

1. Ramsey-számok

Definíció. Legyen $Ram(G) = \max\{\omega(G), \alpha(G)\} = \max\{\omega(G), \omega(\overline{G})\}$, azaz a legnagyobb halmaz mérete G -ben ami független vagy klikk.

Egy alternatív leírás: Egy csúcshalmazt *homogénnek* nevezünk, ha klikk vagy független. $Ram(G)$ a legnagyobb homogén halmaz mérete. Nyilván G és $\overline{G}$ homogén halmazai ugyanazok, speciálisan $Ram(G) = Ram(\overline{G})$.

Definíció. Legyen $R(k)$ az a minimális n csúcsszám, amely esetén minden n pontú egyszerű G gráfra $Ram(G) \geq k$. Az $R(k)$ számok a *Ramsey-számok*.

Vegyük észre, hogy a Ramsey-számokat egy számhalmazban előforduló minimumként definiáltuk. Könnyű látni, hogy ebben a számhalmazban benne van ν és $\nu < N$, akkor N is benne van. Azonban az is elképzelhető, hogy számhalmazunk az üreshalmaz. Ekkor az üreshalmaz elemeinek minimumára a formális definíció ∞ lenne. Ramsey híres tétele azt állítja, hogy ez nem lehetséges.

1. Tétel (Ramsey).

$$R(k) \leq 4^k.$$

Persze ez a tétel csak egy durva felső becslés. Esetleg nagyságrendileg is helytelen. Erdős Pál a valószínűségszámítási módszer egy egyszerű alkalmazásával mutatta meg, hogy az $R(k)$ számok exponenciális növekedésűek.

2. Tétel (Erdős Pál). $k \geq 2$ esetén

$$R(k) \geq \sqrt{2}^k.$$

A legtermészetesebb bizonyítás az lenne, hogy leírunk/konstruálunk egy $\sqrt{2}^k$ pontú gráfot és ellenőrizzük, hogy nincs benne k elemű homogén halmaz. Erdős bizonyítása nem így megy. Sőt mind a mai napig nem ismert a fenti utat követő „természetes” bizonyítás (annak ellenére, hogy sokan szeretnének ilyet látni). Erdős bizonyítása az, hogy felvesz egy $\sqrt{2}^k$ elemszámú csúcshalmazt és minden csúcspárra feldob egy érmét: ha fej, akkor összeköti őket, ha írás, akkor nem. Az így kialakít egy gráfot, majd azt mondja „fogadjunk, hogy nincs benne k elemű homogén halmaz”. Pozitív a valószínűsége, hogy a fogadást megnyerje. (Ez némi számolást igényel.) Így a tétel igazolást nyer.

Hasznos a fenti fogalom aszimmetrikus változatát is bevezetni.

Definíció. Legyen $R(k, \ell)$ az a minimális n csúcsszám, amely esetén minden n pontú egyszerű G gráfra $\omega(G) \geq k$ vagy $\alpha(G) \geq \ell$. Az $R(k, \ell)$ számokat is Ramsey-számokként hivatkozzuk.

Természetesen $R(k) = R(k, k)$. Az aszimmetrikus változatot Erdős—Szekeres vezette be, hogy Ramsey felső becslésénél egy kissé jobb eredményt érjen el.

3. Tétel (Erdős Pál—Szekeres György). (i) $R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1)$,
(ii) $R(k) \leq \binom{2k-1}{k-1} < 4^k$.

Megjegyezzük, hogy a fenti alapbecslések $(\sqrt{2}^k) < R(k) < 4^k$, az exponenciális függvények között mind a mai napig a legjobb becslések.

★ ★ ★

A fenti fogalmak máképp is megfogalmazhatók. Az alapprobléma szimmetrikus a $G, \overline{G}$, gráf-komplementer gráfpárra. Ennek látványos vizualizálása, ha G éleit pirosra, a komplementer éleit kékre festjük. Így a teljes gráf egy piros-kék élszínezésével dolgozunk. A klikkek piros monokromatikus csúcshalmazok (a halmazon belül minden él piros). A független csúcshalmazok kék monokromatikus csúcshalmazok. Az új nyelv alapján a fenti Ramsey-számok tovább általánosíthatók több szín vizsgálatával. Mi csak egy speciális esetet írunk le.

Definíció. Legyen $R(k, \ell, m)$ az a minimális n csúcsszám, amely esetén az n pontú teljes gráf minden piros-kék-zöld élszínezésére garantáltan található k elemű piros-monokromatikus, vagy ℓ elemű kék-monokromatikus, vagy m elemű zöld-monokromatikus ponthalmaz.

2. Ramsey-gráfok

Ramsey-gráfok olyan „nagy” pontszámú gráfok, amelyek nem tartalmaznak k elemű homogén halmazt. (Aszimmetrikus változatban: „nagy” pontszámú gráfok, amelyek nem tartalmaznak sem k elemű független halmazt, sem ℓ elemű klikket.) Ezek közül a legnagyobbak az $R(k) - 1$ pontszámúak. Sajnos a Ramsey-számoknak csupán kevés értéke ismert. Így a Ramsey-gráf fogalmat általában a fenti, matematikailag nem pontos értelemben használjuk.

A jól ismert $R(3) = 6$ állítás egyik része, hogy $R(3) > 5$. Azaz öt csúcsú gráfok közt van olyan, amelyre $Ram(G) \leq 2$. Ezt az öt hosszú kör mutatja: nem tartalmaz se három elemű klikket, se három elemű független ponthalmazt.

4. Feladat. *Lássuk be, hogy ez az egyetlen öt csúcsú gráf, ami megfelel a fentieknek.*

Ez az öt pontú gráf nagyon szimmetrikus.

Ez azért is érdekes, mert az általános $R(k) > \sqrt{2}^k$ egyenlőtlenség bizonyítása a véletlen gráfokon alapul. Tehát Erdős módszere Ramsey-gráfok leírására az volt, hogy egy nagy (de nem túl nagy) ponthalmazon vette a standard véletlen gráfot. Beláttuk, hogy $\mathbb{P}_{G \in \mathcal{G}_n}(|Aut(G)| = 1) \rightarrow 1$. Azaz Erdős módszere egy olyan gráfot ad, aminek semmilyen szimmetriája nincs. Ennek ellenére ezen legegyszerűbb példán az (egyértelmű) extrémális gráf nagy szimmetriával rendelkező gráf. Ez nem egyedüli eset.

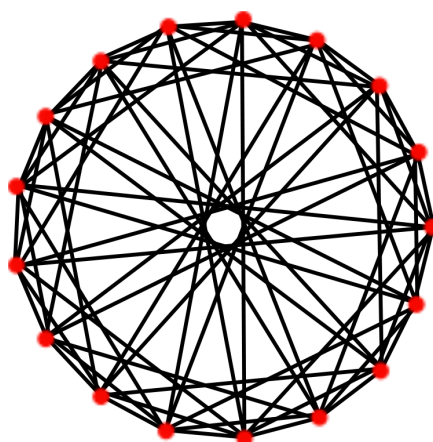
5. Feladat. *Mutassunk egy gráfot, amely az $R(3, 4) > 8$ egyenlőtlenséget igazolja.*

6. Feladat. *Igazoljuk, hogy $R(3, 4) = 9$.*

7. **Feladat.** *Igazoljuk, hogy $R(3, 5) > 13$.*
8. **Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 5) = 14$.*
9. **Feladat.** *Igazoljuk, hogy $R(3, 6) > 17$.*
10. **Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 6) = 18$.*

3. Paley-gráfok

Definíció. Legyen q egy prímszám, amely 4-gyel osztva 1 maradékot ad. P_q a q paraméterű Paley-gráf csúcshalmaza $\mathbb{F}_q$. Két csúc, x és y akkor és csak akkor van összekötve, $x - y$ négyzetszám. (Az oszthatósági feltétel ekvivalens azzal, hogy -1 négyzetszám, azaz a fenti összekötöttség szimmetrikus tulajdonság.)



1. ábra. P_{17}

11. **Lemma.** *Legyen $q = 4k + 1$ prímszám. Ekkor*

- (i) $|V(P_q)| = q = 4k + 1$,
- (ii) P_q $2k$ reguláris,
- (iii) P_q erősen reguláris gráf $2k, k - 1, k$ paraméterekkel,
- (iv) P_q pottranzitív.

12. **Lemma.** *A q pontú teljes gráf élhalmaza két diszjunkt osztályra osztható úgy, hogy mindkettő P_q -val legyen izomorf.*

Bizonyítás. Legyen g egy nem-négyzetszám elem $\mathbb{F}_q$ -ban. Ekkor a g -vel való szorzás permutálja a csúcsokat, P_q éleit éppen nem-élekbe viszi. ■

A fenti tulajdonságot „ön-komplementerséggént” is kifejezhetjük. Ezzel a nyelvezettel P_q egy ön-komplementer gráf.

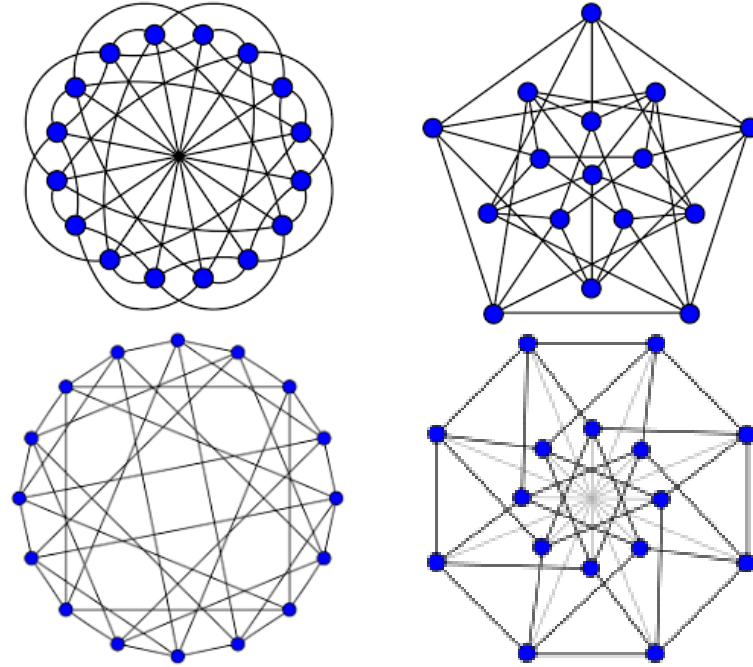
13. **Tétel.** $R(4) > 17$.

Bizonyítás. Ellenőrizni kell, hogy a P_{17} gráfban nincs négy elemű klikk. ■

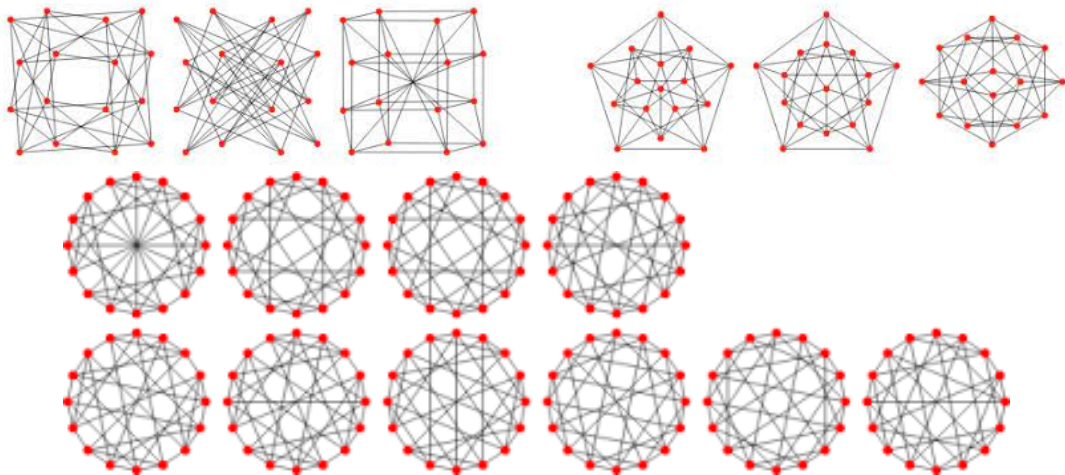
14. **Feladat.** *Igazoljuk, hogy $R(4) = 18$.*

4. Clebsch-gráf

A Clebsch-gráf, $C\ell$ egy 16 pontú 5-reguláris gráf. Az alábbi ábrákon ennek lerajzolásai láthatók.



2. ábra. A Clebsch-gráf négy lerajzolása

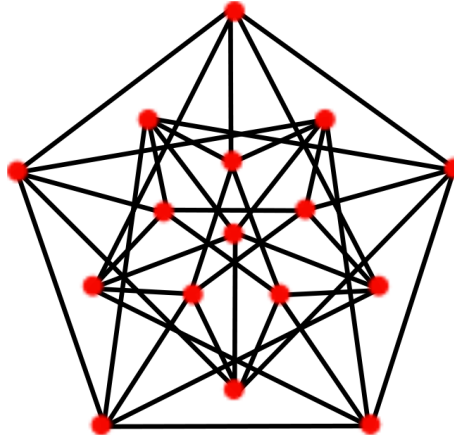


3. ábra. A Clebsch-gráf további lerajzolásai

A Clebsch-gráf legegyszerűbb definíciója az alábbi.

Definíció. $C\ell$ legyen az az egyszerű gráf, amely csúcsai az $[5]$ páros elemszámú részhalmazai. Két csúcspontosan akkor összekötött, ha a reprezentált két részhalmaz szimmetrikus differenciája négyelemű.

15. Lemma. (i) $|V(C\ell)| = 16$,



4. ábra. A Clebsch-gráf

(ii) Cl 5-reguláris,

(iii) 5, 0, 2 paraméterekkel erősen reguláris gráf,

(iv) G ponttranzitív.

Az eredeti definícióval ekvivalens leírások:

- (a) A 4-dimenziós hiperkockához hozzáadjuk a szemköztes csúcsokat összekötő éleket.
- (b) Az 5-dimenziós hiperkocka szemköztes csúcsait azonosítjuk.
- (c) $\mathbb{F}_{16}$ elemein definiálunk egy gráfot: két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha különbségük köbszám.

16. Feladat. Igazoljuk, hogy a fenti három konstrukció a Clebsch-gráfot írja le.

17. Lemma (Greenwood—Gleason). K_{16} élhalmaza három Clebsch-gráf diszjunkt példányára partícionálható.

Bizonyítás. K_{16} csúcsai legyenek $\mathbb{F}_{16}$ elemei. $\mathbb{F}_{16}^*$ egy ciklikus csoport. Legyen g egy generáló eleme, azaz $\mathbb{F}_{16}^* = \{1, g, g^2, g^3, \dots, g^{14}\}$ ($g^{15} = 1$). Pontosan azok a nem-nulla köbszámok, amelyek kitevője hárommal osztható. K_{16} éleit színezzük ki három színnel. Az xy él színe legyen $x - y = g^j$ esetén j osztási maradéka hárommal. (Azaz, a három szín: 0, 1 és 2). A definíció korrekt hiszen $y - x = (-1) \cdot (x - y) = x - y$ egy 2-karakterisztikájú testben.

Az utolsó alternatív definíció alapján a 0 színű élek egy Clebsch-gráfot adnak. A csúcshalmazon g -vel való szorzás és g^2 -tel való szorzás egy-egy permutációt ad, amelyek a 0 színű élek részgráfját az 1, illetve 2 színű élek halmazába viszi. Speciálisan minden színosztály egy Clebsch-gráfot ad. Ez az állítást igazolja. ■

18. Következmény. $R(3, 3, 3) > 16$.

Bizonyítás. Vegyük a fenti bizonyításban szereplő K_{16} gráf élszínezést három színnel. Csak azt kell észrevenni, hogy a Clebsch-gráfban nincs háromszög, azaz nem lesz monokromatikus háromszög. ■

19. Feladat. Igazoljuk, hogy $R(3, 3, 3) = 17$.