KOMBINATORIKA GYAKORLAT
osztatlan matematika tanár hallgatók számára

Multihalmazok

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter 2020

Nagy V. Gábor feladatsora (http://www.math.u-szeged.hu/∼ngaba/kombi_gy/index.html)

1. Feladat. *Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajta gyümölcsök teljesen egyformák.)*

2. Feladat. *Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, amely 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg. A bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)*

3. Feladat. *Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?*

$$a + b + c + d = 2020.$$

4. Feladat. *Hányféleképpen oszthatunk el k darab (egyforma) ötforintost n (különböző) gyerek között úgy, hogy*

a) tetszőleges elosztás megengedett;

b) mindenki kapjon legalább egy érmét;

c) az i-edik gyerek legalább i érmét kapjon ($i = 1, \ldots, n$);

d) mindenki páros sok érmét kapjon;

e) mindenki páratlan sok érmét kapjon?

5. Feladat. *Cégünknél 20.000 ft bónuszt szeretnénk szétosztani hat dolgozó között. Három dolgozónak olyan szerződése van, hogy legalább 2.000 ft-ot kell kapniuk, a többieknek pedig legalább 1.000 ft-ot. Hányféleképpen oszthatjuk szét a rendelkezésre álló pénzösszeget, ha mindenki 1.000-rel osztható összeget kap?*

6. Feladat. *Van k fajta gyümölcsünk. Az i-edik fajtából a_i egyforma darab van. A gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (üres csoport is megengedett). Hányféle módon tehetjük ezt meg?*

7. Feladat. *Hány monoton növő $[n] \to [n]$ függvény van? (Egy f függvény monoton növő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.)*

8. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$ alaphalmaz felett 4^n darab olyan n elemű multihalmaz adható meg, amelyben az $1, 2, \ldots, 2n+1$ elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).*

9. Feladat. *Az (n elemű alaphalmaz feletti) M multihalmaz multiplicitásvektora $(m_1, \ldots, m_n)$. Jelölje r_k az M multihalmaz k elemű részmultihalmazainak számát. Igazoljuk, hogy*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \prod_{k=1}^{n} (1 + x + x^2 + \ldots + x^{m_k}).$$

10. Feladat. *Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1, 2, \ldots, n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n+1, n+2, \ldots, 2n$ multiplicitásai párosak?*

11. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum c_1 \ldots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1},$$

ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^{k}$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1 + \ldots + c_k = n$.

12. Feladat. *Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:*

a)

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right),$$

b)

$$\left(\!\binom{2n}{n}\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) \left(\!\binom{n}{n-k}\!\right),$$

c)

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + \ldots \left(\!\binom{n-1}{1}\!\right) + \left(\!\binom{n-1}{0}\!\right).$$