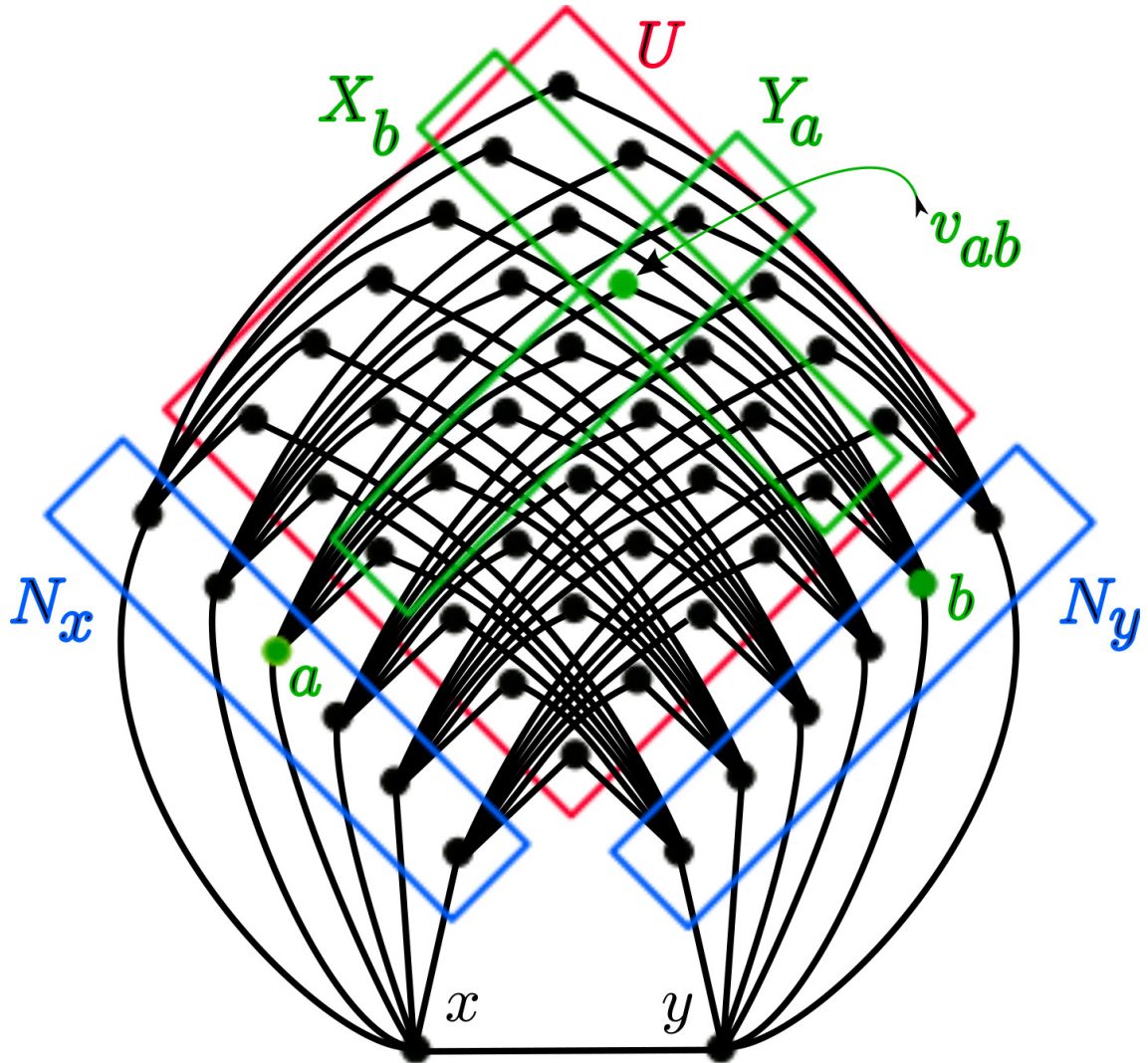


1. A Hoffman-Singleton gráf egy új nézete

Legyen $e = xy$ egy éle egy $(2,7)$ paraméterű Moore-gráfnak. Legyen N_x és N_y x y -től, illetve y x -től különböző szomszédainak halmaza. $|N_x| = |N_y| = 6$, sőt azonsítsuk N_x és $[6]$, illetve N_y és $[6]$ halmazokat. Még további 36 csúcsunk van. Ezeknek pontosan egy szomszédja esik N_x -be és pontosan egy N_y -ba. Fordítva is igaz: $a \in N_x$ és $b \in N_y$ esetén pontosan egy közös szomszéd van, ami az eddig el nem számolt 36 elemből kerül ki. Legyen ez a csúcs v_{ab} . A gráfunk csúcshalmaza

$$\{x, y\} \dot{\cup} N_x \dot{\cup} N_y \dot{\cup} \{v_{ab} : a \in N_x, b \in N_y\}.$$



1. ábra.

Legyen $U = \{v_{ab} : a \in N_x, b \in N_y\}$. Az U -n kívüli csúcsokra illeszkedő éleket látjuk. U -n belül egy 5-reguláris gráffal kell a leírást befejeznünk. Erről sok mindent ismerünk.

1. Lemma. (i) A $Y_a = \{v_{ab} : b \in N_y\}$ és $X_b = \{v_{ab} : a \in N_x\}$ halmazok függetlenek.

(ii) A $X_b = \{v_{ab} : a \in N_x\}$ és $X_{b'} = \{v_{ab'} : a \in N_x\}$ halmazok között vezető él egy párosítást adnak.

2. Lemma. Az X_b és $X_{b'}$ halmazok közötti párosítás szimmetrikus, azaz a $v_{xb}v_{x'b'}$ éllel együtt a $v_{x'b}v_{xb'}$ élnek is szerepelni kell. Szemléletesen a hat párosító él három „ X élpárként” valósul meg.

Bizonyítás. (Bizonyítás kezdemény) Legyen $v_{ab} \in U$ tetszőleges csúcs és $e = v_{ab}v_{cd}$ egy U -n belüli, rá illeszkedő él. v_{ab} meghatároz egy öt-hosszú C kört, amely csúcsai rendre v_{ab}, a, x, y, b . C és e egyértelműen meghatároz egy Petersen-gráfot (lásd a pentagon-pentagram származtatást). Hol vannak ezen Petersen-gráf hiányzó élei? ■

3. Feladat. Dolgozzuk ki a fenti lemmák bizonyításait.

Hiányzik az U -n belüli él leírása. Ez $X_b \equiv N_x$ halmaznak 15 párosítása, amelyek azonosítottak $\binom{N_y}{2}$ elemeivel. Ezt úgy kell megtennünk, hogy ne keletkezzen három-, illetve négy- hosszú kör teljes gráfunkban.

4. Lemma. A 15 párosítás választása pontosan akkor lesz megfelelő, ha a következők teljesülnek:

(i) i, j, k három különböző N_y -beli elem esetén $\{i, j\}$ és $\{j, k\}$ -hoz rendelt párosításoknak nincs közös éle.

(ii) i, j, k három különböző N_y -beli elem esetén $\{i, j\}$, $\{j, k\}$ és $\{k, i\}$ -hoz rendelt párosítások egy-egy éle nem alkot háromszöget.

(iii) i, j, k, ℓ négy különböző N_y -beli elem esetén $\{i, j\}$, $\{j, k\}$, $\{k, \ell\}$ és $\{\ell, i\}$ -hez rendelt párosítások egy-egy éle nem alkot négy hosszú kört.

5. Feladat. Igazoljuk az előző lemmát.

A párosítások konstrukciója trükkös, ezt a következő szekcióban írjuk le.

2. Komjugáltság S_n -ben

Definíció. Legyen G egy csoport. $h = g^{-1}xg$ az x csoportelem konjugáltja g -vel. Ha g hangsúlyozására nincs szükség, akkor azt mondjuk, hogy h és x konjugáltak.

6. Feladat. A konjugáltság ekvivalenciareláció G -n.

Ennek a feladatnak egy következménye, hogy G konjugáltsági osztályokba sorolható. Az 1 egységelem egy külön, egyelemű osztályt alkot.

S_n elemei permutációk. Minden π permutáció osztályozza az alaphalmazt (általában $[n]$ -et). Az osztályok a π által generált részcsoporthoz $(\{\pi^i : i \in \mathbb{Z}\} = \{\pi^i : i \in \mathbb{N}\})$

pályáinak (az x elem pályája $\{\pi^i x : i \in \mathbb{Z}\}$) halmaza. Minden pályán egy ciklikus átrendezésként hat π . π ciklus-struktúrája alatt azt értjük, hogy minden hosszúságra megadjuk hány ilyen hosszúságú ciklus van (hány ekkora pálya van). Ha i hosszú ciklusból μ_i van, akkor a struktúra $\langle 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} 3^{\mu_3} \dots \rangle$ (azon ciklushosszakat nem tüntetjük fel, amelyek nem fordulnak elő, azaz multiplicitásuk (jelölésben kitevőjük) 0). Az identitás permutáció ciklus-struktúrája $\langle 1^n \rangle$. $\langle 1^n \rangle$ ciklus-struktúrájú $\mathbb{S}_n$ -beli elem egyetlen egy van, az identitás. Az $\langle 1^{n-2} 2 \rangle$ típusú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük. $\langle 1^{n-2} 2 \rangle$ ciklus-struktúrájú $\mathbb{S}_n$ -beli elemről, azaz transzpozícióról $\binom{n}{2}$ van.

A $\mathbb{S}_n$ elemeinek ciklus-struktúrái azonosíthatók az n szám partícióival.

7. Feladat. g és h akkor és csak akkor konjugáltak, ha ciklus-struktúrájuk ugyanaz.

Azaz az n számpartíciói, $\mathbb{S}_n$ elemeinek ciklus-struktúrái, $\mathbb{S}_n$ csoportban a konjugáltság ekvivalenciareláció osztályai azonosíthatók.

8. Feladat. Írjuk fel $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ esetén a lehetséges ciklus-struktúrákat $\mathbb{S}_n$ -ben és adjuk meg, hogy hány elem rendelkezik ezzel a ciklus-struktúrával.

3. $\mathbb{S}_n$ automorfizmusai, belső és külső automorfizmusok

Definíció. Legyen $\mathbb{G}$ egy csoport. Ekkor minden g csoportelemre $\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$, $x \mapsto g^{-1}xg$ egy β_g automorfizmus $\mathbb{G}$ -nek. Az így kapott automorfizmusokat *belső automorfizmusoknak* nevezzük. A belső automorfizmusok $\text{Aut}(\mathbb{G})$ egy részcsoportját alkotják, amely részcsoportot $\text{Inn}(\mathbb{G})$ -vel jelöljük. Egy automorfizmus *külső*, ha nem belső.

9. Feladat. β_g akkor és csak akkor az identitás, ha g a $\mathbb{G}$ csoport centrumában van.

10. Feladat. $\mathbb{S}_n$ centruma triviális (csak az egységelemet tartalmazza), ha $n \geq 3$. Azaz ekkor $\text{Inn}(\mathbb{S}_n) \simeq \mathbb{S}_n$.

11. Feladat. $\text{Inn}(\mathbb{G}) \triangleleft \text{Aut}(\mathbb{G})$.

Definíció. $\text{Out}(\mathbb{G}) := \text{Aut}(\mathbb{G})/\text{Inn}(\mathbb{G})$ a $\mathbb{G}$ csoport külső-automorfizmuscsoportja.

Megjegyzés. Azaz a külső-automorfizmuscsoport NEM a külső automorfizmusok csoportja. A külső automorfizmusok NEM is alkotnak csoportot. Látjuk, hogy előfordul, hogy nincs külső automorfizmus, azaz a külső automorfizmusok halmaza üres. Ekkor a külső-automorfizmuscsoport a triviális, egyelemű csoport.

★

12. Lemma. Legyen α az $\mathbb{S}_n$ csoport egy automorfizmus. Legyen π és π' két azonos ciklus-struktúrájú csoportelem. Ekkor $\alpha(\pi)$ és $\alpha(\pi')$ ciklus-struktúrája is azonos.

Belső automorfizmusokra erősebb is igaz.

13. Lemma. $\mathbb{S}_n$ belső automorfizmusai megtartják az elemek a ciklus-struktúráját. Azaz $\mathbb{S}_n$ minden α belső automorfizmusára g és $\alpha(g)$ ugyanolyan ciklus-struktúrájú.

A fenti állítás megfordítása is igaz. Mi egy erősebb állítást mondunk ki.

14. Tétel. *Legyen α az S_n csoport egy automorfizmusa. Ha α megtartja a transzpozíciókat, akkor belső automorfizmus.*

15. Feladat. *Igazoljuk ezt.*

16. Feladat. S_n -et generálják a transzpozíciók.

17. Lemma. S_n automorfizmusai megtartják az elemek rendjét. Azaz S_n minden α automorfizmusára g és $\alpha(g)$ rendje megegyezik.

18. Feladat. *Legyen $g \in S_n$. Fejezzük ki g rendjét ciklus-struktúrája segítségével. Milyen ciklus-struktúrája van a másod-rendű elemeknek? Az egyes másod-rendű ciklus-struktúrák mögött hány csoport elem van?*

19. Tétel. *Ha $n \neq 6$, akkor $\text{Aut}(S_n) = \text{Inn}(S_n)$, azaz $\text{Out}(S_n) = 1$.*

★

A korábbiak alapján látjuk, ha S_6 -nek van külső automorfizmusa, akkor az felcseréli a transzpozíciókat ($\langle 1^4 2 \rangle$ típusú permutációkat) és a $\langle 2^3 \rangle$ típusú permutációkat.

20. Feladat. *Igazoljuk, hogy $\text{Out}(S_6) = 1$ VAGY $\text{Out}(S_6) = \mathbb{Z}_2$.*

21. Tétel. $\text{Out}(S_6) = \mathbb{Z}_2$, azaz S_6 -nak VAN külső automorfizmusa.

Ennek a ténynek „egyszerű” az igazolása, fel kell mutatni egy külső automorfizmust. Ennek felismerése igen komoly szellemi tevékenység. Az alábbiakban ezt ismertetjük egy általános módszert külső automorfizmusok felismerésére

★

S_5 felismerése mint S_6 részcsoportha egyszerű. Tegyük fel, hogy a permutált halmaz $[6]$. Ekkor $\text{Stab}(i)$ egy S_5 lesz minden $i \in [6]$ esetén. ($\text{Stab}_G(x)$ az x elem stabilizátora, azon $g \in G$ elemek halmaza, amikre $gx = x$, egy részcsoporth G -ben.)

Vannak azonban furcsa (másmilyen mint a fent leírt standard) előfordulásai ($S_5 \simeq R < S_6$) is S_5 -nek. Ha egy ilyet leírunk, akkor egy külső automorfizmushoz jutunk az alábbi módon. Vegyük R mellékosztályait. Ez egy 6 elemű $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz. $i = mR$ permutációk egy 120 elemű halmaza. Minden S_6 -beli g elem hat ezeken a permutációkon és egy mR mellékosztályt egy $g(mR) = (gm)R$ mellékosztályba visz. Azaz S_6 hat $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon.

22. Lemma. (i) *Ez a hatás effektív, azaz a fenti hatásból eredő $S_6 \rightarrow S_{\{1,2,3,4,5,6\}} \simeq S_6$ csoporthomomorfizmus izomorfizmus/automorfizmus.*

(ii) *Ha R egy elem stabilizátora, akkor ilyen módon egy belső automorfizmushoz jutottunk.*

(iii) *Ha R nem egy elem stabilizátora, akkor ilyen módon egy külső automorfizmus-hoz jutottunk.*

4. S_6 egy külső automorfizmusa I: $\mathcal{PG}(1, \mathbb{F}_5)$

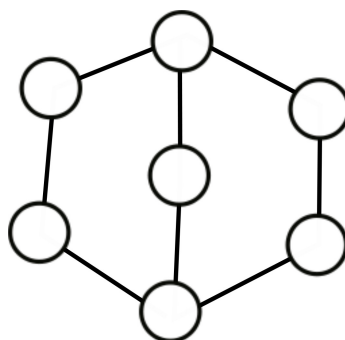
$\mathcal{PG}(1, \mathbb{F}_5)$ pontjainak halmaza $\{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$ vagy homogén koordinátákkal $\{(0 : 1), (1 : 1), (2 : 1), (3 : 1), (4 : 1), (1 : 0)\}$. Ezen a ponthalmazon hat $\mathbb{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$, amelynek $\frac{(5^2-1)(5^2-5)}{5-1} = 120$ eleme van.

23. Lemma. *Tetszőleges három különböző p, q, r pontra és három különböző p', q', r' pontra pontosan egy $g \in \mathbb{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$ elem létezik, amelyre $gp = p'$, $gq = q'$ és $gr = r'$.*

24. Tétel. *Ezen hatás effektív, csoportja S_5 , de nem egy csúcs stabilizátoraként hat.*

5. S_6 egy külső automorfizmusa II: Egy tologatós játék

Tekintsük a következő hét mezőből álló táblát, amelyen egy tologatós játékot játszunk.



2. ábra.

A középső helyet üresen hagyjuk, a kerületi helyekre a $0, 1, 2, 3, 4, \infty$ jeleket tartalmazó kavicsokat helyezzük el. Ezek után minden lépésben az üres mezőre tolhatunk egy vele szomszédos mezőn álló kavicsot. Ilyen lépések sorozatával elérjük, hogy újra a középső mező legyen üres. Így a kiinduló elhelyezés egy permutációját alakíthatjuk ki. A kialakítható elhelyezések S_6 egy részhalmaza, egy részcsoporthoz.

25. Tétel. (i) 120 darab kialakítható elhelyezés van.

(ii) A kialakítható elhelyezések részcsoporthoz S_5 -tel izomorf.

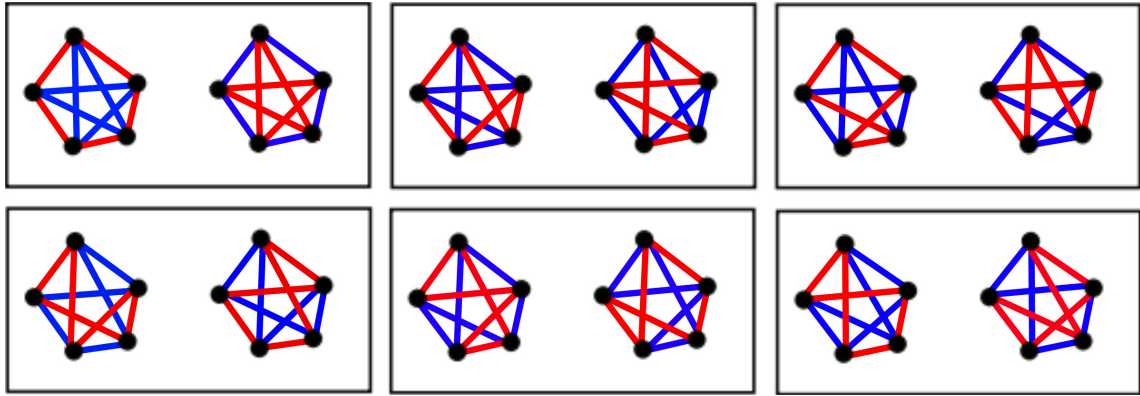
A fenti részhalmaz/részcsoporthoz megegyezik az előző pontban, $\mathbb{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$ hatásából eredő részhalmazzal/részcsoporthoz.

6. S_6 egy külső automorfizmusa III: K_5 Hamilton-körei

K_5 -nek $4!/2 = 12$ Hamilton-köre van, amelyek 6 komplementer párt alkotnak.

S_5 hat K_5 csúcsai és így a Hamilton-kör-párokon is. S_5 elemeit S_6 -be képeztük, amely leképezés nyilván csoporthomomorfizmus. Igazából S_5 izomorf a kép részcsoporthoz.

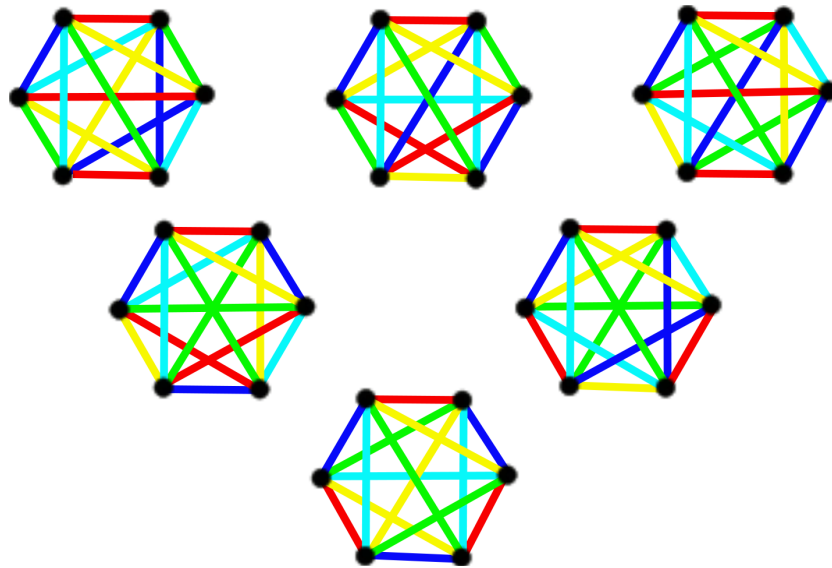
26. Lemma. *A fenti S_5 -tel izomorf részcsoporthoz nem egy elem stabilizátora.*



3. ábra.

7. S_6 egy külső automorfizmusa IV: K_6 élszínezései

K_6 -nak 6 csúcsa, 15 éle, $5 \cdot 3 = 15$ teljes párosítása és 6 élszínezése van (két élszínezés megegyezik, ha a három színosztály halmaza ugyanaz). A hat élszínezést az alábbiakban láthatjuk.



4. ábra.

S_6 hat a 6 csúcson és így a 6 élszínezésen. Ez a hatás effektív. S_6 -ot beágyasztuk a 6 élszínezés szimmetrikuscsoportjába.

27. Lemma. *Ez egy külső automorfizmus.*

8. S_6 egy külső automorfizmusa V: K_6 háromszög színezései

Színezzük ki a $\binom{6}{3} = 20$ háromszöget két színnel (csak a két színosztály számít) úgy, hogy a csúcs diszjunktak ugyanazt a színt kapják. Továbbá minden négy-klikkben

két háromszög legyen mindkét színből.

28. Feladat. *Soroljuk fel a lehetőségeket.*

S_6 permutálja K_6 csúcsait és így hat a háromszögeken is és permutálja a hat lehetséges színezést.

29. Feladat. S_6 hatása a hat színezésen effektív és az ebből nyert automorfizmus nem belső automorfizmus.

30. Feladat. Adjunk bijekciót K_5 komplementer Hamilton-körpárjai és a fenti háromszög színezések között.

9. S_6 egy külső automorfizmusa VI: Az ikozaéder

Vegyük az ikozaédert: 12 csúcsa 6 szemköztes párba sorolható. 30 éle 15 szemköztes élpárba sorolható. 20 lapja van.

A középpontos tükrözés alapján megfeleltetett szemköztes csúcsokat nevezzük el ugyanúgy (a neveink legyenek mondjuk 1, 2, 3, 4, 5, 6). A szemköztes élpárok ugyanazt a névpárt kötik össze. $\binom{[6]}{2}$ összes eleme előfordul összekötött élként (kétszeresen a szemköztes élpárok miatt). A 20 lap csúcshármasainak nevei az összes $\binom{[6]}{3}$ -beli hármas.

A fentiek alapján a K_6 -ról elmondott két konstrukció (élszínezések, háromszög színezések) „átvetíthetők” az ikozaéder nyelvezetére.

31. Feladat. *Végezzük el ezeket a nyelvi fordításokat.*

10. S_6 külső automorfizmusai és a Hoffman-Singleton gráf

S_6 külső automorfizmusai alapján leírható a Hoffman—Singleton-gráf. A leírást a fejezet elején elkezdtük. Érdemes ezt újból áttekinteni. Az ott szereplő U halmazon belüli 5-reguláris gráfot kell leírunk. Ezt már Higman is ismerte, de publikációja hiányzik az irodalomból.

Az U -n belüli élek $\binom{[6]}{2} = 15$ darab

$$M_{b'b} = M_{bb'} : [6] \equiv N_x \equiv X_b \rightarrow [6] \equiv N_x \equiv X_{b'}$$

permutációt írnak le.

32. Lemma. *A fenti leírt $M_{bb'}$ permutáció fixpont nélküli, sőt ciklus-struktúrája $\langle 2^3 \rangle$.*

Azaz a hiányzó élek leírásához az S_6 -beli transzpozíciókhoz kell $\langle 2^3 \rangle$ típusú S_6 -beli permutációkat rendelnünk.

33. Tétel. *Ha a hiányzó élek leírásához szükséges hozzárendelést egy külső automorfizmus alapján tesszük meg, akkor egy $(2, 7)$ paraméterű Moore-gráfhoz jutunk.*

Megfordítva egy $(2, 7)$ paraméterű Moore-gráfból kiolvastva a fenti hozzárendelést az egy külső automorfizmus megszorítását kapjuk a transzpozíciókra.