

KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

A matematika kombinatorikus alapelvei

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2020

1. Skatulya-elv

- 1. Feladat.** Egy tíztagú társaság minden tagja legalább hét másikat ismer. Mutassuk meg, hogy bármely három embernek van közös ismerőse.
- 2. Feladat.** Egy $n \times n$ méretű ($n \geq 2$) táblázatot ki kell töltenünk a -1 , 0 és 1 számokkal. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban álló elemek összege különbözőnek adódjon?
- 3. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy egy konvex poliédernek van két egyenlő oldalszámú lapja.
- 4. Feladat.** Tizenhét doboz mindegyikében piros, kék, sárga és zöld golyók vannak. Bizonyítsuk be, hogy található két olyan doboz, amelyekben együttvéve mind a négyféle színű golyóból páros sok van.
- 5. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy 12 különböző kétjegyű szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége azonos számjegyekből álló kétjegyű szám legyen.
- 6. Feladat.** Adott tetszőleges tíz pozitív kétjegyű egész szám. Igazoljuk, hogy számainkból kialakítható két nemüres diszjunkt halmaz, hogy a bennük lévő számok összege ugyanaz legyen. (Egy egy elemű számhalmaz elemeinek összege a benne lévő egyetlen szám.)
- 7. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy p és q egész számok esetén ($q \neq 0$) p/q tizedestört-alakja periodikus.
- 8. Feladat.** Legyen adott n darab természetes szám. Mutassuk meg, hogy kiválaszthatunk közülük néhány számot úgy, hogy azok összege n -nel osztható legyen.
- 9. Feladat.** Igaz-e, hogy minden k természetes számnak létezik olyan többszöröse, amely a 0 és 1 számjegyekből áll?
- 10. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy van olyan 1989-cel osztható szám, amelynek utolsó négy számjegye 1990.
- 11. Feladat.** a) Az a, b pozitív egész számok relatív prímek. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas k egészre ak -t b -vel osztva 1 maradékot kapunk.
b) Bizonyítsuk be, hogy az $ax + by = c$ egyenletnek az egész számok körében akkor és csak akkor van megoldása, ha $(a, b) | c$.
- 12. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan a számhoz található olyan b szám, hogy $2^b - 1$ osztható a -val. — Általánosítsuk az állítást.

13. Feladat. Van-e olyan n pozitív egész szám, hogy 3^n -nek a tízes számrendszerbeli leírása 0001-re végződik?

14. Feladat. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ olyan természetes számok, amelyekre $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 2n$. Bizonyítsuk be, hogy közülük kiválaszthatunk kettőt: a_i -t és a_j -t úgy, hogy $i \neq j$, és a_j többszöröse a_i -nek.

15. Feladat. Legyen S az $\{1, 2, 3, \dots, 2^m n - 1, 2^m n\}$ halmaz tetszőleges $(2^m - 1)n + 1$ elemű részhalmaza (m és n tetszőleges pozitív egészek). Bizonyítsuk be, hogy S tartalmaz $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ különböző számokat úgy, hogy $a_i | a_{i+1}$ teljesüljön minden $1 \leq i \leq m$ esetén. (Az $m = 1$ esetet az előző feladat tárgyalja.)

16. Feladat. Fibonacci-sorozatnak nevezzük az $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekurzív definícióval megadott sorozatot. Legyen m_n az F_n szám utolsó három számjegye által alkotott szám (tehát $0 \leq m_n \leq 999$). Bizonyítsuk be, hogy az m_n sorozat periodikus.

17. Feladat. Adott $n + 1$ különböző, $2n$ -nél kisebb pozitív egész szám ($n \geq 2$). Mutassuk meg, hogy található közöttük kettő relatív prím.

18. Feladat. Adott $n + 1$ különböző, $2n$ -nél kisebb pozitív egész szám ($n \geq 2$). Mutassuk meg, hogy található közöttük három olyan szám, amelyek közül az egyik a másik kettő összege.

19. Feladat. Egy tanuló egy félévben (hús hétet keresztül) mindennap megoldott legalább egy, de minden héten legfeljebb 13 feladatot. Bizonyítsuk be, hogy kijelölhető néhány egymás után következő nap úgy, hogy ezeken pontosan 19 feladatot oldott meg.

20. Feladat. Lev Alburt sakknagymester mindennap legalább egy mérkőzést játszik, hogy formában legyen, és legfeljebb tíz mérkőzést játszik hetente, nehogy kifáradjon. Bizonyítsuk be, hogy ha elég sokáig játszik, akkor lesznek olyan egymás után következő napok, amelyeken összesen pontosan 23 mérkőzést játszik.

21. Feladat. Egy sakkjátzsma folyamán 40-40 megtett lépés után mindkét játékos órája 2 óra 30 perc felhasznált időt mutatott. Bizonyítsuk be, hogy volt a mérkőzésnek olyan pillanata, amikor az egyik óra legalább 1 perc 50 másodperccel mutatott többet a másiknál. — Volt-e olyan pillanat, amikor legalább 2 perc volt ez a különbség?

22. Feladat. Egy nagyon hosszú, egyenes úton egyenlő szélességű repedések vannak. Az egymás után következő repedések középpontjai közötti távolság $\sqrt{2}$. Bizonyítsuk be, hogy, a repedések szélességétől függetlenül, egy sétáló ember, akinek lépései 1 hosszúak, előbb-utóbb valamelyik repedésre lép. (A sétáló lábnyomát pontszerűnek képzeljük el.)

23. Feladat. Legyen α irracionális szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok p, q egész szám, amelyekre

$$|p\alpha - q| < \frac{1}{p}, \text{ azaz } \left| \alpha - \frac{q}{p} \right| \leq \frac{1}{p^2}.$$

24. Feladat. * Nézzük a következő, p egyenletet és $q = 2p$ ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,q}x_q &= 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,q}x_q &= 0 \\ &\vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,q}x_q &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ahol az $a_{i,j}$ számok értékei a $\{-1, 0, 1\}$ halmazból kerülnek ki.

Bizonyítsuk be, hogy az (1) egyenletrendszernek van olyan $x_1, x_2, \dots, x_q$ megoldása, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- a) x_i -k egészek,
- b) nem minden x_i szám 0,
- c) minden x_i -re $|x_i| \leq q$.

25. Feladat. Egy 8×8 -as sakktáblán 42 figura áll. Mutassuk meg, hogy van legalább egy olyan 4×4 -es kis résztáblája, amelynek átlós mezőin legalább négy figura áll. (A 4×4 -es sakktábla átlós mezőinek azt a nyolc mezőt nevezzük, amelyek a két átlójára illeszkednek.)

26. Feladat. a) Adott 101 darab téglalap. Mindegyik téglalap oldalai 100-nál nem nagyobb egészek. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük három olyan téglalap, amelyek egymásba skatulyázhatók. (Téglalapok egy halmaza egymásba skatulyázható, ha mindegyik elmozgatható a síkon úgy, hogy az így kapott $T_1, T_2, T_3, \dots$ téglalapokra (ponthalmazokra) teljesüljön, hogy $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \dots$)

b) Adott 1989 darab téglalap. Mindegyik téglalap oldalai 100-nál nem nagyobb egészek. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük 40 darab olyan téglalap, amelyek egymásba skatulyázhatók.

27. Feladat. Egy egységnyi oldalhosszúságú négyzetbe elhelyeztünk öt pontot. Bizonyítsuk be, hogy közülük kiválasztható kettő úgy, hogy távolságuk legfeljebb $\sqrt{2}/2$ legyen.

28. Feladat. Egységnyi oldalhosszú négyzetben kijelöltünk 51 pontot. Mutassuk meg, hogy elhelyezhető a négyzetbe egy $1/7$ sugarú körlap úgy, hogy legalább három pontot eltakarjon.

29. Feladat. Egy egységnyi négyzetben kijelöltünk 99 pontot. Bizonyítsuk be, hogy található olyan $1/9$ sugarú kör, amely legalább három pontot tartalmaz.

30. Feladat. Egy 1 km oldalhosszúságú, négyzet alakú erdőben 4500 darab 0,5 m átmérőjű fa van. Kijelölhetünk-e valahol az erdőben egy $10 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ -es téglalap alakú játszóteret úgy, hogy ebben ne legyen fa?

31. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy 3×4 nagyságú téglalapban lévő hat pont közül mindig kiválaszthatunk két olyan pontot, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{5}$.

32. Feladat. a) Adott a síkon öt rácspont. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük két olyan pont, amelyek által meghatározott szakasz felezőpontja is rácspont.

b) Síkbeli koordináta-rendszerben adott kilenc pont úgy, hogy koordinátáik egész számok. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük három úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög súlypontjának koordinátái is egész számok.

33. Feladat. Egy 1990 sugarú kör középpontja az origó. A kör belsejében adott 555 egész koordinátájú pont úgy, hogy semelyik három sem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy az adott pontok meghatároznak két olyan háromszöget, amelyek területe azonos.

34. Feladat. Egy 16 egység sugarú körbe 650 pontot rajzoltunk. Bizonyítsuk be, hogy található 2 és 3 egység sugarú koncentrikus körökkel rajzolt körgyűrű úgy, hogy az legalább tíz pontot lefedjen.

35. Feladat. Egy egységnyi oldalú négyzetbe néhány kört rajzolunk. Bizonyítsuk be, ha a körök kerületének összege legalább 10, akkor van olyan egyenes, amely legalább négy kört metsz.

36. Feladat. Egy körben k darab $\pi/(k^2-k+1)$ -nél kisebb szögű körcikket tetszőlegesen jelölünk ki ($k \geq 1$). Bizonyítsuk be, hogy a középpont körül a k darab körcikk elforgatható (mindegyik ugyanazzal a szöggel) úgy, hogy az elforgatott körcikkek mindegyikének belseje diszjunkt legyen az eredeti helyzetű körcikk belsejétől.

37. Feladat. Egy egységnégyzetben adott egy legalább 1000 hosszúságú, önmagát nem metsző töröttvonal. Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyenes, amely legalább 500 pontban metszi a vonalat.

38. Feladat. Egy gömbfelület 12%-át befestjük pirosra. Bizonyítsuk be, hogy található olyan téglatest, amelynek minden csúcsa a gömbfelület egy be nem festett pontja.

2. Kettős összeszámlálás

39. Feladat. Adott n pont a síkon úgy, hogy semelyik három sincs egy egyenesen. Igazoljuk, hogy azon egység területű háromszögek száma amelyek csúcsai pontjaink közül kerülnek ki legfeljebb $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

40. Feladat. Egy iskolába 2007 lány és 2007 fiú jár. Mindegyik diák legfeljebb 100 iskolai klubnak tagja. Tudjuk, hogy az iskola tetszőleges fiú és lány diákja legalább egy közös klubba jár. Igazoljuk, hogy van olyan klub, amelynek legalább 11 fiú és legalább 11 lány tagja van.

41. Feladat. Legyen $x_1, x_2, \dots, x_n$ és $y_1, y_2, \dots, y_n$ valós számok. Legyen $A = (a_{i,j})$ (ahol $1 \leq i, j \leq n$) egy $n \times n$ mátrix, amelynek elemei

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_i + y_j \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x_i + y_j < 0. \end{cases}$$

Legyen B egy $n \times n$ mátrix, amelynek elemei 0 vagy 1, úgy, hogy B minden sorának és minden oszlopának elemeinek összege megegyezik a mátrix A megfelelő összegével. Mutassa meg, hogy $A = B$.

42. Feladat. Egy iskolában n tanuló van, és minden tanuló tetszőleges számú órát vehet fel. Minden osztályban legalább két diák van. Tudjuk, hogy ha két különböző osztályban legalább két közös diák van, akkor a két osztály diákjainak száma különböző. Bizonyítsuk be, hogy az osztályok száma nem nagyobb, mint $(n - 1)^2$.

43. Feladat. Egy egyetemen 10001 hallgató tanul. Néhány hallgató összefog, és több klubot alapít (egy hallgató több klubhoz is tartozhat). Néhány klub összefog, és több társaságot alapít (egy klub több társasághoz is tartozhat). Összesen k társaság van. Tegyük fel, hogy a következő feltételek teljesülnek:

- (a) Minden hallgatópár pontosan egy klubhoz tartozik.
- (b) Minden hallgató és minden társaság esetében a hallgató pontosan egy klubban van a társaságban.
- (c) Minden klubban páratlan számú hallgató van. Ezenkívül egy $2m + 1$ hallgatóval rendelkező klub (m pozitív egész szám) pontosan m társaságban van.

Határozzuk meg a lehetséges k értékek halmazát.

44. Feladat. Egy versenyen m versenyző és n bíró van, ahol $n \geq 3$ páratlan egész szám. Minden bíró minden versenyzőt „megfelelt” vagy „nem megfelelt” minősítéssel értékeli. Tegyük fel, hogy k olyan szám, hogy bármely két bíró értékelése legfeljebb k versenyző esetében egyezik meg. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n - 1}{2m}.$$

45. Feladat. Egy $n \times n$ táblázatban a $\{1, 2, \dots, n\}$ számok mindegyike pontosan n alkalommal jelenik meg. Mutassa meg, hogy van olyan sor vagy oszlop a táblázatban, amelyben legalább $\sqrt{n}$ különböző szám található.

46. Feladat. Vegyünk egy n csúcsú egyszerű gráfot, amelyben nincs 4-es hosszúságú kör. Mutassa meg, hogy az élek száma legfeljebb $\frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3})$.

47. Feladat. Egy n fős csoportban néhány pár tagjai barátok, a többi pár tagjai pedig ellenségek. Összesen k baráti pár van, és adott, hogy három ember nem lehet egymás barátja. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan személy, akinek az ellenségei között legfeljebb $k \left(1 - \frac{4k}{n^2}\right)$ baráti pár van.

48. Feladat. Legyen n és k pozitív egész számok, és legyen S egy n pontból álló halmaz a síkon, oly módon, hogy S három pontja sem egyenesbe esik, és S bármely P pontjára legalább k S pont esik, amelyek egyenlő távolságra vannak P -től. Bizonyítsuk be, hogy $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.