

Matematikai alapelvek

Előadó: Hajnal Péter

2023.

1. A matematika ellentmondásmentes

A matematika ellentmondásmentességét nem említjük, de jó tudni, hogy az alábbi nyilvánvaló alapelv ennek egy következménye.

HA egy kérdést két módon is, logikailag helyesen válaszolunk meg,
AKKOR a két válasz megegyezik.

Egy nyilvánvaló példa: Adott egy számtáblázat. Mennyi a benne szereplő számok összege? Egy lehetőség, hogy mindegyik sorban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/sorösszegeket összegezzük. Egy másik megoldás, hogy mindegyik oszlopban összeadjuk az ott szereplő számokat, majd ezeket a részeredményeket/oszlopösszegeket összegezzük. Nyilván mindkét eredmény az összes szám összegét adja ki.

Azaz egy táblázatban a sorösszegek összege megegyezik az oszlopösszegek összegével. Formálisan: Ha egy $n \times k$ méretű táblázatban (n darab sor és k darab oszlop) az i -edik sorban és j -edik oszlopban szereplő szám $a_{i,j}$, akkor

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k a_{i,j}.$$

Egyszerűen azt mondjuk, hogy egy kettős összegben a két szumma sorrendje felcserélhető.

Már ez az ártatlannak tűnő megállapítás is meglepően mély állításokat igazol. Ha egy paramétert kétféleképpen számolunk ki és a két eredményt összevetjük, akkor azt mondjuk, hogy a kettős összeszámlálás módszerét alkalmaztuk.

1. Feladat. Vegyük az $1, 2, \dots, n$ számok összes $n!$ darab átrendezését Mindegyik esetén számoljuk meg, hány olyan i elem van, amely marad a helyén (azaz $\pi(i) = i$, az ilyen elemeket a π sorbaállítás fixpontjainak nevezzük). Azaz minden sorbaállításhoz vesszük fixpontjainak számát. Igazoljuk, hogy az átlagos fixpont szám éppen 1.

Például az $1, 2, 3$ számoknak $3! = 6$ sorbaállítása van: 123, 132, 213, 231, 312, 321. A fixpontok száma rendre: 3, 1, 1, 0, 0, 1. Az átlag valóban éppen $(3 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1)/6 = 1$.

A bizonyításhoz készítsünk egy táblázatot. Minden sora egy-egy átrendezésnek felel meg. Oszlopai az átrendezett elemekkel, az $1, 2, \dots, n$ számokkal azonsítottak. Az π átrendezésnek megfelelő sor és az i elem oszlopának találkozásában legyen 1, ha

$\pi(i) = i$, azaz i fixpont. Különben álljon 0. Mennyi a táblázatban szereplő számok összege?

Minden sorban a megfelelő sorbaállítás fixpontjainak számát adja az összegzés. A sorösszegek összege éppen az összes fixpontszám, az átlagos fixpontszám $n!$ -szorosa.

Az első oszlop elemeit összegezve azokat a π sorbaállításokat számoljuk meg, amelyekben $\pi(1) = 1$. Azaz 1 az első helyen áll, a többi elemre nincs feltétel. Azaz az összeg $(n-1)!$, hiszen a többi $n-1$ darab elemet ennyiféleképpen állíthatjuk sorba. Ugyanez az összeg lesz az összes többi oszlopban is. Így az oszlopösszegek összege $n \cdot (n-1)! = n!$.

A két eredmény összevetéséből adódik az állítás.

2. Átlagolás, skatulya-elv

Adott n valós szám $v : v_1, v_2, \dots, v_n$. Ezekből (egy nagy adatsokaság) sok paramétert kiszámolhatunk. Egyik az előforduló legkisebb érték: $\min(v)$, a másik az előforduló legnagyobb érték $\max(v)$.

További fontos paraméterek a „közepek”. Talán a legegyszerűbb a számtani közép

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}.$$

A további közepek bevezetéséhez célszerű feltenni, hogy számaink nem negatívak. Ebben az esetben a mértani közép

$$G(v) = \sqrt[n]{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n},$$

a harmonikus közép

$$H(v) = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}},$$

négyzetes közép

$$Q(v) = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n}}.$$

Alaptétel, hogy nem negatív v_i számok esetén

$$\min(v) \leq H(v) \leq G(v) \leq A(v) \leq Q(v) \leq \max(v).$$

Ennek bizonyítása nem a témakörünkhöz tartozik.

Egy speciális részét emelem ki:

$$\min(v) \leq A(v) \leq \max(v).$$

Ez a fenti egyenlőtlenség-sorozat egy triviális töredéke. A kiemelt egyenlőtlenség-sorozatra nézve látjuk, hogy $A(v)$ középen helyezkedik el. Ez magyarázza, hogy középnek nevezzük.

Igazolása például indirekten történhet. Tegyük fel, hogy $A(v) \leq \max(v)$ nem teljesül, azaz mindegyik v_i kisebb mint $A(v)$. Az így kapott n egyenlőtlenség összege ellentmondás (azonos irányban álló szigorú egyenlőtlenségek összegezzhetők).

Számunkra a következő speciális eset nagyon fontos lesz. Adott t tárgyunk és s skatulyánk. A t tárgyat osszuk szét a skatulyák között. Az i -edik skatulyába került tárgyak száma legyen v_i . (tehát v_i egy 0 és t közötti egész szám. Ha $v_i = 0$, akkor

egy tárgyat se raktunk az i -edik skatulyába. Ha $v_i = t$, akkor mindegyik tárgyat az i -edik skatulyába raktuk.)

$$A(v) = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_s}{s} = \frac{t}{s},$$

az átlagos skatulya terheltség. A fenti nyilvánvaló elvet a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

HA t tárgyat k skatulyába osztunk szét,
 AKKOR lesz olyan skatulya, amelybe legalább $\frac{t}{k}$ tárgy esik,
 és lesz olyan skatulya is, amelybe legfeljebb $\frac{t}{k}$ tárgy esik.

A skatulya-elv fenti nagyon általános megfogalmazását gyakran speciális esetekben alkalmazzuk. Érdekes néhány speciális esetet külön megfogalmazni.

2. Tétel. *Ha $n+1$ tárgyat n skatulyában osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely legalább kettő tárgyat is tartalmaz.*

3. Tétel. *Ha $\ell n + 1$ tárgyat n skatulyában osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amelybe legalább $\ell + 1$ tárgyat is tartalmaz.*

4. Tétel. *Ha $n-1$ tárgyat n skatulyában osztuk szét, akkor lesz olyan skatulya amely üres marad.*

Az állításaink megint „triviálisak”. Mégis ügyes alkalmazással mély/nehéz eredményeket lehet elérni.

5. Tétel (Dirichlet-tétel). *Legyen α irracionális szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok p, q egész szám, amelyekre*

$$|p\alpha - q| < \frac{1}{p}, \text{ azaz } \left| \alpha - \frac{q}{p} \right| \leq \frac{1}{p^2}.$$

Bizonyítás. Legyen N egy tetszőleges pozitív egész. Vegyük az $\{0 \cdot \alpha\}, \{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \dots, \{(N-1) \cdot \alpha\}, \{N \cdot \alpha\}$ törtrészeket és ábrázoljuk ezeket a $[0, 1]$ intervallumban. Ekkor N különböző(!) számot kapunk a $(0, 1) =]0, 1[$ intervallumban (miért?). Ezek balról jobbra tekintve (ez nem szükségszerűen ugyanaz a sorrend mint ahogy kezdetben felsoroltuk őket) az intervallumunkat $N+1$ részz szakaszra osztják. Az átlagos hossza a szakaszoknak $\frac{1}{N+1}$. Így lesz olyan két egymásutáni pont/szám amely $\frac{1}{N+1}$ -nél közelebb van egymáshoz. Azaz

$$0 < \{k_1 \cdot \alpha\} - \{k_2 \cdot \alpha\} \leq \frac{1}{N+1},$$

(esetleg $0 < 1 - \{k_2 \cdot \alpha\} \leq 1/(N+1)$).

Így alkalmas ℓ_1, ℓ_2 egészekre

$$0 < (k_1 \cdot \alpha - \ell_1) - (k_2 \cdot \alpha - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1},$$

azaz

$$0 < (k_1 - k_2) \cdot \alpha - (\ell_1 - \ell_2) \leq \frac{1}{N+1}.$$

Legyen $p = k_1 - k_2$ és $q = \ell_1 - \ell_2$. Ekkor nyilván $p \neq 0$ és $|p| \leq N$. Speciálisan

$$0 < p \cdot \alpha - q \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{|p|}.$$

Azaz találtunk egy jó (p, q) párt (másikat mint a triviális $(0, 0)$). A feladat azonban végtelen sokat kér. Ne felejtsük el, hogy a mód ahogy eljutottunk a megfelelő (p, q) párhoz egy tetszőleges N pozitív egész választáson alapult.

Ha már találtunk valahány jó (p, q) párt, akkor vegyük

$$\delta(p, q) = |p\alpha - q|$$

számok minimumát. Válasszunk olyan N -et, hogy ennél a minimumnál kisebb legyen $\frac{1}{N+1}$. A fenti eljárást ezzel a N -nel megismételve biztos újabb (eddig meg nem talált) (p, q) párt találunk. (Miért?)

Ez igazolja az állítást. ■

3. Geometriai skatulya-elv

A skatulya-elv egy megfogalmazása: Ha n skatulyába úgy akarunk elhelyezni tárgyakat, hogy egy skatulyába ne essen egynél több. Ekkor legfeljebb n tárgy helyezhető el. Geometriai környezetben is kimondhatunk egy hasonló állítást: Egy n területű alakzatba 1 területű alakzatokat helyezünk átfedés nélkül. Ekkor legfeljebb n „számára van hely”.

Ezekután természetes kimondani a következő tételt:

6. Tétel. *Egy adott A területű alakzatba $A_1, A_2, \dots, A_k$ területű alakzatokat pakolunk. Ha $A_1 + A_2 + \dots + A_k > \ell \cdot A$, akkor bárhogy végezzük is a pakolást, lesz olyan pont alakzatunkban, amelyet legalább $\ell + 1$ bepakolt alakzat lefed.*

A fentiekben szereplő „terület” nem egy egyszerű fogalom. Tisztázása általában nem középiskolai fogalom. Legtöbb esetben alakzataink „szépek”, ismertek. Például körök, háromszögek, téglalapok. Ekkor a fenti tétel/elv középiskolás szemmel is jól érthető és nyilvánvaló.