

1. Gráfok automorfizmusainak csoportja

A szimmetria, szimmetrikus szavakat a mindennapi életben is használjuk. Az ilyen esetekben a megfelelő matematikai fogalom nem fedi a szokásos értelmezést (nem is fedheti, hiszen a szokásos értelmezés szubjektív, általában a történelem során át is alakul). Az alábbiakban a gráfstruktúra esetén említünk meg néhány próbálkozást a fogalom matematikai megragadására.

Definíció. Legyen G és H két egyszerű gráf. Egy $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ leképezés izomorfizmus, ha bijekció és u, v csúcsok akkor és csak akkor szomszédosak, ha a $\varphi(u), \varphi(v)$ csúcsok is. Ha a G és H két egyszerű gráf között létezik izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy a két gráf izomorf, jelölésben $G \simeq H$.

1. Feladat. Írjuk le (eddiggi tanulmányaink alapján tippeljük meg a) gráfok közötti izomorfizmus fogalmát. Írjuk le turnamentek, halmazrendszerek, hipergráfok izomorfizmus fogalmát.

Könnyű látni, hogy az izomorfizmus reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonság. Van azonban egy halmazelméleti probléma. Már az egy-elemű halmazok sem alkotnak halmazt (nincs olyan halmaz, amely elemei pontosan az egy egyelemű halmazok). Így a gráfok (akár az egy pontú gráfok sem) alkotnak halmazt. Így az izomorfizmus nem egy reláció (legalábbis nem az „összes gráf felett”), hiszen egy relációhoz kell egy alaphalmaz. Ennek ellenére, aki nem teljesen naív tárgyalását tanulta a halmazelméletnek az tudja, hogy a véges gráfok izomorfia osztályai bevezethetők és egy megszámlálhatóan végtelen halmazt alkotnak. Az n pontú egyszerű gráfok izomorfizmusainak halmazát $\mathcal{G}_n$ -nel jelöljük.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy izomorf gráfoknak ugyanannyi csúcsa, éle van. Sőt a fokszám-sorozatuk megegyezik. Sőt mindkettőnek ugyanannyi R gráffal izomorf részgráfja, illetve R -rel izomorf feszített részgráfja van.

3. Feladat. Hány eleme van a $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4, \mathcal{G}_5, \mathcal{G}_6$ halmazoknak? Soroljuk is fel elemeiket. Ezek között, hány izomorfizmusban van m él?

4. Feladat. Legyen $a_{n,m}$ az n csúcsú m élű egyszerű gráfok izomorfizmusainak száma. Igazoljuk, hogy ezek a számok fix n esetén szimmetrikusak, azaz $a_{n,m} = a_{n, \binom{n}{2} - m}$. Igaz-e, hogy $a_{n,m}$ számok között fix n esetén a legnagyobb $a_{\lfloor \frac{1}{2} \binom{n}{2} \rfloor}$ szám? Igaz-e, hogy $a_{n,m}$ számok fix n esetén $m \in [0, \frac{1}{2} \binom{n}{2}]$ monoton növekednek?

Definíció. Legyen G egy (egyszerű) gráf. $\text{Aut}(G)$ tartalmazza a gráf automorfizmusait (önmagára történő izomorfizmusait), amelyek a kompozícióra nézve csoportot alkotnak. $\text{Aut}(G)$ a G gráf automorfizmuscsoportja.

5. Feladat. Defináljuk egy turnament, halmazrendszer, hipergráf automorfizmus-csoportját.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $G \in \mathcal{G}_5$ esetén $\text{Aut}(G) \simeq 1$.
Adjunk meg egy $G \in \mathcal{G}_6$ gráfot, amelyre $\text{Aut}(G) \neq 1$.

7. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges T turnament esetén $\text{Aut}(T)$ nem páros elemszámú.

Egyszerű gráf esetén az automorfizmuscsoport az $S(V)$ (a csúcshalmaz feletti szimmetrikus csoport, azaz V összes permutációját tartalmazó csoport) egy rész-csoportja. Egy adott V csúcshalmazon a teljes és az üres gráf az egyetlen, amely esetén $\text{Aut}(G) = S(V)$. $\text{Aut}(G)$ „gazdagsága” (például nagy elemszáma) jelentheti a G gráf „nagy fokú” szimmetriáját.

Definíció. G ponttranzitív/csúcstranzitív, ha $\text{Aut}(G) \leq S(V)$ tranzitív, azaz tetszőleges u, v csúcsokra van olyan φ automorfizmus, aminél u képe v .

8. Feladat. Az öt pontú egyszerű gráfok között a teljes és az üres gráf automorfizmus csoportja S_5 . A többi gráf között az öt hosszú kör az egyetlen csúcstranzitív gráf.

9. Feladat. Legyen G egy csúcstranzitív gráf. Igazoljuk, hogy tetszőleges F független csúcshalmazára és K klikkjére $|F| \cdot |K| \leq |V|$.

Igaz-e ez a regularitás feltétel mellett?

Azt is mondhatjuk, ha a G gráfban élünk és csak a csúcsok összekötéseit látjuk (sétálhatunk a gráfban és így megismerhetjük), akkor nem tudunk semmit sem mondani az aktuálisan elfoglalt csúcsról, az $V(G)$ tetszőleges eleme lehet.

Definíció. Éltranzitivitás fogalma hasonlóan definiálható.

Legyen φ a G gráf egy automorfizmusa. Nyilvánvaló, hogy $d(\varphi(x)\varphi(y)) = d(x, y)$, ahol d a gráf-távolság, azaz a két csúcs közötti legrövidebb út hossza.

Definíció. G távolság tranzitív, ha $d(x, y) = d(x', y')$ esetén van olyan φ automorfizmusa G -nek, amelyre $\varphi(x) = x'$ és $\varphi(y) = y'$.

Definíció. Egy G gráf t -tranzitív, ha minden $x_1, x_2, \dots, x_t \in V$ és $x'_1, x'_2, \dots, x'_t \in V$ esetén, ha $d(x_i, x_j) = d(x'_i, x'_j)$ (tetszőleges $i, j \in [t]$ -re), akkor $x_i \mapsto x'_i$ (tetszőleges $i \in [t]$ -re) kiterjeszthető egy automorfizmussá.

Definíció. Egy G gráf ultrahomogén gráf, ha tetszőleges $U, U' \subset V$ esetén, ha $\varphi : U \rightarrow U'$ bijekció izomorfizmust létesít $G|_U$ és $G|_{U'}$ között, akkor φ kiterjeszthető G egy automorfizmussá.

2. Fokok, regularitás

Ha csak egy helyben állhatunk, akkor az ott összefutó éleket látjuk. A globális gráfról csak az aktuális helyünk (egy csúcs) foka, amit érzékelünk/kiszámolhatunk. Ha minden csúcsban ugyanazt a fokot látjuk, akkor az is egy fajta (igen alacsony fokú) szimmetria.

Definíció. Egy G gráf reguláris, ha minden csúcsának foka ugyanaz. Ha a fokszámok közös d értékét hangsúlyozni szeretnénk, akkor azt mondjuk, hogy G d -reguláris.

Egy jóval kifinomultabb szimmetria fogalmat írunk le a következő definícióban.

Definíció. Egy G gráf erősen reguláris, ha minden csúcsnak ugyanaz a foka (d), minden összekötött csúcspárnak ugyanannyi közös szomszédja van (d_1) és minden össze nem kötött csúcspárnak ugyanannyi közös szomszédja van (d_0). Ha az említett paramétereket hangsúlyozni szeretnénk, akkor erősen (d, d_1, d_0) -reguláris gráfról beszélünk.

Vegyük észre, hogy (megszokások miatt) a fokszámok felsorolásánál a regularitás fokát d_1 követi, majd végül d_0 következik.

10. Feladat. Igazoljuk, hogy a teljes-, üres-, teljes kiegyensúlyozott k -részes gráf és komplementere, C_5 , a Petersen-gráf, a Petersen-gráf komplementere, $L(K_{3,3})$ és ennek komplementere erősen reguláris gráfok. Mik a paramétereik?

11. Feladat. Legyen G egy erősen reguláris gráf. Igazoljuk a következőket:

- (i) $\overline{G}$ is erősen reguláris.
- (ii) Ha G nem összefüggő akkor minden komponense ugyanakkora teljes gráf.
- (iii) Ha G összefüggő, akkor teljes gráf, vagy 2 átmérőjű.

A teljes kiegyensúlyozott k -részes gráfokat és komplementereit triviális erősen reguláris gráfoknak nevezzük. Minden nemtriviális erősen reguláris gráf „érdekes”. Központi alapkérdés, hogy milyen (n, d, d_1, d_0) számnégyesekre van n pontú (d, d_1, d_0) paraméterű nemtriviális erősen reguláris gráf. Erre a kérdésre adnak részleges válaszokat az alábbi feladatok.

12. Feladat. Tegyük fel, hogy G egy n pontú erősen reguláris gráf (d, d_0, d_1) paraméterekkel. Igazoljuk, hogy ekkor

$$d(d - d_1 - 1) = (n - d - 1)d_2.$$

13. Feladat. Tegyük fel, hogy G egy n pontú erősen reguláris gráf (d, d_0, d_1) paraméterekkel.

- (i) Jelölje $I, J, A \in \mathbb{R}^{V \times V}$ az egység mátrixot, a csupa-1 mátrixot és gráfunk szomszédsági mátrixát. Igazoljuk, hogy

$$A^2 = dI + d_1A + d_0(J - I - A).$$

- (ii) Mik lehetnek gráfunk sajátértékei?
- (iii) Mik a sajátértékek multiplicitása?
- (iv) Adjunk új feltételt az n, d, d_0, d_1 számokra.

14. Feladat. Legyen G egy n pontú erősen (d, d_1, d_0) -reguláris gráf. Legyen F egy független csúcshalmaz G -ben. Ekkor

$$|F| \leq \frac{d_0n + d_0 - d - d^2 + \sqrt{(d_0n + d_0 - d - d^2)^2 + 4(d - d_0)d_0n}}{2d_0}.$$

Az erősen regularitásnak általánosításai is vannak.

Definíció. Egy gráf t -szeresen reguláris, ha minden $U, U' \subset V$ esetén, ha $|U| = |U'| = s \leq t$ és $G|_U \simeq G|_{U'}$ esetén az U -beli csúcsok közös szomszédainak száma megegyezik az U' -beli csúcsok közös szomszédainak számával, azaz a közös szomszédok száma csak $G|_U \simeq G|_{U'}$ izomorfia típustól függ.

Az 1-szeresen reguláris gráfok a reguláris gráfok. A 2-szeresen reguláris gráfok az erősen reguláris gráfok.

Egy kapcsolódó fogalom az alábbi.

Definíció. Legyen x és y két csúcs a G gráfban. Legyen $d(x, y) = k$. Ekkor y szomszédait három csoportba tudjuk csoportosítani x -től vett távolságuk szerint. Ez lehet $k-1$, k és $k+1$. Ha az egyes csoportokba eső szomszédok száma csak k -tól és a csoportjuktól függ, akkor azt mondjuk, hogy G távolság-reguláris.

15. Feladat. Vizsgáljuk a fent definiált, gráfokra vonatkozó szimmetria fogalmak viszonyait.

3. Példák szimmetrikus gráfokra

3.1. Teljes és üres gráfok

3.2. Körök

A körök az összefüggő 2-reguláris gráfok. Feltesszük, hogy egyszerű gráfokat vizsgálunk. Emiatt a pontszám legalább 3. Az összefüggő 2-regularitás tulajdonság izomorfia erejéig leírja az n pontú kört. Ennek jelölése: C_n .

$C_3 \simeq K_3$, egy teljes gráf (így erősen reguláris gráf is, triviális erősen reguláris gráf). C_n $n \geq 4$ esetén háromszögmentes.

C_4 egy erősen reguláris gráf 4 csúcson. Paraméterei $(2, 0, 2)$. $C_4 \simeq K_{2,2}$, azaz a négy hosszú kör egy triviális erősen reguláris gráf.

C_5 erősen reguláris. Paraméterei $(2, 0, 1)$. C_5 a legkisebb nemtriviális erősen reguláris gráf.

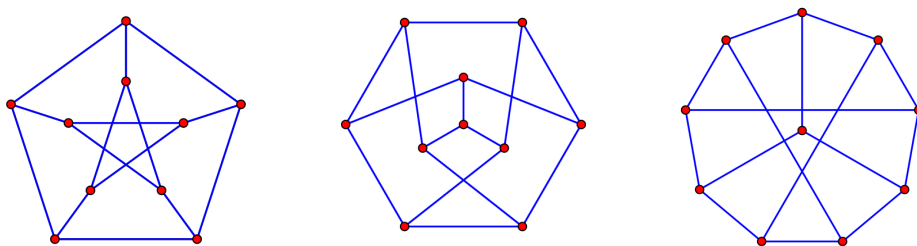
C_n $n \geq 6$ esetén nem erősen reguláris.

C_5 speciális a körök sorozatában: az egyetlen nemtriviális erősen összefüggő gráf. K_5 két C_5 -tel „kiparkettázható”.

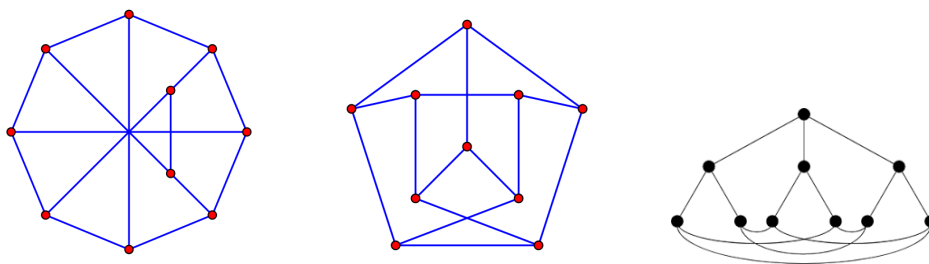
$\text{Aut}(C_n) \simeq \mathbb{D}_n$, a $2n$ elemű diéder csoport.

3.3. Petersen-gráf

A Petersen-gráf egy 10 pontú 3-reguláris gráf. Könnyen lerajzolható.



1. ábra. A Petersen-gráf három különböző forgásszimmetriát feltáró lerajzolása



2. ábra. A Petersen-gráf három másik lerajzolása

Bármelyik lerajzolásból kiolvasható mi is a Petersen-gráf. Célszerű szisztematikusabb leírást is megadni.

Definíció. Vegyük azt a gráfot, amely csúcshalmaza $\binom{[5]}{2}$ és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Ez a gráf éppen a Petersen-gráf.

16. Feladat. *Hány öt-hosszú kör van P -ben?*

Igazoljuk, hogy P -ben nincs Hamilton-kör.

Milyen hosszú körök vannak P -ben?

Hány darab ℓ -hosszú kör van P -ben?

17. Feladat. *Ki lehet-e színezni K_{10} éleit három színnel úgy, hogy mindegyik szín K_{10} egy-egy Petersen részgráfja legyen?*

18. Feladat. *Színezzük ki $2 \cdot K_{10}$ éleit hat színnel úgy, hogy mindegyik szín K_{10} egy-egy Petersen részgráfja legyen. ($\ell \cdot G$ gráfot úgy kapjuk G -ből, hogy minden élt ℓ párhuzamos példánnyal helyettesítjük.)*

19. Feladat. *Igazoljuk, hogy a Petersen-gráfban a legnagyobb független halmaz mérete 4.*

Hány négy-elemű független halmaz van a Petersen-gráfban?

Idézzük fel az Erdős—Ko—Rado-tételt. Mi a köze a tételnek az előző két kérdéshez?

Az előző feladat alapján P -ben pontosan öt maximális elemszámú független halmaz létezik. Ezek az $[5]$ alaphalmaz elemeihez tartoznak: $v \in [5]$ esetén F_v tartalmazza $\binom{[5]}{2}$ elemeit, amelyekben v benne van. F_v nyilván egy független halmaz.

Definíció. Az alábbiakban leírunk egy gráfot. Csúcsai: $[6]$ (amely csúcsok egy hathosszú C kört fognak feszíteni), D_1, D_2 és D_3 a C kör három darab átellenes csúcspárjának felel meg és van egy O csúcsunk. Élei: O -t összekötjük a D_i csúcsokkal, továbbá a D_i csúcsokat összekötjük a C -beli elemeikkel és C -n belül ott van a hathosszú kör hat éle. Ez a gráf a Petersen-gráf.

3.4. Johnson- és Kneser-gráfok, metszetszám-gráfok

A Petersen-gráf egyik leírása szerint a csúcshalmaz $\binom{[5]}{2}$ és $R, R' \in \binom{[5]}{2}$ pontosan akkor szomszédos, ha nincs közös elemük, azaz metszetük 0-elemű. A leírásban szereplő gráf könnyen általánosítható egy gráfalmazzá. (Megjegyezzük, hogy az alábbiakban csupán egyet adunk meg a Petersen-gráf sok lehetséges kiterjesztéséből.)

Definíció. $MM(n, k, s)$ az a gráf, amely csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$ és $R, R' \in \binom{[n]}{k}$ pontosan akkor szomszédos, ha $|R \cap R'| = s$. A fent definiált gráfalmaz elemeit metszetszámú gráfoknak nevezzük.

Az érdekes esetekben nyilván $0 \leq s \leq k - 1$. Két fontos speciális esetet ki kell emelnünk.

Definíció (Kneser-gráfok). A $MM(n, k, 0)$ gráfokat Kneser-gráfoknak nevezzük és $Kn\binom{n}{k}$ -ként jelöljük.

Definíció. A $MM(n, k, k - 1)$ gráfokat Johnson-gráfoknak nevezzük és $J\binom{n}{k}$ -ként jelöljük.

Azaz a Petersen-gráf egy Kneser-gráf, illetve egy Johnson-gráf komplementere.

20. Feladat. Vizsgáljuk meg a metszetszámú gráfok pontthalmazának méretét és regularitási tulajdonságait, paramétereit.

4. Véletlen gráfok automorfizmuscsoportja

Definíció. Legyen $\mathbf{G}_n$ az $\mathcal{G}_n$ halmazból (az $[n]$ pontthalmazú egyszerű gráfok halmazából) uniform eloszlással választott véletlen gráf. A $\mathbf{G}_n$ véletlen gráf generálása úgy is történhet, hogy az $\binom{n}{2}$ darab csúcspár mindegyikére függetlenül döntünk hogy összekötjük ($1/2$ valószínűséggel), illetve nem kötjük össze ($1/2$ valószínűséggel). $\mathbf{G}_n$ neve $1/2$ paraméterű Erdős—Rényi véletlen gráf.

A véletlen gráfok nagy szimmetriával rendelkeznek: az összes csúcspár között ugyanolyan eloszlással döntünk gráfunkról. Ennek ellenére konkrét pénzfeldobások elvégzésével nem valószínű, hogy szimmetriát mutató gráfhoz jutunk.

21. Tétel.

$$\mathbb{P}(\text{Aut}(\mathbf{G}_n) = 1) \rightarrow 1, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

azaz egy véletlen gráf 1 valószínűséggel aszimmetrikus.

Bizonyítás. Egy v csúcs kiterjesztett fokszáma legyen a $\hat{d}(v) = (d, e_1, e_2, \dots, e_d)$ sorozat, ahol d a v csúcs foka és $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_d$ a v szomszédai fokainak rendezett sorozata. A G gráf $\hat{d}$ -aszimmetrikus, ha $\hat{d}$ különböző értéket vesz fel minden csúcra. Belátjuk, hogy $\mathbf{G}_n$ 1 valószínűséggel $\hat{d}$ -aszimmetrikus. Ebből nyilván következik az állítás.

Egy a és b csúcs $\hat{d}$ -megkülönböztetett, ha $\hat{d}(a) \neq \hat{d}(b)$, illetve $\hat{d}$ -megkülönböztethetetlen, ha $\hat{d}(a) = \hat{d}(b)$. A továbbiakban a és b tetszőleges két különböző, de lerögzített csúcspár. Legyen $E_{a,b}$ az „ a és b $\hat{d}$ -megkülönböztethetetlen” esemény. Belátjuk, hogy $\mathbb{P}(E_{a,b}) = o(1/n^2)$ (azaz $\binom{n}{2}$ darab eseményről állítjuk becslésünket). Ebből adódik az állítás.

Legyen A és B az a , illetve b csúcsok szomszédsága. Legyen $A_{\bar{b}}$ azon csúcsok A -ból, amelyek nem összekötöttek b -vel. Hasonlóan definiálható $B_{\bar{a}}$. Legyen $G_0 = G|_{V(G) - \{a,b\}}$. $E_{a,b}$ pontosan akkor következik be, ha $|A| = |B|$ (ez ekvivalens azzal, hogy $|A_{\bar{b}}| = |B_{\bar{a}}|$) és a G_0 -beli fokok $A_{\bar{b}}$ -beli eloszlása ugyanaz mint $B_{\bar{a}}$ -beli eloszlása.

Az $E_{a,b}$ esemény azon részhalmaza, amikor $|A| = |B| \leq n/3$ nyilván $o(1/n^2)$ valószínűségű. A továbbiakban feltesszük, hogy $|A| = |B| > n/3$.

Legyen ℓ $A_{\bar{b}}$ -ban a különböző G_0 -beli fokok száma. Legyen M $A_{\bar{b}}$ -ban a „leggyakoribb” G_0 -beli fok multiplicitása. Belátjuk, ha ℓ vagy M valamelyike „nagy”, akkor készen vagyunk.

A következőkben gondoljunk arra ℓ nagy. Tegyük fel, hogy $d_1, d_2, \dots, d_\ell$ az $A_{\bar{b}}$ -ban előforduló G_0 -beli fokok. Tegyük fel, hogy $A_{\bar{b}}$ -ban ezek $m_1, m_2, \dots, m_\ell$ multiplicitással szerepelnek, míg $B_{\bar{a}}$ -ban ezek $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_\ell$ multiplicitással szerepelnek. Azaz G_0 -ban a d_i fokú csúcsok halmazát az $A_{\bar{b}}$ halmaz m_i elemében, míg a $B_{\bar{a}}$ halmaz μ_i elemében metszi. Ez a G_0 -n kívül (a -ból és b -ből induló) élek választásától függ. Könnyű látni, hogy m_i , illetve μ_i paritása egyenletesen, egymástól függetlenül oszlik el. Így csak egy paritás egyezése (ami szükséges $E_{a,b}$ -hez) $1/2$ valószínűségű. Az összes paritás egyezése $(1/2)^\ell$ valószínűségű. Így

$$\mathbb{P}(E_{a,b} \mid A_{\bar{b}}\text{-ban van } \ell \text{ különböző } G_0\text{-fok}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\ell.$$

Most gondoljunk arra, hogy M nagy. A vizsgált eseményt becsüljük felül azzal, hogy G_0 -ben lesz M darab azonos fokú pont. Legyen U egy M elemű ponthalmaz. A vizsgált eseményt lefedhetjük $E_{U,k}$ eseményekkel, ahol $E_{U,k}$ annal bekövetkezése, hogy U -n belül minden fok k .

Nézzük meg U -n belül milyen fokok alakulnak ki. Ezek után minden $x \in U$ esetén az U -ból kivezető lehetséges élek közül előírt számúnak kell megvalósulni, hogy a fok k értékűvé váljon. Az adott fok kialakulásának valószínűsége legfeljebb $1/\sqrt{n-M}$. Különböző U -beli fokok esetén ezek független események.

A részletek összerakása után kapjuk

$$\mathbb{P}(E_{a,b} \mid A_{\bar{b}}\text{-ban van } M \text{ darab csúcs azonos } G_0\text{-fokkal}) \leq n \cdot \binom{n}{M} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n-M}}\right)^M.$$

Az első becslésünk megfelelő, ha $\log n \ll \ell$. Második becslésünk megfelelő, ha $\sqrt{n} \ll M$. Mivel $\ell M \geq n/3$, mindenképpen adódik a tétel. ■

A fenti tétel állítást a következőképpen értelmezhetjük. Vizsgáljuk az alábbi algoritmikus problémát: Generálunk függetlenül két véletlen gráfot. Döntsük el, hogy izomorfak-e.

Az alábbi algoritmus hatékonyan, kis hibázással megoldja ezt a problémát: Az algoritmus el se olvassa az input két gráfját. Minden számolás nélkül „NEM IZOMORFAK” állapottal leáll. Ennél hatékonyabb algoritmust el se lehet képzelni. Tételünk ekvivalens azzal, hogy a hibázás valószínűsége nagy n esetén közel 0.

Ha a fenti bizonyítás alapját megértettük, akkor okosabb algoritmust is tervezhetünk. Ez nagyon kis valószínűséggel „FELSÜLTEM” állapottal áll meg, különben megadja a helyes választ. Sőt ad is egy bizonyítékot válasza helyességére. Az előző — hibázási lehetőséget megengedő — algoritmussal szemben ez nagy előrelépés. Az algoritmus elolvassa a két gráfot és mindkettő esetén minden csúcsra kiszámolja a $\hat{d}$ sorozatokat. Ha a két gráfra a két sorozat- n -es nem azonos, akkor „NEM IZOMORFAK” outputtal leállunk. Ha a két sorozat- n -es ugyanaz és a közös összességben van két azonos sorozat, akkor „FELSÜLTEM” outputtal leállunk. Ha a két sorozat- n -es ugyanaz és minden eleme különböző, akkor az egyes sorozatok párbaállítják a két inputgráf csúcshalmazát. Ez az egyetlen lehetséges izomorfizmus. Teszteljük, hogy ez valóban izomorfizmus-e. A teszt eredményétől függően az outputunk „IZOMORFAK” vagy „NEM IZOMORFAK” lesz.

Természetesen a fenti algoritmus két tetszőleges gráfra lefuttatható. Ha azonban az input nem „véletlen”, akkor a legrosszabb eset analízis azt mondja, hogy az input esetén egy rosszindulatú ellenfél által adott gráfpárra kell gondolnunk. Azaz elképzelhető, hogy két azonos pontszámú, ugyanolyan fokparaméterekkel rendelkező két erősen reguláris gráfot kapunk, amelyek még nem is izomorfak. (Ilyet könnyen talál ellenfelünk.) Ekkor a fenti naív algoritmus FELSÜLTET választ ad.

Izomorfia tesztelő algoritmusunknak erre az esetre fel kell készülnie. A jelenleg legjobb algoritmus Babai László nevéhez fűződik. Algoritmusában jelentős szerepet kap, hogy „vigyázzunk a Johnson-gráfokra”.

5. Halmazrendszerek, fokok

Természetesen más struktúrák esetén is vizsgálhatók, hogy a szimmetriájuk hogyan formalizálható, a szimmetria különböző fokai/oldalai hogyan írhatók le. A szinte felsorolhatatlan változat közül a számunkra legérdekesebbeket írjuk le.

Definíció. $\mathcal{H}$ uniform halmazrendszer, ha minden él elemszáma ugyanaz. Ha a közös elemszám k , akkor k -uniform halmazrendszerről beszélünk.

Definíció. Egy (v, k, λ) -blokkrendszer (alternatív módon 2-design) egy olyan k -uniform halmazrendszer v darab csúcs felett, amelyre teljesül, hogy bármely két ponton pontosan λ él halad át.

A triviális esetek kizárása miatt feltesszük, hogy $k > 2$. Blokkrendszerek esetén az éleket blokkoknak is nevezzük.

A paraméterek értéke (ha megvalósítható) általában nem írja le izomorfizmus erejéig a blokkrendszerünket/halmazrendszerünket. $\lambda\text{-}\mathfrak{B}\text{-}\binom{v}{k}$ jelöli a megfelelő halmazrendszer-osztályt.

Egy fontos általánosítás az alábbi.

Definíció. $\mathcal{D}$ egy t -design (v, k, λ) paraméterekkel, ha k -uniform halmazrendszer v csúcs felett, amelyre teljesül, hogy tetszőleges t csúcs pontosan λ élnek/blokknak részhalmaza.

Ismét kizárjuk a triviális példákat a $2 \leq t < k$ feltétellel.

A paraméterek értéke (ha megvalósítható) általában nem írja le izomorfizmus erejéig a design-unkat/halmazrendszerünket. $t\text{-}\lambda\text{-}\mathfrak{D}\text{-}\binom{v}{k}$ jelöli a megfelelő halmazrendszer-osztályt.

Definíció. Egy t -design (v, k, λ) paraméterekkel Steiner-rendszernek nevezünk, ha $\lambda = 1$.

A paraméterek értéke (ha megvalósítható) általában nem írja le izomorfizmus erejéig a Steiner-rendszerünket/halmazrendszerünket. $t\text{-}\mathfrak{S}\text{-}\binom{v}{k}$ jelöli a megfelelő halmazrendszer-osztályt. A Steiner-rendszerek vizsgálata a $k = 3$ esettel kezdődött. Ebben az esetben Steiner-hármasokról beszélünk. Alaptétel, hogy $2\text{-}\mathfrak{S}\text{-}\binom{v}{3}$ akkor és csak akkor nemüres, ha v hattal osztva 1 vagy 3 maradékot ad.

Példa. $(V, \mathcal{B} = \binom{V}{k})$ egy blokkrendszer ($2 \leq k < |V|$), ahol $\lambda = \binom{v-2}{k-2}$.

Példa. Legyen $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 1\}, \{1, 7, 4\}, \{3, 7, 6\}, \{5, 7, 2\}, \{2, 4, 6\}\}$. Ekkor $v = 7$, $k = 3$ és $\lambda = 1$.

Megjegyzés. Az előző példa első ránézésre egy egyedi konstrukciónak néz ki. Később majd látni fogjuk, hogy egy nagyon fontos példacsalád, a véges projektív síkok egy eleme. Ezek tárgyalására később kitérünk.

Egy természetes kérdés, hogy milyen (v, k, λ) számhármak esetén létezik blokkrendszer. A következőkben szükséges feltételeket vezetünk le. A feltételekhez úgy jutunk el, hogy új paramétereket vezetünk be, és ezekre vonatkozó azonosságokat írunk fel.

Legyen $b = |\mathcal{B}|$ a blokkok száma. Ekkor az összes pontpárra összeszámolva az ezeket tartalmazó blokkokat $\binom{v}{2}\lambda$ -t kapunk, és minden blokkot $\binom{k}{2}$ -ször számoltunk. (Tehát $\lambda\binom{v}{2} = \binom{k}{2}b$.) Azaz $b = \frac{\lambda\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}$. Tehát $k(k-1)|\lambda v(v-1)$.

Legyen $r_x = |\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}|$ ($x \in V$), az x csúcs fokszáma a $\mathcal{B}$ blokkrendszerben. Belátjuk, hogy r_x nem függ x -től, hanem egy, csak a blokkrendszer paramétereitől függő, r szám. Ehhez számoljuk össze a (v, B) párokat, ahol v egy x -től különböző csúcs, és B egy x -et, és v -t is tartalmazó blokk. Az x -en kívüli $v-1$ darab pont mindegyikén λ darab x -et is tartalmazó blokk halad át. Így $(v-1)\lambda$ -t kapunk. Másrészt minden x -en átmenő blokk pontosan $k-1$ megszámolt párban szerepel. Tehát $(v-1)\lambda = (k-1)r_x$. Azaz $r_x = \frac{(v-1)\lambda}{k-1}$, független x -től. Speciálisan $k-1|(v-1)\lambda$.

22. Lemma. *Ha létezik (v, k, λ) paraméterű blokkrendszer, akkor*

- (a) $k-1|\lambda(v-1)$,
- (b) $(k-1)k|\lambda(v-1)v$.

A (v, k, λ) -ra vonatkozó fenti két feltételt *oszthatósági feltételeknek* nevezzük. Ez szükséges, de nem elegendő feltétel blokkrendszerek létezésére. Azonban a következő igen mély tétel azt mondja, hogy oszthatósági feltételeink bizonyos értelemben közel vannak az elegendőséghez.

23. Tétel (Wilson-tétel, 1971). *Legyen $k \geq 3, \lambda \geq 1$ két tetszőleges pozitív egész. Ekkor létezik olyan $v_0(k, \lambda)$ egész, hogy $v > v_0(k, \lambda)$ esetén az oszthatósági feltételeket teljesítő bármely (v, k, λ) számhármashoz létezik ezen paraméterekkel rendelkező blokkrendszer.*

24. Feladat. *Egy osztály létszáma n ($30 < n < 40$). Az osztályban bizottságokat alakítanak úgy, hogy*

- (i) *bármely bizottságnak legalább 3 tagja legyen,*
- (ii) *bármely két bizottságnak pontosan egy közös tagja legyen,*
- (iii) *bármely két tanuló dolgozzon közös bizottságban.*

Ezek után határozzuk meg:

- a) *Hányan járnak az osztályba?*
- b) *Hány tanuló van egy-egy bizottságban?*
- c) *Hány bizottság van?*

d) Egy-egy tanuló hány bizottság tagja?

25. Feladat. $\mathcal{B}$ egy k -uniform halmazrendszer V felett. Legyen $l \leq k$ egy természetes szám, amelyre teljesül, hogy bármely l -elemű $S \subset V$ halmaz esetén $|\{B \in \mathcal{B} : S \subset B\}|$ egy S -től nem függő szám. Bizonyítsuk be, ha $t < l$, akkor bármely $T \subset V$ t -elemű halmaz esetén $|\{B \in \mathcal{B} : T \subset B\}|$ csak t -től függ.

26. Feladat. Legyen n pozitív egész szám, és legyenek $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ a B halmaz részhalmazai. Tegyük fel, hogy

- (a) mindegyik A_i -nek pontosan $2n$ eleme van,
- (b) minden $A_i \cap A_j$ metszetnek $(1 \leq i < j \leq 2n+1)$ pontosan egy eleme van,
- (c) a B halmaz minden eleme benne van legalább két A_i -ben.

Az n milyen értékeinél rendelhető B minden eleméhez a 0 és 1 számok egyike úgy, hogy minden A_i -nek pontosan n olyan eleme legyen, amelyhez a 0 -t rendeltük?

27. Feladat. A hételemű S halmaznak kijelöltük néhány valódi részhalmazát úgy, hogy azok eleget tesznek a következő két feltételnek:

- (i) S bármely két különböző eleméhez egyértelműen létezik őket tartalmazó kijelölt részhalmaz.
- (ii) Bármely két kijelölt részhalmaz metszete S egy eleme.

Hány részhalmazt jelöltünk ki?

28. Feladat. Egy halmazrendszert általánosított (v, λ) -blokkrendszernek nevezünk, ha halmazrendszer egy v -elemű alaphalmaz felett és bármely két különböző pontjára a két pontot egyszerre tartalmazó élek száma ugyanannyi (λ) , azaz pontpártól független konstans. Azt is mondhatjuk, hogy az általánosított blokkrendszerek olyan blokkrendszerek, amelyekre „csak” az uniformitási feltétel hiányzik.

- (i) Mi az általánosított blokkrendszer fogalmának duálisa?
- (ii) Bizonyítsuk be, hogy $\lambda > 0$ esetén egy általánosított (v, λ) -blokkrendszer blokkjainak száma legalább v .

6. Szimmetria a szimmetrikus csoportban

Még egy struktúrát emelünk ki, S_n -et, a szimmetrikus csoportot. A csoport alaphalmaza n elem (általában $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$) permutációinak halmaza. S_n legszimmetrikusabb részhalmazai természetesen a részcsoportok. A részcsoportok között is meg lehet különböztetni „szimmetrikusabbakat”.

Definíció. Egy $R < S_n$ részcsoport k -tranzitív, ha tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_k$ és $y_1, y_2, \dots, y_k$ két rendszerre, amelyek különböző k elemet tartalmaznak van olyan $g \in R$, amelyre $gx_i = y_i$.

Megjegyzés. S_n természetesen (az egyetlen) n -tranzitív rész. A_n $n-2$ -tranzitív.

Számunkra a fenti szimmetria fogalmak központiak lesznek. Persze további fogalmak is bevezethetők, illetve más struktúrák is vizsgálhatók például kódok, Boole-függvények, pontalmazok, egy pont- és egyeneshalmaz illeszkedési struktúrája.