

1. Alapfogalmak

Gráfok csúcsai és élei is színezhetők. Mi most csak csúcs-színezésekkel foglalkozunk. Egy csúcs-színezés a gráf csúcsaihoz rendel színeket, azaz egy

$$c : V(G) \rightarrow P,$$

függvény, ahol P egy színhalmaz/paletta. P lehet $\{\text{piros, kék}\}$ (ekkor vagy más két elemű paletta esetén 2-színezésről beszélünk). Általában k -színezés azt jelenti, hogy színeink k elemű palettából kerülnek ki. Gyakori a $P = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ választás.

Egy színezés jó színezés, ha minden $e = uv \in E(G)$ élre u és v színe különbözik, azaz $c(u) \neq c(v)$. Ez kapcsolja össze a csúcsok színeit a gráf struktúrával/az élekkel.

Ha gráfunkban van hurokél, akkor az erre vonatkozó feltétel szerint két végpontja különböző színt kell hogy kapjon. De két végpontja ugyanazon csúcs, azaz a feltétel nem teljesíthető, nincs jó színezése gráfunknak. Ha gráfunkban nincs hurokél, akkor minden csúcsnak különböző színt adva egy jó színezéshez jutunk.

A továbbiakban gráf színezésről beszélve mindig jó csúcs-színezésre gondolunk és feltesszük, hogy gráfunk egyszerű. A hurokélek hiányának feltétele a fentiek alapján nyilvánvaló.

2. 2-színezhető gráfok

Láttuk, hogy egy páratlan hosszú kör színezéséhez kell három szín. Természetesen, ha gráfunkban részgráfként ott van egy pártalan kör, akkor már ez megakadályozza, hogy két színnel jól színezhessünk.

Nem nehéz, de nem is nyilvánvaló, hogy ez az észrevétel megfordítható.

1. Tétel. *Egy gráf akkor és csak akkor színezhető ki jól két színnel, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.*

Bizonyítás. A két irányú tételnek csak az az iránya problémás: amelyik azt állítja hogy páratlan hosszú körök hiányában a két-színezhetőség garantált.

Elegendő összefüggő gráfokra igazolni ezt. Legyen G egy összefüggő gráf és T egy feszítőfája.

T ághajtásokkal felépíthető és a felépítést követve jól ki is színezhető két színnel: Minden új csúcs megjelenésénél egyetlen egy szomszéd (már színezett) lesz. A két elemű paletta garantálja a színezés folytatását. Ezzel a teljes G csúcs halmazát kiszíneztük két színnel. A probléma, hogy csak T éleire „ügyeltünk”.

Belátjuk, hogy G minden élének két végpontja különböző színt kapott. Legyen $e = uv \in E(G) - E(T)$. T -ben van (egyetlen egy) uv út. Ezt e egy körre zárja

be, amelyről tudjuk, hogy páros hosszú. Tehát a T -be eső uv út páratlan hosszú, ráadásul jól van színezve. A jó színezés két szín esetén az út menti szín-alternálást jelenti. Páratlan út esetén u és v színének különbözősége könnyen adódik. ■

Két színezhetőség azt jelenti, hogy piros/kék színezhető legyen a gráf úgy, hogy minden él a két színre vonatkozólag „keresztél” legyen. Másrészt úgyis fogalmazhatunk, hogy minden köre páros legyen (ebbe belefér az is, hogy ne legyen köre). A második jellemzés alapján az ilyen gráfokat páros gráfoknak nevezzük. Az angol terminológia „bipartite”, tükörfordítása kétrészes. Ez a szóhasználat inkább az első jellemzést követi.

Definíció. G gráf páros, ha csúcsai A és F kategóriákba sorolhatók úgy, hogy minden él egyik végpontja A -beli, másik F -beli legyen.

Speciálisan egy páros gráf nem tartalmazhat hurokét.

Négy csúcs páronként összekötve megakadályozza a három színnel való jó színezhetőséget. Ez az állítás azonban nem fordítható meg. Nem is ismert a fenti tételhez hasonló, „szép” jellemzése a három színnel színezhető gráfoknak. A szakértők azt sejtik, hogy ilyen nincs is. Persze egy ilyen állítás akkor válik matematikai sejtéssé, ha pontosan definiáljuk a benne szereplő fogalmakat. Ez messze meghaladja ezen kurzus kereteit.

3. Mohó színezés

Ismét ismertetjük a legegyszerűbb eljárást egy jó színezés megkeresésére. Feltesszük, hogy algoritmusunk során a P paletta $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Mohó színezési algoritmus:

- (1) Rendezzük sorba gráfunk csúcsait:

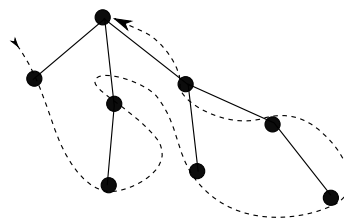
$$\pi : v_1, v_2, \dots, v_n.$$

Ez lesz a csúcsok színezési sorrendje

- (2) Az i -edik színezési lépésben v_i -nek színt adunk ($i = 1, 2, \dots, n$). v_i színezésénél v_i korábbi (kisebb indexszel rendelkező) szomszédai már színt kaptak. Legyen T a színezett szomszédok színeinek halmaza, ezeket nem adhatjuk v_i színének (amennyiben a régi színeket megtartjuk). Legyen v_i színe $P - T$ (nem tiltott színek halmazának) első/legkisebb eleme.

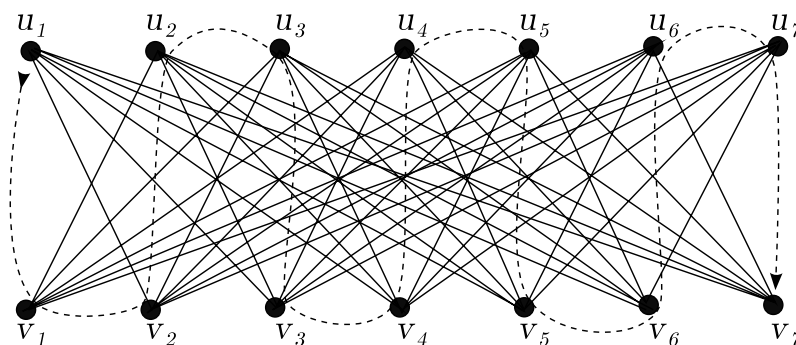
Jelölés. Legyen $\chi_{\text{mohó}, \pi}(G)$ a fenti mohó színezésnél felhasznált színek száma a G gráf esetén.

Példa. Az alábbiakban egy fát láthatunk (tehát kromatikusszáma 2). A szaggatott vonal egy csúcssorrendet mutat. Ezt követve végezzük el mohó színezést.



Hány színre volt szükségünk?

Példa. Az alábbiakban egy páros gráfot (azaz két színnel jól színezhető) látunk az $\{u_1, u_2, \dots\} \cup \{v_1, v_2, \dots\}$ csúcshalmazon. Egy u_i és v_j csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $i \neq j$. A szaggatott vonal egy csúcssorrendet mutat (index szerint növekvő rendezés). Ezt követve végezzük el mohó színezést. Hány színre



volt szükségünk?

2. Tétel. Tetszőleges π csúcs sorrend esetén

$$\chi_{\text{mohó}, \pi}(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

ahol $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$, a G gráf maximális foka.

Bizonyítás. Minden színezési lépésnél egy csúcsnak a korábbi (már színezett) szomszédai által kapott színek lesznek tiltottak. A tiltott színek száma biztos nem haladja meg $\Delta(G)$ -t. Azaz a mohó algoritmus sose lép ki a $\{1, 2, \dots, \Delta(G), \Delta(G) + 1\}$ színhalmazból. ■

Megjegyezzük, hogy a teljes gráfok és a páratlan hosszú körök mutatják, hogy a tétel állítása éles.

Bizonyítás nélkül megemlítjük az alábbi kicsinynek tűnő, de távolról sem triviális tételt.

3. Tétel (Brooks). Legyen G egy összefüggő gráf, amely nem teljes és nem páratlan hosszú kör. Ekkor

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

4. Színezések és klikkek

Az alábbi fontos fogalom szoros kapcsolatban áll a gráfok színezésével.

Definíció. Egy G gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezzük, ha K bármely két különböző csúcsa összekötött.

$\emptyset$ és az összes egy elemű csúcshalmaz klikk. Bármely nem-hurokél két végpontja egy két-elemű klikket alkot.

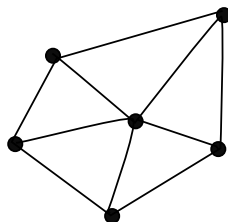
A kapcsolat a jó színezésekkel nyilvánvaló: Egy tetszőleges $c : V(G) \rightarrow P$ jó színezésnek tetszőleges K klikk csúcsait különbözőre kell színeznie. Speciálisan

$$|P| \geq |K|.$$

Ezt az észrevételt leghatékonyabban úgy használhatjuk ki, ha a legkisebb palettára és a legnagyobb klikkre alkalmazzuk. Kapjuk, hogy

$$\chi(G) \geq \omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk}\}.$$

Az állításunk egy egyenlőtlenség. Egyenlőség nem igaz. Ezt mutatja a következő gráf:



Egy öt hosszú kör mellett van egy csúcs, amely a kör összes csúcsával szomszédos. A kör jó színezéséhez 3 szín kell, a plusz csúcs egy új színt igényel. A kromatikus szám 4. Könnyű ellenőrizni, hogy a legnagyobb klikk mérete 3.

A fenti egyenlőtlenség egy megfogalmazása: Ha gráfunkban van „nagy” klikk, akkor a jó színezéshez „sok” szín kell.

Fordítva igaz-e? Ha a kromatikus szám nagy, akkor lennie kell a gráfban nagy klikknek? Ha a kromatikus szám legalább 2, akkor lennie kell benne élnek, ami egy két-elemű klikket ad. Ezen triviális megjegyzésen túl a fenti kérdésként felvetett megfordítás NEM igaz. Ezt a következő szekcióban igazoljuk.

5. Nagy kromatikus számú, háromszög nélküli gráfok

4. Tétel. *Van olyan G_n gráfsorozat, hogy*

- (i) $\chi(G_n) \rightarrow \infty$, ha n tart a végtelenbe,
- (ii) G_n -ben nincs háromszög, azaz három-elemű klikk, azaz $\omega(G_n) \leq 2$.

A bizonyítás konstruktív lesz. Leírunk egy konkrét gráfsorozatot és ellenőrizzük a tételbeli tulajdonságokata. Több ilyen konstrukció is ismert. Kettőt ismertetünk.

Bizonyítás. (Mycielsky) Rekurzív módon/indukció segítségével írunk le egy G_n gráfsorozatot.

G_2 legyen egy két pontú teljes gráf, amely kromatikus száma 2, míg nem tartalmaz három elemű klikket (mivel nincs is három csúcsa).

Tegyük fel, hogy már definiáltuk G_{n-1} -et és ennek kromatikus száma $n - 1$, továbbá nem tartalmaz három elemű klikket. Ennek segítségével írunk le G_n gráfot, amely kromatikus száma eggyel nagyobb lesz (tehát értéke n), de továbbra sem tartalmaz háromszöget.

Vegyünk G_{n-1} egy példányát és minden v csúcs mellé vegyünk fel egy v' „iker-testvért”. A v' csúcsokra mint új csúcsokra hivatkozunk. Az új csúcsok között ne vezessen él, de minden v' csúcsot kössünk össze a v csúcs szomszédaival. Végül adjunk hozzá az így kapott gráfhoz egy z zárócsúcsot, amelyet pontosan a v' új csúcsokkal kötünk össze. Az így kapott gráf lesz G_n .

A G_n -re történő ugrás során nem keletkezhet háromszög.

Azt állítjuk, hogy a G_n -re történő konstrukció során pontosan eggyel nő a kromatikus szám. Nyilván a kromatikus szám nem csökkenhet, továbbá eggyel többel nem nőhet. Azt kell indokolnunk, hogy a növekedés szükségszerű. Valóban, tegyük fel, hogy G_n -t jól kiszínezzük a $P = \{1, 2, \dots, n-1\}$ színnel (indirekt feltevés). z színe legyen $n-1$, az utolsó szín. Belátjuk, hogy a G_n színezése közben kiszínezett G_{n-1} jól átszínezhető úgy, hogy a benne előforduló $n-1$ színek eltűnjenek (azaz csak az $\{1, 2, \dots, n-2\}$ palettát használjuk). Ez ellentmond, annak, hogy G_{n-1} kromatikus száma $n-1$. Az átszínezés egyszerű. Minden $1, 2, \dots, n-2$ színt meghagyunk. Az $n-1$ színt kapott v csúcsok színét lecseréljük v' ikertestvére színére. Ez a szín nem lehet $n-1$, hiszen v' összekötött z -vel. Másrészt jó színezéshez jutunk, hisz egy független ponthalmaz (az $n-1$ színű pontok egy halmaza) elemeit festettük át, köztük a jó színezés semmilyen feltételt nem ír elő. Míg az átszínezett pontoknak a régi színekkel sem lesz konfliktusa, hisz v mellé a v' színe „stimmelni” fog: v' színe egy jó színezésből jött, ahol v' összekötött v G_{n-1} -beli szomszédaival. ■

Bizonyítás. Vegyünk fel egy egyenest és rajta N pontot. Az N pont által meghatározott $\binom{N}{2}$ darab szakaszra mint átmérőre köröket rajzolunk. Az így kapott $\binom{N}{2}$ darab kör alkotja gráfunk csúcshalmazát. Két csúcsunk/kör szomszédos, ha kívülről érintkeznek.

Egyszerűen igazolható, hogy ezen gráfban nincs háromszög. Azaz az állítás geometriai megfogalmazása: ha három kör középpontja egy egyenesre esik, akkor nem lehetnek páronként kívülről érintkezők.

Legyen G_n az a gráf, amely $2^{n-1} + 1$ pontból építettünk fel. Csak az (i) tulajdonságok kell igazolnunk.

A pontos állításunk: Ha $N > 2^k$, akkor gráfunk nem színezhető k színnel. Indirekten bizonyítunk. Legyen c csúcsaink/köreink egy k színnel történő színezése. Célunk az, hogy belássuk ez a színezés nem lehet jó. Az egyenesen felvett kiinduló ponthalmazunk mindegyik P eleméhez rendeljük hozzá azon színek halmazát, amelyeket azon körök kaptak, amelyek egyenesre eső átmérőjére P mint bal oldali végpont illeszkedik. Az $N(> 2)$ egyenesen lévő pont mindegyikéhez a k elemű paletta egy részhalmazát rendeltük. Ez 2^k lehetőséget enged meg a színhalmazokra. N választása miatt lesz két pont P és Q , amelyhez ugyanaz a szín tartozik. Tegyük fel, hogy egyenesünkön balról jobbra haladva először P , majd Q következik. Azaz a PQ szakasz bal oldali végpontja P . Azaz a P -hez rendelt színhalmaz elemei között ott van a PQ -ra mint átmérőre rajzolt C kör színe. Ennek a színnek elő kell fordulnia a Q -hoz rendelt színhalmazban is. Ez egy megfelelő kör létezését kívánja, ami azonos színű C -vel, amit kívülről érint. Tehát a kiinduló c színezés nem lehet jó színezés.

Speciálisan G_n kromatikus száma legalább n . ■