

5. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2011. március 10-étől

1. Poliéderek, politópok

Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$\mathcal{P} = \{x : Ax \succeq b\}$$

alakú ponthalmazt poliédernek nevezzük. Azaz a poliéder egy véges sok lineáris egyenlőtlenséget tartalmazó rendszer megoldáshalmaza.

1. Feladat. Írjuk fel a kocka, tetraéder, oktaéder $\mathbb{R}^3$ -beli ponthalmazokat, mint egy egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza. A testjeink alakját, elhelyezkedését mi választhatjuk meg.

Felírásunkban $n = 3$. Mi lesz k minimális értéke?

Írjuk fel a fenti testek 4-dimenziós változatát is.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy a poliéderek zárt és konvex halmazok.

3. Feladat. Igazoljuk, hogy egy zárt konvex halmaz, akkor és csak akkor nem korlátos, ha tartalmaz félegyenest.

4. Feladat. Igazoljuk, ha egy $\mathcal{P}$ zárt konvex halmaz nem korlátos, akkor minden pontjából indul ki $\mathcal{P}$ -ben haladó félegyenes.

5. Feladat. Igazoljuk, ha egy $\mathcal{P}$ zárt konvex halmaz tartalmaz egy v irányvektorú félegyenest, akkor minden pontjára igaz, hogy az abból induló v irányvektorú félegyenes $\mathcal{P}$ -be esik.

Definíció. Egy $\mathcal{P}$ poliéder politóp, ha korlátos.

6. Feladat. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$. Igazoljuk, ha a nem-üres $\mathcal{P} = \{x : Ax \succeq b\}$ poliéder politóp, akkor $k > n$.

Azaz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ esetén a nem-üres $\mathcal{P} = \{x : Ax \succeq b\}$ poliéder szükségszerűen nem-korlátos.

Definíció. $H = \{x : nx = \alpha\}$ hipersík a $\mathcal{P}$ poliéder támasz-hipersíkja, ha $H \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ és $\mathcal{P} \subset H_{\leq} = \{x : nx \leq \alpha\}$.

Vigyázat: A fenti definíció érzékeny a hipersíkot leíró egyenletre. $H' : -nx = -\alpha$ ugyanazt a ponthalmazt definiálja, de $H'_{\leq} = \{x : -nx \leq -\alpha\}$ teljesen más mint korábban.

7. Feladat. Legyen $\mathcal{P}$ egy poliéder, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Igazoljuk, hogy a következők ekvivalensek:

(i) Van $x_0 \in \mathcal{P}$ -n áthaladó támasz-hipersík.

(ii) x_0 tetszőleges környezetében van $\mathcal{P}$ -beli és $\mathcal{P}$ -n kívüli pont is.

Definíció. Az előző feladatban leírt pontok a poliéder határpontjai, halmazuk jelölése $\partial\mathcal{P}$.

Definíció. Legyen $x \in \partial\mathcal{P}$. Ekkor

$$C_x = \{n : \text{van olyan } \alpha, \text{ hogy } nx = \alpha \text{ támaszhipersík legyen}\}.$$

8. Feladat. $x \in \partial\mathcal{P}$ esetén C_x egy kúp.

9. Feladat. Legyen $\mathcal{P}$ egy poliéder, $x \in \mathcal{P}$. A következők ekvivalensek:

(i) Van olyan támaszhipersík, ami $\mathcal{P}$ -ből csak az x pontot tartalmazza.

(ii) $x \in \partial\mathcal{P}$ és C_x -nek van belső pontja.

(iii) Ha egy $\mathcal{P}$ -be eső ab szakasz tartalmazza x -et, akkor $a = b = x$ szükségszerű.

(iv) x nem írható fel mint más $\mathcal{P}$ -beli pontok konvex kombinációja.

Definíció. A fenti tulajdonságú x pontok $\mathcal{P}$ extrémális pontjai/csúcsai. Ezen pontok halmazának jelölése $\text{ext } \mathcal{P}$.