

A Hoffman—Singleton-gráf

Előadó: Hajnal Péter

2012.

1. Hoffman—Singleton-gráf

A $d = 7$ eset vizsgálatát Hoffman és Singleton végezte. Eredményük: létezik $(7, 2)$ paraméterű Moore-gráf, sőt a struktúra egyértelmű. A gráf a Hoffman-Singleton gráf. A definíció (és az elnevezés jogosságának bizonyítéka) azonban hosszú út végállomása.

Az alábbiakban feltesszük, hogy G egy $(7, 2)$ paraméterű Moore-gráf.

1. Lemma. (o) $|V(G)| = 50$, $|E(G)| = 175$.

(i) G egy erősen reguláris gráf $(7, 0, 1)$ paraméterekkel.

(ii) G -ben az öthosszú körök száma 1260.

(iii) G -ben a hathosszú körök száma 5250.

2. Feladat. Igazoljuk ezt.

3. Lemma. Legyen C egy öthosszú kör G -ben (csúcshalmaza legyen $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, élhalmaza legyen $\{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_0\}$). Legyen L_i a v_i csúcs nem C -re eső szomszédainak halmaza.

(i) Az L_i halmazok diszjunkt ötelemű halmazok, így $L := \cup_{i=0}^4 L_i$ egy 25 elemű halmaz. Legyen $P := V(G) - L$ (speciálisan $V(C) \subset L$).

(ii) Minden $x \in L_i$ csúcsnak legfeljebb két szomszédja van L -ben. Ezek $L_{i-2} \cup L_{i+2}$ -ba esnek. Sőt a két szomszéd közül legfeljebb egy esik L_{i-2} -be és legfeljebb egy esik L_{i+2} -be. Speciálisan minden $x \in L$ csúcsnak legalább öt szomszédja van P -ben.

(iii) Minden $x \in P - V(C)$ csúcsnak legfeljebb egy szomszédja esik minden L_i halmazba. Speciálisan minden $x \in P$ csúcsnak legfeljebb öt szomszédja van N -ben.

(iv) A fenti fokszám becslések mindegyike egyenlőséggel igaz. Azaz minden $x \in P$ csúcsnak pontosan öt szomszédja van L -ben. Minden $x \in L$ csúcsnak pontosan öt szomszédja van P -ben. Így $G|_P$ és $G|_L$ is 2-reguláris gráf. (Speciálisan C egy komponens $G|_P$ -ben.) Továbbá minden $x \in L_i$ csúcsnak pontosan egy szomszédja van L_{i-2} -ben és pontosan egy szomszédja van L_{i+2} -ben (további szomszéd nincs L -ben, így $G|_L$ minden körének hossza 5-tel osztható).

(v) G -ben háromféle öthosszú kör van: (1a) egyik éle P -ben van, négy éle pedig P - L él vagy P/L szerepét felcserélve ilyen. (1b) egy P -beli, két L -beli élt és két P - L élt tartalmaz, vagy P/L szerepét felcserélve ilyen. ((1a) és (1b) típusú körök a kereszt-körök). (2) mind az öt éle teljesen P -ben vagy L -ben halad (oldal-körök); Továbbá 1250 darab kereszt-kör van.

(vi) $G|P$ és $G|L$ is öt komponensű gráf, amelyben minden komponens öthosszú kör. Legyen C_P és C_L egy-egy tetszőleges komponens $G|P$, illetve $G|L$ -ből. Ekkor $V(C_P) \cup V(C_L)$ egy Petersen-gráfot feszít.

4. Feladat. Bizonyítsuk be a fenti lemmát.

Definíció. P öthosszú köreit *pentagonoknak* nevezzük. L öthosszú köreit *pentagramoknak* nevezzük. Az elnevezés függ attól, hogy melyik öthosszú körből indultunk ki. Bármelyik pentagon bármelyik pentagrammal együtt egy Petersen-gráfot határoz meg (fenti lemma (vi) pontja).

A fenti lemma gráfunkat (egy tetszőleges öthosszú kör alapján) két oldalra bontja (P és L), továbbá leírja a két oldal által feszített részt. Mielőtt tovább megyünk néhány megjegyzést teszünk.

Megjegyzés. A kiinduló C öthosszú körünk végül elvezet tíz darab öthosszú körhöz (ezek egyike C maga). Ha ezen tíz kör bármelyikét vesszük és a lemma eljárását alkalmazzuk ugyanehhez a tíz körhöz és két oldalra történő partícióhoz jutunk. Azaz G 1260 darab köre 126 darab tízes csoporthoz, 126 darab oldalakra történő felbontáshoz vezet.

Speciálisan, ha egy pentagramból indulunk ki, akkor az pentagonként lesz azonosítva. A tíz kör a kiinduló tíz kör lesz, de a pentagon/pentagram fogalom felcserélődik.

Megjegyzés. A fenti lemmából kiolvasható, ha C egy öthosszú kör és e egy C -hez nem tartozó él, ami C egy csúcsát köti össze egy C -n kívüli csúccsal, akkor pontosan egy Petersen részgráf van G -ben, amely tartalmazza C -t és e -t is.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy G -ben 525 darab Petersen részgráf van.

Következő lépésünk a két oldal közötti élek leírása.

A továbbiakban P elemeit pontoknak nevezzük (25 darab pontunk van), L elemeit dőlt egyeneseknek nevezzük. Továbbá $G|P$ minden komponensére úgy hivatkozunk mint egy-egy függőleges egyenes (azaz összesen 30 darab egyenesünk van). Definiálunk egy illeszkedési relációt is a pontok és egyenesek között: Egy pont és egy dőlt egyenes akkor és csak akkor illeszkedik, ha szomszédosak (csúcsként G -ben). Egy pont és egy függőleges egyenes pontosan akkor illeszkedik, ha a pont hozzátartozik a függőleges egyenessel azonosított $G|P$ -beli komponenshez.

6. Lemma. A fent leírt struktúra egy 5 paraméterű affin sík. Továbbá G_N öt komponensének megfelelő egyenes ötös egy-egy párhuzamos egyenessereg. A hatodik párhuzamos egyenessereg a függőleges egyeneseknek nevezett sereg.

7. Feladat. Igazoljuk a lemmát.

Ha elfogadjuk, hogy 5 paraméterű affin sík egyetlen egy van (izomorf $\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_5)$ -tel), akkor egyértelműen leírtuk az P és L közti éleket és viszonyukat $G|P$, illetve $G|L$ komponenseinek csúcshalmazaihoz. Ahhoz, hogy magunk előtt lássuk a Hoffman—Singleton-gráfot csak össze kell rakni az affin sík illeszkedési gráfját és az oldalakon lévő tíz darab öthosszú kört. Igazából már láttuk, hogy az affin illeszkedés meghatározza az oldalakon lévő komponensek pontthalmazát. A kérdés ezeken hogyan hurkolódnak az körök. A korábbiakból az is kiolvasható, hogy elég egy függőleges egyenes pontjain meghatározni az összekötő öthosszú kör éleit. Célunk annak belátása, hogy ez kétféle módon tehető meg.

Definíció. $\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_5)$ egyenestartó transzformációi között vegyük azokat, amelyek a függőleges egyenesek pontjait belül permutálják, egyenesek irányát megtartják és nincs fixpontjuk. Az ilyeneket nevezzük körbeállítónak.

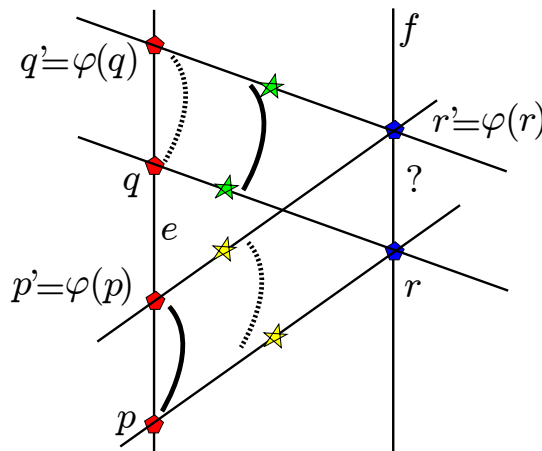
Észrevétel. $\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_5)$ -ben négy körbeállító leképezés van. Mind a négy egy függőleges egyenes öt pontját egy öthosszú ciklusban permutálja. Kettő-kettő esetén a ciklus irányítatlan élei ugyanazok, csak a leképezés iránya különböző. Az azonos irányítatlan ciklusokhoz vegyünk egy-egy reprezentánst: φ_0 és φ_1 . Legyen két körbeállító leképezés irányítatlan ciklusa e pontjain $C_0(e)$, illetve $C_1(e)$. A két különböző irányítatlan ciklus egymás él-komplementere.

Valóban, $(x, y) \mapsto (x, y + c)$ alakú transzformációk, ahol $c \in \mathbb{F}_5^*$ megfelelőek és más nincs.

8. Lemma. *A HoS gráfban ismerjük fel egy $P \cup L$ felbontást, a köztük lévő affin sík incidencia gráfját és az oldalakon a komponens-struktúrát. Ekkor egy e függőleges egyenes pontjain haladó öthosszú kör csak a fenti két ciklus ($C_0(e)$, $C_1(e)$) közül valamelyik élhalmaza lehet.*

Bizonyítás. Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel φ minden függőleges egyenes pontjait egymás között permutálja, az egyenesek irányát megtartja, nincs fixpontja. Továbbá p, q olyan e függőleges egyenesre illeszkedő pontok, hogy $\varphi(p) = p'$, $\varphi(q) = q'$, pp' él, míg qq' nem él.

Legyen f egy másik függőleges egyenes és r egy rá illeszkedő pont, ahol $\varphi(r) = r'$ (ekkor r' is illeszkedik f -re).



1. ábra.

Ekkor pr és $p'r'$ egyenesek egy párhuzamos egyenessereghez tartoznak (ugyanazon L_i elemei). Hasonlóan qr és $q'r'$ egyenesek egy párhuzamos egyenessereghez tartoznak (ugyanazon L_j elemei, sőt $i \neq j$). A p és p' egy pentagon összekötött csúcsai. pr és $p'r'$ ugyanazon pentagramban p , illetve p' szomszédai. Így szükségszerűen NEM összekötöttek. Hasonlóan q és q' egy pentagon NEM összekötött csúcsai. qr és $q'r'$ ugyanazon pentagramban p , illetve p' szomszédai. Így szükségszerűen összekötöttek.

Vajon r és r' összekötött-e? A fenti gondolatmenet kétszeri elismétlésével következtethetünk pr és $p'r'$ összekötöttségére, illetve qr és $q'r'$ összekötöttségére. Valamelyik következtetés ellentmondáshoz vezet, ami az állítást igazolja. ■

Ezekután két lehetőségünk van egy affin sík P oldalán az egyik függőleges egyenes pontjaira ráilleszteni HoS megfelelő oldal-körét. Mindkét lehetőség meg is megvalósítható van.

9. Lemma. Vegyük egy $P \cup L$ halmazon ($|P| = |L| = 25$) az affin sík pont/dölt egyenes illeszkedési gráfját (benne P osztályozásával és L szétbontásával párhuzamossági osztályokra). Legyen φ_i bármelyik körbeállító leképezés, és ennek $C_i(e)$ köre alapján indexeljük e pontjait: v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 és húzzunk be éleket úgy, hogy a v_i pont két (e -re eső) szomszédja v_{i-1} és v_{i+1} legyen.

A dölt egyenesek mindegyik párhuzamossági osztályán belül indexelhetünk az e -vel vett metszéspont indexével. Egy párhuzamosságiosztályban két gyenes akkor összekötött, ha az indexelés szerint MÁSODszomszédosak.

Bármelyik nem függőleges irányú, párhuzamos egyenessereg ezt a ponthalmazt egy-egy elembe metszi, így az indexelés átvethető az ehhez tartozó öt egyenesre.

Hasonlóan mindegyik dölt egyenessereg indexelése mindegyik függőleges egyenesre visszavetíthető és az ottani pontokat körszerűen rendezi.

(i) Ekkor egy $(7, 2)$ paraméterű Moore-gráfot kapunk.

(ii) φ_i kétféle választása izomorf gráfokhoz vezet.

Fordítva:

10. Lemma. Legyen HoS egy tetszőleges HoS gráf. Ismerjük fel benne pontjainak egy $P \cup L$ kettéosztását és közte az affin sík pont/dölt egyenes illeszkedési gráfját (benne P osztályozásával és L szétbontásával párhuzamossági osztályokra). Vegyük azt a φ körbeállító leképezést, amely egy választott e egyeneshez azt a $C(e)$ kört rendeli, ami meg is valósul a HoS élein keresztül. A kör, illetve az élek alapján indexeljük e pontjait: v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 , ahol az indexelést (modulo 5) értjük és úgy választjuk, hogy a v_i pont gráfbeli két szomszédja pontosan v_{i-1} és v_{i+1} .

Bármelyik nem függőleges irányú, párhuzamos egyenessereg ezt a ponthalmazt egy-egy elembe metszi, így az indexelés átvethető az ehhez tartozó öt egyenesre.

Hasonlóan mindegyik dölt egyenessereg indexelése mindegyik függőleges egyenesre visszavetíthető és az ottani pontokat körszerűen rendezi.

Ekkor

(i) Minden dölt irányra a megfelelő egyenesek $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ indexelése olyan, hogy ℓ_i pontosan ℓ_{i-2} -vel és ℓ_{i+2} -vel összekötött közülük.

(ii) Minden f függőleges egyenes pontjain az öt dölt irányból nyert öt körszerű rendezés ugyanaz, megegyezik $C_i(f)$ kör szerinti rendezéssel. Továbbá az élek a rendezésben szomszédos csúcsok között haladnak.

Ez a lemma azt állítja, hogy bármelyik HoS gráfot vesszük is ez ugyanaz lesz mint az a gráf, amit az előző lemmában kétféleképpen is leírtunk. Ezek után HoS nem csak bizonyos tulajdonságokkal rendelkező gráfosztály egy eleme, hanem egy jól definiált gráf-izomorf-típus.

11. Feladat. $|\text{Aut}(HoS)| = 252,000$.