

1. Alapfogalmak

Definíció. $\mathcal{H}$ halmazrendszer V felett, ha $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(V)$ (azaz $\mathcal{H}$ a V alaphalmaz részhalmazainak egy halmaza).

Definíció. $\mathcal{H}$ hipergráf V felett egy hármas (V, E, I) , ahol $I \subseteq V \times E$ -nek egy illeszkedési reláció.

A gráfoknál már megismert alapfogalmakat többnyire természetesen általánosíthatók a halmazrendszerek, illetve a hipergráfok esetén. Ezek alapján V elemeit csúcsoknak, míg $\mathcal{H}$ elemeit éleknek nevezzük.

Hipergráfban egy $e \in E$ élhez hozzárendelhetjük a $\{v \in V : vIe\}$ halmazt, e végpontjainak halmazát. Különböző $e, e' \in E$ esetén ezek a halmazok lehetnek ugyanazok (azaz $e \neq e' \in E$, de a végpontjaik halmaza megegyezik). Ha ilyen „párhuzamos él” nincs a $\mathcal{H}$ hipergráfban, akkor $e \in \mathcal{H}$ azonosítható $\{v \in V : vIe\}$ halmazzal és $\mathcal{H}$ tekinthető egy halmazrendszernek. A halmazrendszerek „egyszerű hipergráfok”, ahol az egyszerű jelző a párhuzamos él hiányát jelenti.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy V feletti halmazrendszer, és legyen $x \in V$ az alaphalmaz egy eleme. x fokszáma az x -et tartalmazó él szám. Jelölés: $d_{\mathcal{H}}(x) = |\{e \in \mathcal{H} : x \in e\}|$.

1. Lemma. $\sum_{x \in V} d_{\mathcal{H}}(x) = \sum_{E \in \mathcal{H}} |E|$, azaz a foksámok összege megegyezik az élek méreteinek összegével.

Definíció. $\mathcal{H}$ halmazrendszer k -uniform, ha bármely $E \in \mathcal{H}$ él esetén $|E| = k$. ($\mathcal{H}$ elemei k elemű halmazok).

Az egyszerű gráfok azonosíthatók a 2-uniform halmazrendszerekkel.

Egy gráf felfogható mint egy hipergráf, amelyben minden él végponthalmaza 1 vagy 2 elemű. Egy gráf esetén $v \in V(G)$ esetén a gráfelméleti $d_G(v)$ foksám és a halmazrendszerként tekintett $d_{\mathcal{H}}(v)$ foksám eltér, ha v -re illeszkedik hurokél. Igazából egy hurokél egy gráfban egy 2-elemű multihalmaz: az egyetlen illeszkedő csúcs 2 multiplicitással. A hipergráf fogalma nem képes egy ilyen multihalmaz-él leírására. Bevezethető egy általános fogalom, amelyben az élek az alaphalmaz feletti multihalmazok. A formalizálást az érdeklődő hallgató el tudja végezni.

2. Steiner-rendszerek

Legyen $v := |V|$.

Definíció. $\mathcal{S}$ halmazrendszer V felett Steiner-rendszer, ha 3-uniform halmazrendszer, amelynek alaphalmaza bármely két különböző pontját egy halmazrendszerbeli hármas tartalmazza.

Az alábbiakban egy alternatív leírását adjuk a Steiner-rendszereknek.

Definíció. K_v (v csúcsú teljes gráf) éleinek háromszögekre való partícionálását nevezzük háromszög-bontásnak. Tehát a háromszög-bontás esetén az ott szereplő háromszögek él-hármasok diszjunktak és uniójuk kiadja $E(K_v)$ -t.

Egyszerű belátni, hogy akkor és csak akkor létezik Steiner-rendszer v ponton, ha K_v -nek van háromszög-bontása.

Alapkérdés: Milyen v -kre létezik v pontú Steiner-rendszer?

Példa. $v = 1, 3$ ponton létezik Steiner-rendszer.

2. Feladat. $v = 2, 4, 5, 6$ ponton nem létezik v -pontú Steiner-rendszer.

Példa. $v = 7$ ponton létezik Steiner-rendszer: Fano-sík.

Példa. $v = 9$ ponton létezik Steiner-rendszer: 3 paraméterű affin sík.

3. Feladat. $v = 13$ ponton létezik Steiner-rendszer.

Példa. A $v = 3^k$ pontban is létezik, mert $(\mathbb{Z}_3^k, +)$ csoport és elemein

$$\mathcal{S} = \{\{x, y, z\} : x, y, z \in \mathbb{Z}_3^k, x + y + z = 0, x \neq y \neq z \neq x\}$$

egy Steiner-rendszer.

4. Lemma. Ha létezik $\mathcal{S}$ Steiner-rendszer v ponton, akkor $2|v - 1$ és $3|v \cdot (v - 1)$.

Bizonyítás. Vegyük K_v egy háromszög-bontását. Ekkor a $v(v - 1)/2$ élt három elemű csoportokba osztályoztuk. Továbbá minden csúcsnál az ott összefutó $v - 1$ élt párokba osztottuk. ■

Megjegyzés. A fenti lemma (egyelőre szükséges) feltételeit oszthatósági feltételeknek nevezzük. Könnyű elemi számelmélet adja, hogy a feltételek ekvivalensek a $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$ feltétellel.

A bevezető példák/feladatok talán sugallják, hogy az oszthatósági feltételek elégségesek is a Steiner-rendszer létezéséhez. Ez így is van. Ezt a *Steiner-rendszer alaptételének* nevezzük. Az alábbiakban célunk v pontú Steiner-rendszer megadása. Minél több módszert szeretnénk mutatni ilyen konstrukcióra.

3. Steiner-rendszerek elemi konstrukciói

Az alábbi lemma hasznosnak bizonyul:

5. Lemma. K_{2k+1} élei felbonthatók $2k + 1$ darab majdnem teljes párosítás (k élű párosítás) uniójára ($\chi_e(K_{2k+1}) = 2k + 1$).

Bizonyítás. A csúcsokat egy szabályos $2k + 1$ -szög csúcsai reprezentálják. Minden oldalhoz tartozzon egy majdnem teljes párosítás: az oldallal párhuzamos átlók (a kiinduló oldalt is átlónak tekintjük és az általa definiált párosításnak eleme lesz). Egyetlen pont lesz párosítatlan: a sokszög kiinduló oldalával szemközti csúcsa. A fenti majdnem teljes párosítások a lemmát igazolják. ■

6. Következmény. *A $v = 6k + 3$ esetén létezik Steiner-rendszer.*

Bizonyítás. Vegyünk három darab K_{2k+1} teljes gráfot. Ezek legyenek K, K^+, K^{++} . A K gráf egy v csúcsának megfelel a v^+ csúcs K^+ -ban és a v^{++} csúcs K^{++} -ban. A három teljes gráf körszerűen rendezve van: A v^+ csúcs a v rákövetkezője. v^+ rákövetkezője $v^{++} \in V(K^{++})$, amely rákövetkezője $v \in V(K)$.

Alkalmazzuk a három teljes gráfra a lemmát. A majdnem teljes párosításokat színekkel kódoljuk. Mind a három teljes gráfban lesz egy piros párosítás. Ennek éleire mint piros élek hivatkozunk. Mindhárom párosítás egy csúcsot párosítatlanul hagy, ezekre (három csúcs) mint piros csúcsra hivatkozunk. Az egyik piros csúcs rákövetkezője a következő gráfban az ottani piros csúcs, a piros élek rákövetkezői a következő gráf piros élei. Lesznek kék majdnem teljes párosít'ások, és így tovább.

Legyen a $\mathcal{S}$ rendszer élei:

- (i) $\{\text{a három piros pont}\}, \{\text{a három kék pont}\}, \dots \rightarrow$ Ez $2k + 1$ darab hármas.
- (ii) $\{\text{piros pont és rákövetkezőben valamely piros él két végpontja}\}, \{\text{kék pont és rákövetkezőben valamely kék él két végpontja}\}, \dots \rightarrow$ Ez $v \cdot k$ darab hármas.

7. Állítás. *$\mathcal{S}$ Steiner-rendszer.*

Valóban: Minden $x, y \in V$ különböző csúcspárra megadható rajtuk átmenő él. Továbbá a hármasok száma a várt $(v(v-1)/6)$.

A befejezést az érdeklődő hallgatóra bízuk:

8. Feladat. *$\mathcal{S}$ Steiner-rendszer V felett, ha $|\mathcal{S}| = \frac{\binom{v}{2}}{3}$ és minden pontpáron át halad él.*

■

4. Steiner-rendszerek számelméleti konstrukciója

Legyen $v = 6k+1$ prím. Legyen $V = \mathbb{F}_v = \{0, 1, \dots, v-1\}$, ahol az alaphalmaza a mod v aritmetikával látjuk el. Legyen $\mathbb{F}_v^* = \{0\} \cup Q \cup \bar{Q}$, ahol Q a kvadratikus-maradékok (mod q nem-nulla négyzetszámok, azaz azon $a \neq 0$ elemek V -ből, amelyekre $x^2 = a$ megoldható) halmaza, továbbá $\bar{Q}$ a kvadratikus-nem-maradékok halmaza. Az $\mathbb{F}_v^*$ a v elemű test multiplikatív csoportja, egy ciklikus csoport, azaz alkalmas $g \in \mathbb{F}_v^*$ elemre, hogy $\mathbb{F}_v^* = \{g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$. Ekkor $g^{p-1} = g^{6k} = 1$ és $g^{3k} = g^{\frac{p-1}{2}} = -1$.

A konstrukciónak néhány alapháromszög leírásával kezdjük. Legyen

$$T_i = \{g^i, g^{i+2k}, g^{i+4k}\},$$

ahol $1 \leq i \leq k$.

Példa. $p = v = 13$, $k = 2$ esetén

$$\mathbb{F}_{13}^* = \{2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1\}$$

$$T_1 = \{2, 5, 6\}$$

$$T_2 = \{4, 10, 12\}$$

Észrevétel. A példában a két alapháromszöget a szabályos 13-szög csúcsain ábrázoljuk a standard módon, akkor a kombinatorikus oldalhosszak (6 darab) az összes kombinatorikus átlóhosszat egyszeresen reprezentálják.

Így az alapháromszögek elforgatottjai Steiner-rendszert alkotnak. Ez az ötletet valósítjuk meg tetszőleges olyan ponthalmazon, amely elemszáma $6k + 1$ alakú prímszám.

9. Tétel. *Az észrevétel minden $v = p = 6k + 1$ esetén igaz. Azaz az alapháromszögek $3k$ darab oldala különböző hosszú.*

Bizonyítás. Valóban: Legyen $g^{i+\varepsilon \cdot 2k}$, $g^{i+(\varepsilon+1) \cdot 2k}$ és $g^{j+e \cdot 2k}$, $g^{j+(e+1) \cdot 2k}$ két alapháromszög egy-egy oldala ($\varepsilon = e \in \{0, 1, 2\}$ és $1 \leq i, j \leq k$). A két oldal különbözősége $(i, \varepsilon) \neq (j, \ell)$ -vel ekvivalens.

A bizonyítandó

$$g^{i+\varepsilon \cdot 2k} - g^{i+(\varepsilon+1) \cdot 2k} \neq \pm(g^{j+e \cdot 2k} - g^{j+(e+1) \cdot 2k}).$$

Rendezéssel (osztva a $1 - g^{2k}$ nem-nulla számmal) kapjuk a következő ekvivalens formát:

$$g^{i+\varepsilon \cdot 2k} \neq \pm g^{j+e \cdot 2k}.$$

Azaz $g^{3k} = -1$ felhasználásával

$$g^{i+\varepsilon \cdot 2k} \neq g^{j+e \cdot 2k} \quad \text{és} \quad g^{i+\varepsilon \cdot 2k} \neq g^{j+e \cdot 2k+3k}.$$

Az első egyenlőtlenség könnyen adódik a $(i, \varepsilon) \neq (j, \ell)$ feltevésből. A második is könnyen meggondolható. ■

10. Következmény. *Minden olyan alaphalmazon, amely elemszáma $6k + 1$ alakú prímszám létezik Steiner-rendszer.*

5. Skolem-konstrukció

Definíció. Skolem-párosítás $\{1, 2, \dots, 2n\}$ párosítása úgy, hogy a párokban lévő szám-párok távolsága rendre $1, 2, \dots, n$ legyen.

Milyen n pozitív egészre van Skolem-párosítás?

Példa. $n = 1$ esetén van Skolem-párosítás. persze csak egy pár lehet: 12 és ezek távolsága egy (ahogy kell).

Példa. Az $n = 4, 6$ esetében nincs Skolem-párosítás.

Példa. Az $n = 8$ esetében 12, 46, 58, 37 egy Skolem-párosítás. Itt a számpárokból a távolságok rendre 1,2,3,4.

11. Lemma (Skolem-párosítások oszthatósági feltétele). *Ha létezik Skolem-párosítás az $\{1, 2, \dots, 2n\}$ halmazon, akkor $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ igaz.*

Bizonyítás. Létezik Skolem-párosítás $\{1, 2, \dots, 2n\}$ -en akkor a párosítás az alaphalmazt felbontja két részre: $A \dot{\cup} F$, ahol A az egyes párok kisebb elemeinek halmaza, F az egyes párokból a nagyobb elemek halmaza.

Ekkor

$$\sum F = \sum_{a \in A} (a + \ell(a)) = \sum A + \frac{n(n+1)}{2},$$

ahol $\ell(a)$ az a elem és párjának távolsága.

Másképpen

$$\sum_{i=1}^{2n} i = \sum F + \sum A = 2 \sum A + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ez utóbbi egyenlőség rendezve $n \equiv \frac{n(n+1)}{2} \pmod{2}$. Elemi számelmélet fejezi be a lemma bizonyítását. ■

12. Tétel (Skolem tétele, Skolem-párosítások alaptétele). *Ha n -re teljesül a Skolem-párosítások oszthatósági feltétele, akkor létezik Skolem-párosítás $\{1, 2, \dots, 2n\}$ -en.*

Ezt nem bizonyítjuk.

Könnyű látni, hogy $\{1, 2, \dots, 2n\}$ -en akkor és csak akkor létezik Skolem-párosítás, ha $\{k, k+1, \dots, k+2n-1\}$ -en létezik Skolem párosítás. Ez utóbbi párosításból viszont könnyű alapháromszögeket definiálni a $\{0, 1, 2, 3, \dots, 6n\}$ halmazon: Minde párhoz hozzáadjuk a 0 elemet egy hármas képzéséhez. Az így kapott n darab alapháromszög kombinatorikus oldalhosszai reprezentálják a $3n$ darab lehetséges átlóhosszat. Így elforgatottjai egy Steiner-rendszert adnak.

Eredményeinket a következő állítások foglalják össze.

13. Lemma. *Ha $\{1, 2, \dots, 2n\}$ -en létezik Skolem-párosítás, akkor a $\{0, 1, 2, 3, \dots, 6n\}$ halmazon létezik Steiner-rendszer.*

14. Következmény. *A $v = 24k + 1$ és $v = 24k + 7$ elemű ponthalmazon létezik Steiner-rendszer.*

6. Steiner-rendszerek algebrai-konstrukciói

$\mathcal{S}$ Steiner rendszer legyen a $(V, \circ)$ a következő struktúra:

$$x \circ y = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y, \\ z, & \text{ha } x \neq y \text{ és } \{x, y, z\} \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

A következő lemma foglalja össze a fent definiált $\circ$ művelet alaptulajdonságait.

15. Lemma. $(V, 0)$ csoport tulajdonságai:

- (i) $x \circ x = x$, azaz $\circ$ idempotens,
- (ii) $x \circ y = y \circ x$, azaz $\circ$ kommutatív,

(iii) $x \circ (x \circ y) = y$, ezt $\circ$ Steiner-tulajdonságának nevezzük.

Az (ii) és (iii) állításokból következik, hogy $x \circ \alpha = y$ és $\alpha \circ x = y$ megoldható minden x, y -ra. Az ilyen struktúrákat kvázi-csoportoknak nevezzük. Tehát a Steiner-rendszerekből speciális kvázi-csoportokat definiáltunk.

16. Feladat. Ha van V -n idempotens, kommutatív, Steiner-művelet, akkor létezik V -n Steiner-rendszer.

Emlékeztető. Egy V feletti $\mathcal{S}$ halmazrendszer Steiner-rendszer, ha $\mathcal{S}$ 3-uniform, és bármely $x \neq y \in V$ elemekhez pontosan egy $T \in \mathcal{S}$ él van, melyre $x, y \in T$.

7. Steiner-rendszerek és kvázics csoportok (folytatás)

Emlékeztető. V felett akkor és csak akkor létezik Steiner-rendszer, ha V -n létezik kommutatív, idempotens, Steiner-tulajdonságú kvázics csoport.

A Steiner-rendszerek alaptétele alapján tudjuk, hogy milyen nagyságú V halmazon van kommutatív, idempotens, Steiner-tulajdonságú kvázics csoport. Ez az állítás ekvivalens a Steiner-rendszerek alaptételével. Ennél jóval egyszerűbb az alábbi állítás.

17. Lemma. V véges halaz esetén pontosan akkor létezik rajta kommutatív, idempotens, kvázics csoport-művelet, ha $|V|$ páratlan.

Bizonyítás. Először is írjuk fel egy V -n értelmezett $+$ tetszőleges művelet művelet táblázatát, és vizsgáljuk meg hogy a fenti tulajdonságok miként olvashatóak le a táblázatból!

Észrevétel: $(V, +)$ pontosan akkor kvázics csoport, ha a táblázat minden sorában és oszlopában egyszer fordul elő minden elem. (Az ilyen táblázatokat Euler után *Latinnégyzeteknek* nevezzük.)

Pontosan akkor kommutatív a művelet, ha a táblázat szimmetrikus a főátlójára.

Ha idempotens a művelet, akkor a táblázat átlójában V elemei pontosan egyszer fordulnak elő. Amennyiben az átlón V elemei pontosan egyszer fordulnak elő, akkor a művelet táblája sorainak nevét átdefiniálhatjuk úgy, hogy idempotens legyen. Ez a változtatás nem fogja a kommutatív/kvázics csoport-művelet tulajdonságokat megváltoztatni.

Most tegyük fel, hogy V -n létezik a lemmában leírt művelet. A kvázics csoport-művelet tulajdonság miatt bármely $a \in V$ -re pontosan $|V|$ db a van a táblázatban. A kommutativitás miatt a főátlót nem tekintve páros sok a lesz a táblázatban. A főátlón viszont pontosan egyszer fordul elő, az idempotencia miatt. Így páratlan sok a van a táblázatban.

Legyen $|V| = 2k + 1$. Ekkor a $\mathbb{Z}_{2k+1}$ mint additív csoport összeadási táblázata jó lesz, csak arra kell ügyelni, hogy a táblázat sorainak/oszlopainak nevét aszerint kell megválasztani, hogy mi szerepel táblázat főátlójában, AZAZ nem standard módon lesz a tábla értelmezve. ■

8. Steiner-rendszerek rekurzív leírásai

18. Tétel. Amennyiben léteznek v_1, v_2 pontú Steiner-rendszerek, akkor létezik $v_1 \cdot v_2$ pontú is.

Bizonyítás. Két bizonyítást is ismertetünk.

I. Bizonyítás. Tudjuk, hogy a H -n pontosan akkor létezik kommutatív, idempotens, Steiner-tulajdonságú művelet, ha létezik H -n Steiner-rendszer. Ha H_1, H_2 olyan halmazok, amelyekben létezik ilyen művelet, akkor a $H_1 \times H_2$ halmazon a komponensenkénti szorzás is ilyen művelet lesz (ez könnyen belátható), így létezik rajta Steiner-rendszer.

A második bizonyítás előtt kimondunk egy definíciót:

Definíció. Egy G gráf $K_{a_1, a_2, \dots, a_t}$ t -részes teljes gráf, ha $V(G) = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_t$, ahol A_i -k páronként diszjunktak, $|A_i| = a_i$, és $E(G) = \{\{x, y\} : x \in A_i, y \in A_j, i \neq j\}$.

II. Bizonyítás. A $v_1 \cdot v_2$ csúcsú G teljes gráf éleit fogjuk háromszögekbe osztályozni. Bontsuk fel G csúcsait v_2 db v_1 elemű csúcshalmazba. Ezeken a csúcshalmazokon belül az éleket külön-külön háromszögekbe tudjuk osztályozni, így elég maradék éleket, azaz G -nek $\underbrace{K_{v_1, v_1, \dots, v_1}}_{v_2 \times}$ részgráfján szintén háromszögekbe osztályozni az

éleket. Az összes ilyen v_1 csúcsú osztályt legyen $\{O_x\}_{x \in V_2}$, ahol V_2 egy v_2 elemű $\mathcal{S}_2$ Steiner-rendszer alaphalmaza. Ezek után mindegyik O_x osztályon belül adjunk a csúcsoknak indexet: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{v_1-1}$. Ha az O_x és O_y osztályból választunk egy-egy elemet, akkor a harmadik csúcs abban az O_z osztályban lesz, amire x, y, z hármast alkot $\mathcal{S}_2$ -ben. Ha az első kettő elemnek i, j volt az indexe, akkor a harmadiknak az a k szám lesz az indexe, melyre: $i + j + k \equiv 0 \pmod{v_1}$. Az ezeket a csúcsokat összekötő élek egy osztályba kerülnek. A definíciójából adódóan ez egy jó osztályozása lesz G éleinek, így létezik $v_1 \cdot v_2$ csúcsú Steiner-rendszer. ■

Kiemeljük, hogy a fenti bizonyítás során beláttuk az alábbi állítást.

19. Lemma. $\underbrace{K_{a, a, \dots, a}}_{v \times}$ élei háromszögekbe osztályozhatók, ha létezik v csúcsú Steiner-rendszer.

20. Állítás. Ha létezik v_1, v_2 pontú Steiner-rendszer, akkor létezik v ponton is, ahol

$$(a) \quad v = v_1 \cdot (v_2 - 1) + 1,$$

$$(b) \quad v = v_1 \cdot (v_2 - 3) + 3.$$

Bizonyítás. (a) Vegyünk egy v_2 csúcsú $\mathcal{S}_2$ Steiner-rendszert v_1 darab példányát úgy, hogy bármely kettő példány egy adott a csúcsban metszi egymást. Ekkor összesen $(v_1 \cdot (v_2 - 1) + 1)$ csúcsunk van. A v_2 elemű csúcshalmazokon belül az éleket $\mathcal{S}_2$ szerint definiáljuk. Vegyük észre, hogy az összes olyan élt magkaptuk, melyekben a szerepelhet, és most már csak olyan élek lehetnek a halmazrendszerben, amelyek v_2 elemű csúcshalmazok között mennek. Most hagyjuk el az a csúcsot, így kapunk v_1 db $v_2 - 1$ elemű diszjunkt csúcshalmazt. Az előző lemma miatt az ezeket a csúcshalmazokat összekötő kereszteleket háromszögekbe osztályozhatjuk.

Így sikerült a halmazrendszerben menő gráféleket háromszögekbe osztályozni, így létezik $(v_1 \cdot (v_2 - 1) + 1)$ elemű Steiner-rendszer.

(b) Vegyünk egy v_2 csúcsú $\mathcal{S}_2$ Steiner-rendszert v_1 darab példányát úgy, hogy bármely kettő példány egy adott T élben/csúcshármasban metszi egymást. Ekkor

összesen $(v_1 \cdot (v_2 - 3) + 3)$ csúcsunk van. T három csúcsa mindegyik más csúccsal együtt pontosan egy hármasban szerepel. A konstrukció befejezése ugyanaz mint előbb. ■

9. Steiner-rendszerek alaptételének bizonyítása

21. Állítás. $v \equiv 1, 6 \pmod{6} \Rightarrow$ létezik v pontú Steiner-rendszer.

Bizonyítás. Indirekt teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást

Amennyiben nem igaz az állítás, akkor létezik egy minimális v elemszámú halmaz, hogy $v \equiv 1, 3 \pmod{6}$, amelyen nincs Steiner-rendszer.

A v alapján két csoportra bonthatjuk a feladatot:

- $v = 6k + 3$: Erre korábban láttunk elemi konstrukciót, ami bármely k esetén működik.
- $v = 6k + 1$: Legyen $6k + 1 = 3 \cdot 2^l \cdot s + 1$, ahol s páratlan. $2^l \neq 6 \cdot m$, így $2^l \equiv 2, 4 \pmod{6}$. Így 2^l alapján is esetekre bontunk:
 - $2^l = 6 \cdot m + 2$: $v_1 := 2^l + 1$, $v_2 := 3 \cdot s$. Ilyenkor léteznek v_1, v_2 pontú Steiner-rendszerek, és $v_2 \cdot (v_1 - 1) + 1 = v$ miatt v elemű is.
 - $2^l = 6 \cdot m + 4$: $v_1 := 2^l \cdot s + 1$, $v_2 := 3$. Ebben az esetben a fentihez hasonlóan létezik Steiner-rendszer.

■