető legyen

$\kappa(M)$ = minimális szám, hogy ennyi (nem feltétlenül diszjunkt) homogén téglalappal M lefedhető legyen

$$\log_2 \kappa(M) \leq \log_2 \pi(M) \leq C(f)$$

Példa: E egység mátrix

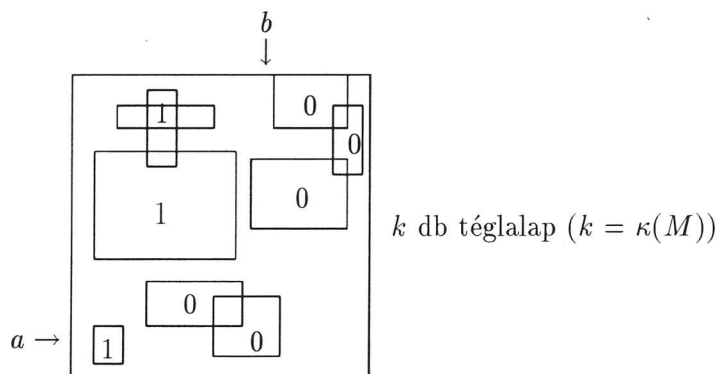
$$\kappa(E) : \begin{array}{l} \kappa_0(E) \leq 2 \log_2 N \\ \kappa_1(E) = N \end{array}$$

$$\pi(M) : \begin{array}{l} \pi_0(E) = N \\ \pi_1(E) = N \end{array}$$

Tétel: $\log_2 \kappa(M) \leq \mathcal{C}(f) \leq 10 \log_2^2 \kappa(M)$

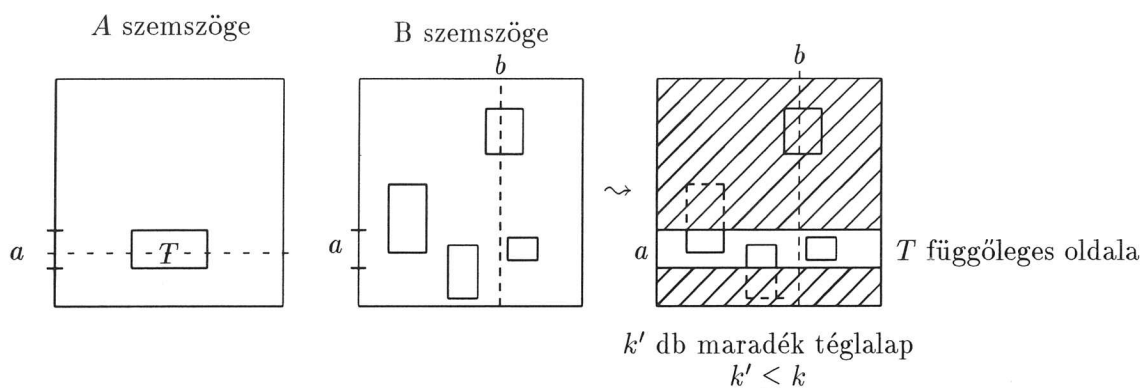
Bizonyítás:

Az alsó korlát helyességét $\mathcal{C}(f)$ -re már korábban beláttuk.



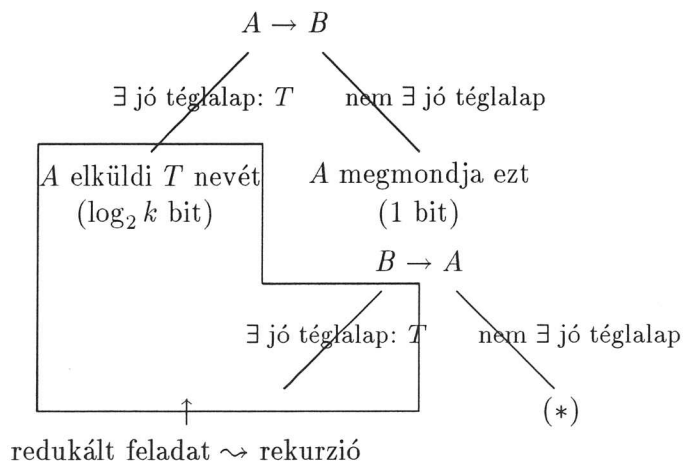
Minden téglalap kap egy nevet - egyenként $\log_2 k$ db bit. A következő játékot definiálhatjuk:

- *játékosok:* A és B
- *szabályok:* A ismeri az "a" sort, B pedig a "b" oszlopot.
 A elküldi a T fedő téglalap nevét, amely tartalmazza a keresett sort.

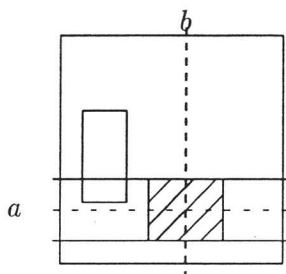


Definíció: T jó téglalap, ha $k' \leq \frac{3}{4}k$

- *protokoll:*



(*) Bármelyik T téglalapot vesszük:

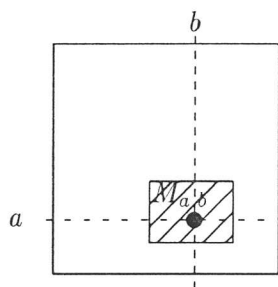


T sorai között ott van "a" $\Rightarrow$

T -vel közös sort tartalmazó téglalapok száma $> \frac{3}{4}k$

T oszlopai között ott van "b" $\Rightarrow$

T -vel közös oszlopot tartalmazó téglalapok száma $> \frac{3}{4}k$



Ha T lefedi $M_{a,b}$ -t, akkor

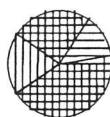
$> \frac{3}{4}k$ téglalappal lesz közös sor
 $> \frac{3}{4}k$ téglalappal lesz közös oszlop τ

A τ tulajdonságú téglalapokat mindkét résztvevő össze tudja gyűjteni.

Áll.: Ezek mindegyike ugyanolyan típusú

(Ezek után a (*) esetben a protokoll kommunikáció nélkül leáll, mindkét résztvevő tudja a választ)

Biz.:



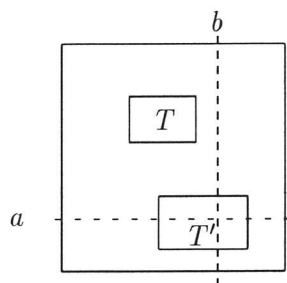
III - közös sor

$\equiv$ - közös oszlop

T -re τ tulajdonság áll $\Rightarrow > \frac{1}{2}k$ db téglalapnak lesz közös sora és oszlopa T -vel $\equiv \sim$ van közös eleme T -vel ($\spadesuit$)

Ha T, S -re τ tulajdonság áll, akkor van közös metsző téglalap

$\Rightarrow$ típusuk ugyanaz.



T -be $> \frac{1}{2}k$ téglalap metsz bele

T' ismeretlen

(♠) $\Rightarrow$ létezik olyan R téglalap, ami T -t és T' -t is metszi

$\Rightarrow T$ és T' ugyanolyan típusúak (homogenitás)

Ha nem a (*) ágba kerülünk bele, akkor rekurziót alkalmazunk:

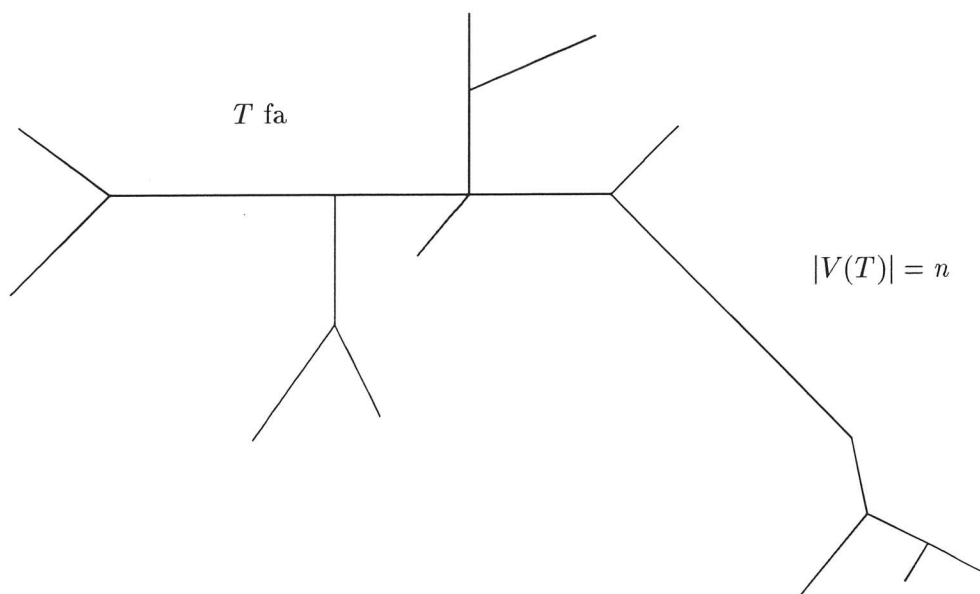
A rekurzió mélysége $\leq \log_{\frac{4}{3}} k$. Elküldött bitek száma rekurzióként: $2 \log_2 k$.

Összesen $\leq \log_{\frac{4}{3}} k * 2 \log_2 k \leq 10 \log_2^2 k$.

□

Konkrét protokollok

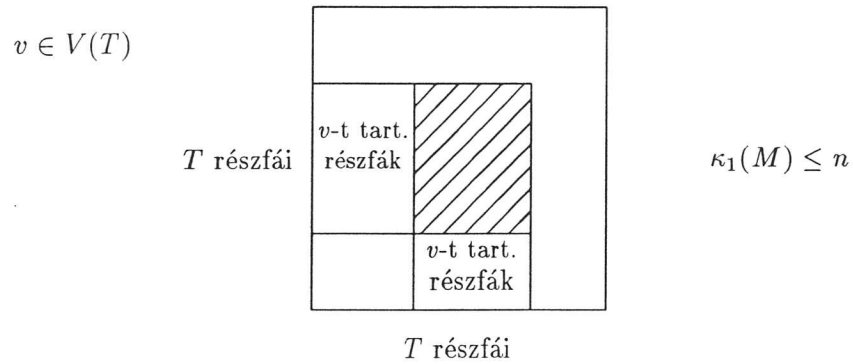
Példa:



A ismeri T egy részfáját - T_A ,

B ismeri T egy részfáját - T_B .

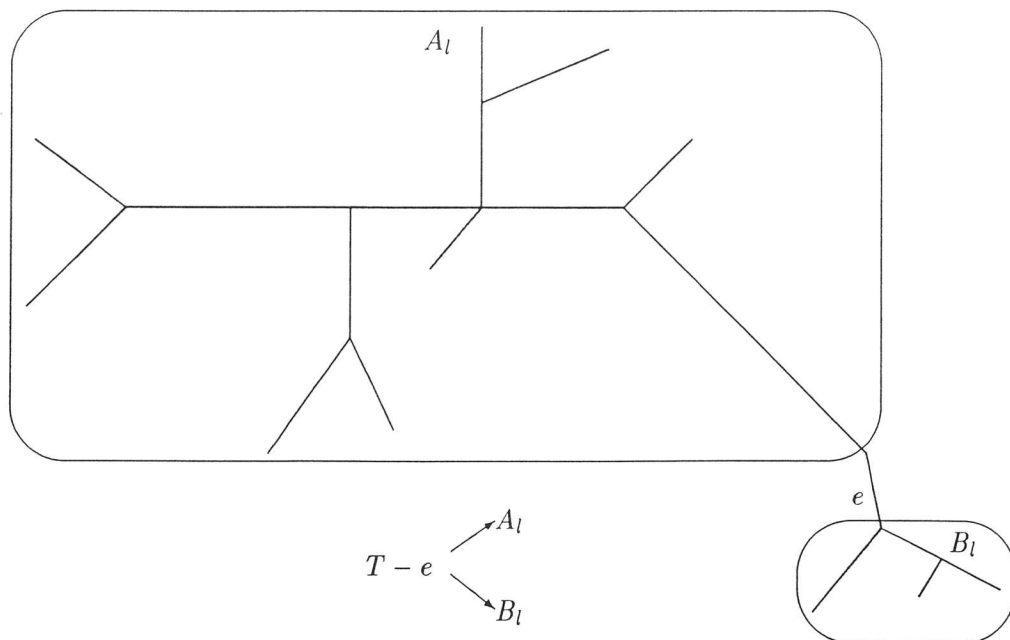
Kérdés: Van-e közös csúcsa T_A -nak és T_B -nek ?



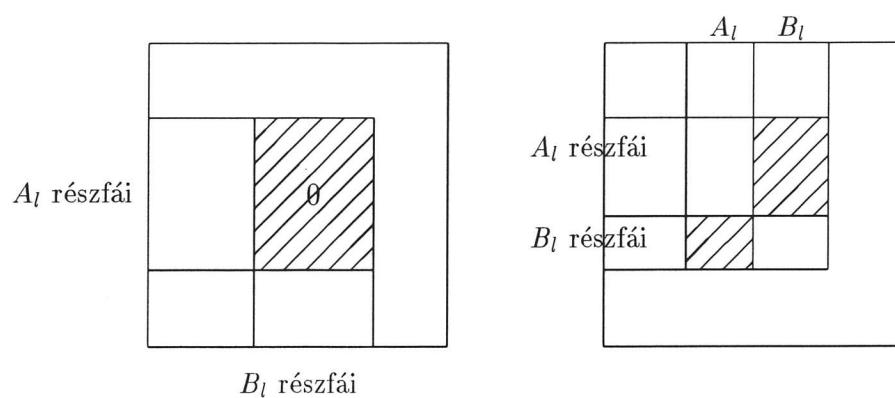
$$1 + n + \binom{n}{2} \leq \dots \leq 2^{n-1} + n$$

Megjegyzés: Ha T -ben nincs 2-odfokú csúcs, akkor részfáinak száma $\geq \sqrt{2^n}$
 Ekkor a mátrixnak exponenciális sok sora és oszlopa van.

áll.: $\kappa_0(M) \leq (n - 1) * 2$



e definiál két mátrixot:

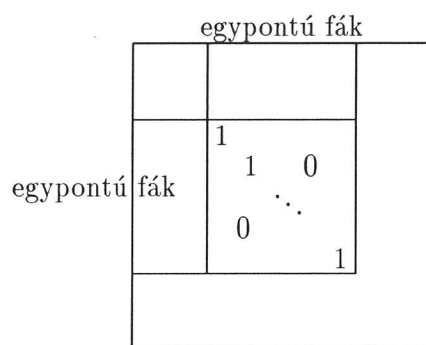


Tehát itt az 1-seket is hatékonyan tudtuk lefedni.

Következmény: $\mathcal{C}(f) \leq O(\log^2 n)$

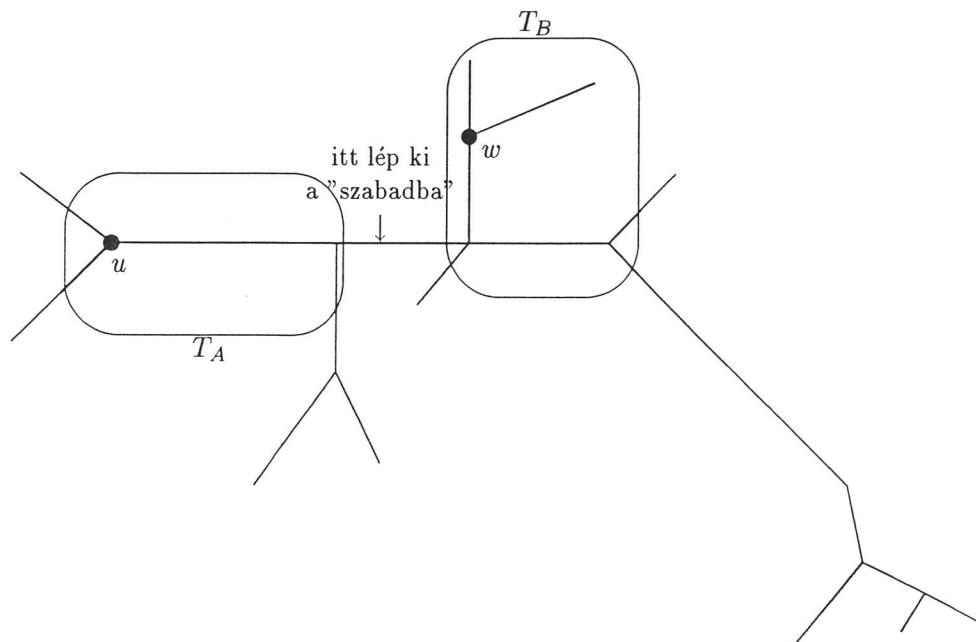
Az alsó becslés adódik a rangmódszerből:

$$\log_2 n \leq \mathcal{C}(f)$$



Az $O(\log^2 n)$ -es felső becslés könnyen javítható konkrét protokollokkal

I. protokoll



$A \rightarrow B$. Elküldött információ: T_A tetsz. csúcsa - u ($\log_2 n$ bit)

$B \rightarrow A$. Elküldött információ: T_B -nek u -hoz legközelebbi csúcsa ($\log_2 n$ bit)

$$w \in V(T_A) \iff V(T_A) \cap V(T_B) \neq \emptyset$$

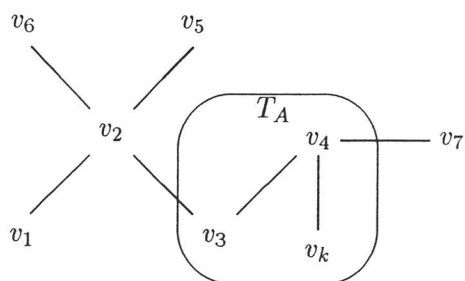
$$\mathcal{C}(f) \leq 2 \log_2 n$$

II. protokoll

Lemma: T fa. $\exists v_1, \dots, v_n$ sorbarendezése a csúcsainak úgy, hogy a $T - \{v_1, \dots, v_n\}$ minden komponense $\leq \frac{2n}{k}$ db csúcsot tartalmaz.

Biz.: Egyszerű, nem bizonyítjuk.

Vegyük a csúcsok Lemma szerinti sorbarendezését:



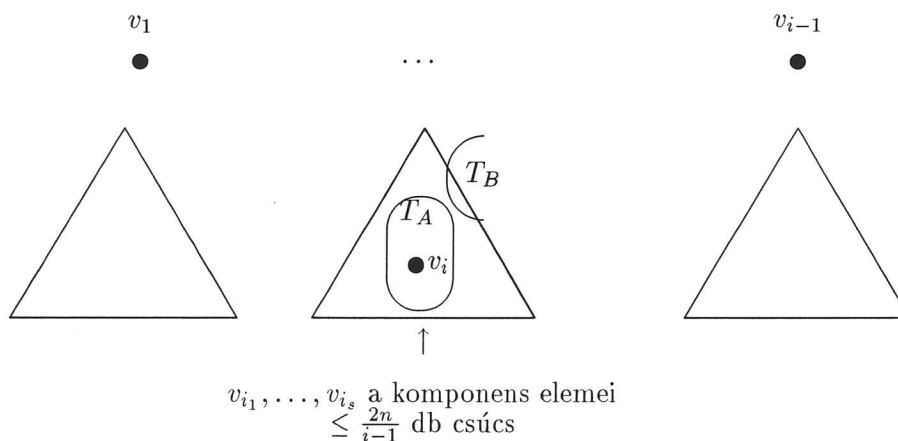
$A \rightarrow B$: A elküldi T_A legkisebb indexű csúcsát: v_i ($\log i$ bit)

Ezek után B tudja: $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ nem $\in T_A$, és $v_i \in T_A$.

Tehát $T_A \subseteq T - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ valamely komponensének.

A Lemma szerint minden komponens $\leq \frac{2n}{i-1}$ pontot tartalmaz.

Ekkor B lejátsza az I. protokollt, azaz



$B \rightarrow A$: B elküldi a v_i -hez legközelebbi csúcsát a megfelelő komponensből, azaz azt, hogy hanyadik ez a csúcs a komponens csúcsai között

$$\rightarrow \log \frac{2n}{i-1} \text{ bit.} \quad (1)$$

A protokoll szerint mindig tudnunk kell, hogy ki van soron, s el kell különítenünk az üzeneteket. Emiatt nem elegendő a $\log i$ bit, mivel minden üzenet előtt elküldjük e soron következő üzenet hosszát: $\log n$ bit.

$$\log i + \log \log n \text{ bit} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \log n \leq \mathcal{C}(f) \leq \log n + \log \log n$$

(1),(2)

2. Példa

$$A : (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n,$$

$$B : (y_1, \dots, y_n) \in \{0, 1\}^n.$$

$$\underline{x} \stackrel{?}{=} \underline{y}$$

Eddigi ismereteink szerint erre a példára nincs jobb megoldás a triviális protokollnál.

A modell megváltoztatásával (véletlen bitek használatának megengedése) hatékonyabb eljárás juthatunk (Lsd. köv. fejezet)

Véletlen biteket használó protokoll

2. Példa megoldása e módszerrel:

Legyen $p_1, p_2, \dots, p_k$ az első k prímszám !

A: generál egy véletlen r számot: $r \in \{1, \dots, k\}$,
majd elküldi B -nek az $\overline{x_1 \dots x_n} \bmod p_r$ számot és az r -et.

B: kiszámítja a $\overline{y_1 \dots y_n} \bmod p_r$ számot,
majd ellenőrzi, hogy $\stackrel{?}{=}$ -e A üzenetének első részével.

$\neq \checkmark \quad \searrow =$
 B biztosan tudja, B elfogad
 hogy $\underline{x} \neq \underline{y}$

Felvetődő kérdés:

Adott tetszőleges x, y -ra: $P(\text{Protokoll}_k \text{ rossz eredményt ad}) = ?$

Tévedés csak úgy lehet, ha

$x \neq y$, viszont $x \equiv y \bmod p_r$, azaz $p_r | x - y \iff p_r \in \{x - y \text{ prímosztói}\}$.

$$\overbrace{p_1, p_2, \dots, p_k}$$

$$P(\text{protokoll}_k \text{ rossz eredményt ad}) = \frac{\#(\text{rossz } p_i\text{-k, azaz } x - y \text{ prímosztói})}{k}$$

k választása:

Legyen $k \gg x - y$ prímosztói száma $\Rightarrow P(\text{hiba}) = \text{kicsi}$

$$1 \leq |x - y| \leq 2^n$$

A legkisebb szám, aminek s db prímosztója van:

$$p_1 p_2 \dots p_s \quad (\text{az első } s \text{ prímszám szorzata})$$

$$\prod_{p \leq z} p = \underbrace{\prod_{p \leq \sqrt{z}} p}_{\text{elhagyjuk}} * \underbrace{\prod_{\sqrt{z} \leq p \leq z} p}_{p \text{ helyett } \sqrt{z}} \geq \sqrt{z}^{\pi(z) - \pi(\sqrt{z})} \geq \sqrt{z}^{(1-\epsilon) \frac{z}{\log z}} = (e^{\log \sqrt{z}})^{(1-\epsilon) \frac{z}{\log z}} = e^{\alpha z},$$

(ahol $\pi(z)$: az z -nél nem nagyobb prímek száma)

Ha $e^{\alpha z} > 2^n$, akkor $2^n > |x - y|$ esetén z -nél kevesebb prímosztó van.

$$\alpha := \frac{1}{10}$$

$$z : e^{\frac{1}{10} z} \geq 2^n$$

$$z := 10n$$

Másképpen is ki lehet hozni az eredményt:
 x, y tetsz. $\Rightarrow x - y$ prímosztóinak száma $\leq n$

$p_1, \dots, p_k$: ha $k=1000n$, akkor $P(\text{tévedés}) = \frac{1}{1000}$

Költség:

$$p_{1000n} \leq 1000n^2$$

$O(\log^2 N)$ bit felhasználása, ahol N a kiinduló számok nagysága

8-9. előadás

Nem- k -színezhető gráfok jellemzése; Hajós tétele

Színezések vizsgálatánál csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk.

Ismert, hogy

- (a) G akkor és csak akkor nem-1-színezhető, ha tartalmaz élt.
- (b) G akkor és csak akkor nem-2-színezhető, ha tartalmaz páratlan hosszú kört.

Megadható-e hasonló könnyen ellenőrizhető "akadály" a 3-színezhetőségre? Hajós tétele egy akadályt ír le, de az nem világos, hogy mennyire könnyen ellenőrizhető.

DEFINÍCIÓ: Operációkat definiálunk egyszerű gráfokon:

- (i) Új csúcs felvétele.
- (ii) Új él behúzása.
- (iii) Két össze nem kötött pont azonosítása (és a párhuzamos élek egyszerűsítése, ha szükséges).
- (iv) G és H gráfokból az $e = xy \in E(G)$ és $f = x'y' \in E(H)$ élek segítségével a következők végrehajtásával nyerjük az operációnk eredményét: a két gráf diszjunkt uniójának vétele; x és x' azonosítása e és f elhagyása és egy yy' él hozzáadása.

Egy G gráf *legyártható* a $\mathcal{G}$ gráf-halmazból, ha a G gráfot megkaphatjuk $\mathcal{G}$ elemeiből kiindulva (tetszőleges számú példányt véve) a fenti operációk ismételt alkalmazásával. $\diamond$

TÉTEL: (Hajós tétele) G akkor és csak akkor nem-3-színezhető, ha G legyártható $\{K_4\}$ -ből. ■

Háromszög nélküli, nagy kromatikus számú gráfok

Standard gráfelmélet előadáson több konstrukció ismerttetett.

Ilyen gráfok felfoghatók a következő módon is: A gráfban "élve", ha egy tetszőleges csúcsában vagyunk, akkor az 1-sugarú környezetet látva, az egy csillagot feszít. Azaz a gráf lokálisan "szép" a színezések szemszögéből, de globálisan "nem szép" (a gráf kromatikus száma tetszőlegesen nagy lehet).

A továbbiakban ezt a lokális és globális viselkedés közötti hézagot erősítjük.

Rövid páratlan hosszú kör nélküli, nagy kromatikus számú gráfok; A Kneser gráf kromatikus száma

Konstruálunk olyan gráfokat, amelyek nem tartalmazznak rövid páratlan köröket és kromatikus számuk nagy.

Szemléletesen fogalmazva: A gráfban “élve”, ha egy tetszőleges csúcsában vagyunk, akkor a pontok egy kis (gráfelméleti) környezetét látva, azok egy páros gráfot feszítenek. Azaz a gráf lokálisan “szép” a színezések szemszögéből, de globálisan “nem szép” (a gráf kromatikus száma tetszőlegesen nagy lehet).

A példák a Kneser-gráfok.

TÉTEL: Legyen $2k < n$.

(a) $K(n, k)$ minden páratlan hosszú köre legalább $\frac{n}{n-2k}$ hosszú.

(b) $\chi(K(n, k)) = n - 2k + 2$.

BIZONYÍTÁS: (a) egyszerű.

$\chi(K(n, k)) \leq n - 2k + 2$ egyszerű.

$\chi(K(n, k)) \geq n - 2k + 2$ nehéz, Lovász László tétele. Mi Bárány Imre bizonyítását ismertettük. ■

Rövid körök nélküli, nagy kromatikus számú gráfok; Véletlen konstrukciók

Konstruálunk olyan gráfokat, amelyek nem tartalmazznak rövid köröket és kromatikus számuk nagy.

Szemléletesen fogalmazva: A gráfban “élve”, ha egy tetszőleges csúcsában vagyunk, akkor a pontok egy kis (gráfelméleti) környezetét látva, azok egy fát feszítenek. Azaz a gráf lokálisan “szép” a színezések szemszögéből, de globálisan “nem szép” (a gráf kromatikus száma tetszőlegesen nagy lehet).

A konstrukció a következő: Egy alkalmasan definiált véletlen gráfban kevés “rövid” kör lesz és a kromatikus szám “nagy” lesz. Kevés él elhagyásával a rövid körök megszűnnek és a kromatikus szám nagy marad.

A sík kromatikus száma

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathcal{P}$ egy ponthalmaz. $G_{\mathcal{P}}$ a következő egyszerű (esetleg végtelen) gráf: $V(G_{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$ és két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha a megfelelő pontok távolsága 1. ◇

TÉTEL: $4 \leq \chi(G_{\mathbb{R}^2}) \leq 7$. ■

TÉTEL: $\chi(G_{\mathbb{Q}^2}) = 2$. ■

Szorzat-gráfok kromatikus száma

DEFINÍCIÓ: $G \times H$ a következő gráf: $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ és $(x, y), (x', y') \in V(G \times H)$ akkor és csak akkor van összekötve $G \times H$ -ban, ha x és x' össze van kötve G -ben, továbbá y és y' össze van kötve H -ban. $\diamond$

Egyszerű igazolni, hogy $\chi(G \times H) \leq \min\{\chi(G), \chi(H)\}$. Megoldatlan kérdés, hogy az egyenlőség igaz-e általában.

Két speciális esetben az egyenlőséget nagyon könnyű igazolni.

PROPOZÍCIÓ:

- (a) $\chi(G \times G) = \chi(G)$.
- (b) $\chi(G \times K_n) = \min\{\chi(G), n\}$. ■

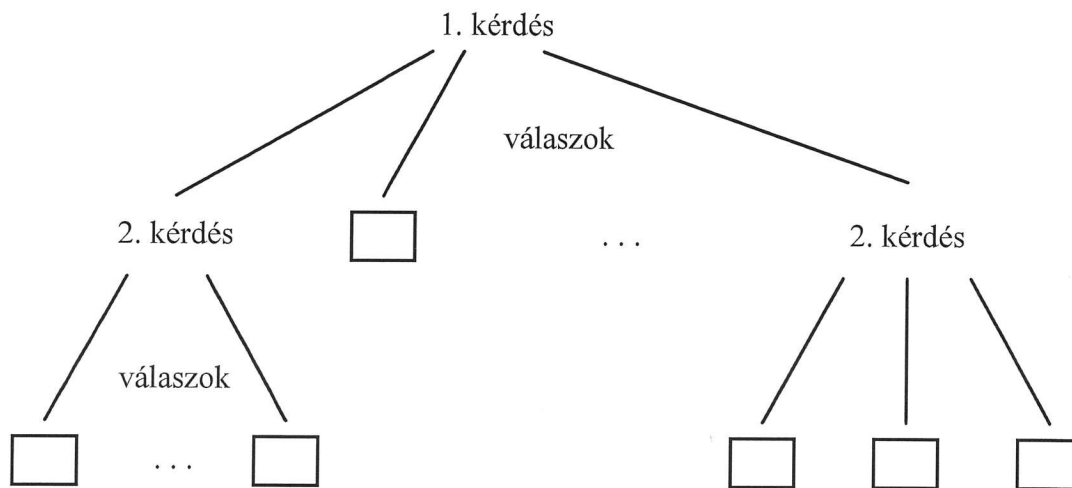
10. előadás

Szerkesztette: Csallner András Erik

Döntési fák

Alapprobléma: Adott egy f függvény, melynek értékét ki akarjuk számítani az $x = (x_1, \dots, x_n)$ pontban, de x nem ismert közvetlenül.

Eljárás: Az x_i -k értékeire kérdéseket teszünk fel sorozatosan:



Ezek a kérdések a fenti fát alkotják, melynek levelein maguk az $f(x)$ értékek találhatók.

Az fa bonyolultsága: a fa mélysége, azaz a leghosszabb út hossza a gyökértől levélig. Ha az eljárás fája T , akkor tehát a fa bonyolultsága $\mathcal{C}(T)=d(T)$, ahol $d(T)$ a T mélysége.

Döntési fákkal reprezentált függvény bonyolultsága: a legjobb olyan döntési fa mélysége, amely az adott függvényt kiszámolja, azaz:

$$\mathcal{C}(f)=\min\{\mathcal{C}(T) : T \text{ kiszámítja } f\}.$$

Példák modellekre:

1. $(\mathbb{R}, \leq)$ rendezett halmaz, $x \in \mathbb{R}^n$.

Kérdések: $x_i ? x_j$

Válaszok: $x_i < x_j, x_i > x_j, x_i = x_j$.

2. Boole döntési fák: $x \in \{0,1\}^n$, $f(x) \in \{0,1\}$.

Kérdések: $x_i = ?$

Válaszok: $x_i = 0, x_i = 1$.

A következőkben részletesebben a Boole döntési fákkal foglalkozunk

Állítás. Ha f döntési fákkal reprezentált n -változós Boole-függvény, akkor

$$0 \leq \mathcal{C}(f) \leq n.$$

Bizonyítás. $\mathcal{C}(f)$ definíciója miatt $0 \leq \mathcal{C}(f)$ nyilván igaz. Másrészt, ha T olyan döntési fája f -nek, amelyre $\mathcal{C}(f) = \mathcal{C}(T)$, és T -ben létezik olyan út a gyökértől egy levélig, amelyen mind az n változó szerepel, akkor $\mathcal{C}(T) = d(T) = n \Rightarrow \mathcal{C}(f) = n$, továbbá bármely f -t kiszámoló T döntési fára $d(T) \leq n$, mivel csak n változónk van. $\square$

Vezessünk be egy elnevezést a "legbonyolultabb" Boole-függvényekre:

Definíció. f n -változós Boole-függvény *zárkózott*, ha $\mathcal{C}(f) = n$.

Hogyan látható be Boole-függvényről annak zárkózottsága?

Egyszerű módszerek f zárkózottságának megállapítására:

- ① Tegyük fel, hogy A és B játékosok. A szeretné kiszámítani f -t, de x -t csak B ismeri. Így A minden szükséges változóra vonatkozóan kérdéseket tesz fel B -nek, B pedig azokat megválaszolja. Tegyük fel, hogy B minél több kérdés elhangzására törekszik, ennek érdekében x még meg nem kérdezett komponenseit menetközben állítja be a már elhangzott kérdésektől függően. Ha létezik B -nek olyan stratégiája, hogy A kénytelen n darab kérdést feltenni az $f(x)$ kiszámításához, akkor f nyilván zárkózott.

Példa. Gráf összefüggőségének eldöntése.

B stratégiája: minden él létezésére "nem" választ ad, kivéve, ha az eddigi "nem" válaszok egy vágás összes élét adnák.

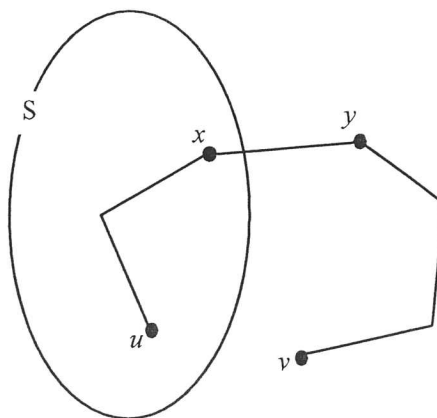
Állítás. B fenti stratégiája mellett A az összes él létezésére rákérdez, azaz az összes változót megkérdezi.

Bizonyítás. Két dolgot elég belátni ehhez:

- Az eddigi élek ("igen" válaszok) és a megkérdezetlen élek együttesen összefüggő G gráfot eredményeznek.
- Ha maradt olyan él (csúcspár), amelyre eddig még nem kérdeztünk rá, akkor az eddigi élek ("igen" válaszok) nem összefüggő H gráfot eredményeznek.

Az (a) bizonyítása: Ha G nem lenne összefüggő, akkor létezne csúcseinak egy olyan osztálya, amelyből G -beli él nem fut ki. De akkor minden G -ből kifutó lehetséges élet már megkérdezett A , és B mindegyikre "nem" választ adott, holott azok egy vágás éleit alkották. $\checkmark$

A (b) bizonyítása: Tegyük fel, hogy (u, v) egy megkérdezetlen él. Belátjuk, hogy ekkor nincs eddigi élekből álló u -ból v -be vezető út, azaz u és v különböző komponensben van H -ban, következésképpen H nem összefüggő. Ha létezne u -ból v -be vezető út H -ban, akkor jelölje (x, y) az utolsóként megkérdezett élet ("igen" választ) ezen az úton. Ekkor az ábrán látható S csúcshalmaz által definiált vágáson az (u, v) él is rajta van, így a szintén a vágáson levő (x, y) élre B -nek "nem" választ kellett volna adnia, ami ellentmondáshoz vezet. $\checkmark$



(a) és (b) együttesen bizonyítják az állítást. $\square$

Következmény. Egy gráf összefüggőségét eldöntő Boole-függvény zárkózott. $\square$

② Legyen f tetszőleges döntési fája T . Tegyük fel, hogy T gyökerére sorban egymás után minden lehetséges inputot ráengedünk, ez összesen 2^n darab input. Jelölje k_j az ezekből az inputokból T j -dik levelénjelentkezők számát. Ha d_j jelöli a gyökértől a j -dik levélig vezető (egyetlen) út hosszát, akkor nyilván $k_j = 2^{n-d_j}$. Amennyiben $\ell(T) < n$, akkor $\forall j \in \{T \text{ levelei}\} \quad d_j \leq n-1$, így $k_j = 2^{n-d_j}$ páros. Jelölje most $N = f^{-1}(0)$ és $P = f^{-1}(1)$ a levelek osztályait, $|N| + |P| = 2^n$. A fenti gondolatmenetből közvetlenül adódik a következő állítás:

Állítás. Ha $|N|$ páratlan (ami ekvivalens azzal, hogy $|P|$ páratlan), akkor f zárkózott. $\square$

Más megközelítés: Ha $\ell(T) < n$, akkor minden levélen azon inputok száma, amelyek páros sok "1"-t tartalmaznak, megegyezik a páratlan sok "1"-t tartalmazó inputok számával (mivel a rögzítettlen változók mindegyike mind a páros, mind a páratlan számú "1"-t tartalmazó inputok számát azonosarányban növeli egy adott levélen). De ez igaz az N és P osztályokra is, innen kontrapozícióval adódik a következő állítás:

★ **Állítás.** Ha N -ben (P -ben) a páros sok "1"-t tartalmazó inputok száma különbözik a páratlan sok "1"-t tartalmazó inputok számától, akkor f zárkózott. $\square$

Tétel. Ha f véletlen n -változós Boole-függvény, akkor f zárkózott, azaz $P(f \text{ zárkózott}) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Bizonyítás. $P(f \text{ nem zárkózott}) \leq P(N\text{-ben a páros sok "1"-t tartalmazó inputok száma megegyezik a páratlan sok "1"-t tartalmazó inputok számával}) =$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2^{n-1}}{k} \binom{2^{n-1}}{k}}{2^{2^n}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2^{n-1}}{k} \binom{2^{n-1}}{2^{n-1}-k}}{2^{2^n}} = \frac{\binom{2^n}{2^{n-1}}}{2^{2^n}} = *.$$

A Wallis-féle produktumból következik, hogy $\forall m \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}} \cdot \sqrt{\pi \cdot m} \rightarrow 1 \quad (m \rightarrow \infty)$, ezért az $m = 2^{n-1}$ helyettesítéssel

$$* = \frac{\binom{2^n}{2^{n-1}}}{2^{2^n}} \cdot \frac{\sqrt{\pi \cdot 2^{n-1}}}{\sqrt{\pi \cdot 2^{n-1}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 2^{n-1}}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Azaz $P(f \text{ nem zárkózott}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. $\square$

Példák zárkózott függvényekre.

① **Szimmetrikus függvények:** $f(x) = F(\sum x_i)$, azaz $f(x)$ csupán $\sum x_i$ -től függ.

Állítás. Ha f nem konstans szimmetrikus függvény, akkor f zárkózott.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az ①-ben leírt játékos stratégiát. Mivel f nem konstans, így a definícióbeli f sem az, azaz $\exists j \in n$, hogy $F(j)=0$, $F(j+1)=1$ (vagy fordítva). B stratégiája a következő: az első j kérdésre "1"-t válaszol, onnantól pedig "0"-t. Az A játékos nyilván kénytelen legalább j kérdést feltenni, másrészt nem tehet fel n -nél kevesebb kérdést, mert a még meg nem kért változókat egy kivételével

"0"-ra állítva, ezt az egyet pedig "0"-nak vagy "1"-nek választva különböző eredményeket kapunk $F(j) \neq F(j+1)$ miatt. $\square$

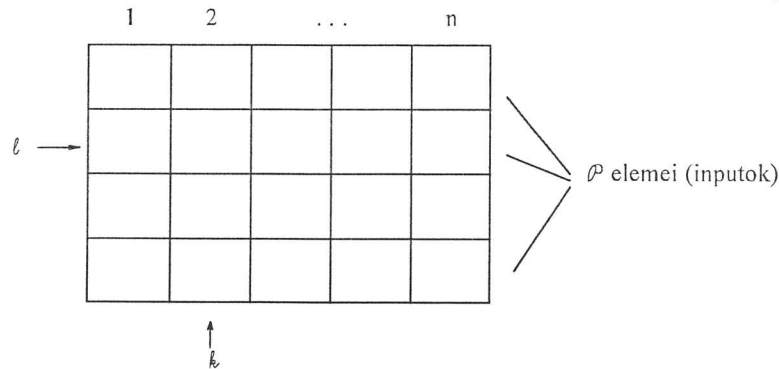
Definíció. $\mathcal{A}(f) = \{\pi \in S_n : f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{1\pi}, \dots, x_{n\pi})\}$.

② **Tranzitív függvények:** $\mathcal{A}(f)$ tranzitív, azaz $\forall i, j \exists \pi \in \mathcal{A}(f) : i\pi = j$.

Tétel (Rivert - Vuillemin). Ha $n = p^\alpha$ (p prím), f tranzitív és $f(0) \neq f(1)$, akkor f zárkózott.

Bizonyítás. Az $\mathcal{A}(f)$ elemei az inputokon nyilván egy ekvivalencia relációt definiálnak, amely egy osztályozást határoz meg rajtuk. Nevezzük ezen osztályokat *pályáknak*.

Legyen ρ pálya, és írjuk a ρ elemeit egymás alá. Így egy táblázatot kapunk:



A tranzitivitás miatt a táblázat minden oszlopában azonos számú "1" lesz, jelöljük ezek számát k -val. Másrészt, a pályák definíciója miatt, a sorokban is azonos számú "1" lesz, legyen ez l . A táblázatban található "1"-k számát a sorokból illetve oszlopokból külön-külön kiszámítva a következő egyenlőséget kapjuk: $l \cdot |\rho| = k \cdot p^\alpha$.

Ebből $|\rho|$ kiszámítható: $|\rho| = \frac{k \cdot p^\alpha}{l}$. Ha ρ nem a $\{0\}$ vagy $\{1\}$ pálya, akkor $1 \leq l \leq p^\alpha - 1$, így p osztója $|\rho|$ -nek.

Legyen most $N = f^{-1}(0)$. Ekkor N pályák úniója, amelyek közül egy pálya 1-elemű (a $\{0\}$ vagy az $\{1\}$, és az $f(0) \neq f(1)$ feltétel miatt csak az egyik lehet N -beli), a többi p -vel osztható. Jelölje N_0 azokat az N -beli pályákat, amelyekben az inputok páros sok "1"-t tartalmaznak (l páros), és legyen $N_1 = N - N_0$. N_0 és N_1 is pályák úniója, továbbá $|N_0| \neq |N_1|$, mivel N_0 és N_1 közül az egyik tartalmaz pontosan egy darab 1-elemű pályát, így valamelyik nem osztható p -vel, míg a másik igen. De akkor a $\star$ állítás miatt f zárkózott. $\square$

Megjegyzés. Létezik olyan tranzitív nem triviális Boole-függvény, amely nem zárkózott.

Definíció. $\mathcal{I}$ tulajdonság *gráf tulajdonság*, ha abból, hogy G gráf $\mathcal{I}$ tulajdonságú és $G \cong H$, következik, hogy H is $\mathcal{I}$ tulajdonságú.

Állítás. Létezik olyan f nem triviális gráf tulajdonság, hogy f nem zárkózott. $\square$

Állítás. Ha G gráf, $|V(G)| = p^\alpha$ (p prím), a G f gráf tulajdonságú és f monoton és nem triviális, akkor f zárkózott. $\square$

Megjegyzés. Általában monoton gráf tulajdonságokra nem ismert, hogy zárkózottak-e.