

6. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2011. március 24-étől

Matroidok

Definíció. Legyen S egy véges alaphalmaz, $\mathcal{H}$ az alaphalmaz részhalmazainak egy halmaza ($\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(S)$, $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer S felett).

Feltesszük, hogy $\mathcal{H}$ egy nem-üres, lefelé zárt halmazrendszer. Azaz

(Mi) $\emptyset \in \mathcal{H}$,

(Mii) $A \in \mathcal{H}$ és $B \subset A$ esetén $B \in \mathcal{H}$.

Ha $w : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ egy nemnegatív súlyfüggvény, akkor az alaphalmaz minden R részhalmazára $w(R)$ az R elemei súlyainak összege.

OPTIMALIZÁLÁSI ALAPFELADAT: Adott (i) és (ii) tulajdonságú $\mathcal{H}$ halmazrendszer S felett és egy w nem negatív súlyfüggvény. Határozzunk meg egy legsúlyosabb $\mathcal{H}$ -beli halmazt.

1. Feladat. *A fenti alappeladatra tervezzünk egy egyszerű mohó heurisztikát. (Azaz csak olyan eljárást keresünk, ami súlyos $\mathcal{H}$ -beli halmazt ad, az optimum valódi megtalálását nem szükséges.)*

2. Feladat. *Adjunk példát $S, \mathcal{H}, w$ -re a hol a mohó algoritmus outputja nem optimális ($\equiv$ nem maximális súlyú $\mathcal{H}$ -beli halmaz).*

3. Feladat. *Legyen $S, \mathcal{H}$ egy olyan halmazrendszer, amelyben találhatók A és B halmazok úgy, hogy A elemszáma nagyobb legyen B -énél, de B -t ne lehessen bővíteni $A - B$ egyik elemével sem úgy, hogy $\mathcal{H}$ -ban maradjon.*

Igazoljuk, hogy alkalmas w súlyfüggvény „becsapja” a mohó algoritmust.

Definíció. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ nem teljesíti a fenti feladat feltételét, azaz

(Miii) minden $A, B \in \mathcal{H}$ halmazra:

$$|A| > |B| \text{ esetén van olyan } a \in A - B, \text{ hogy } B \cup \{a\} \in \mathcal{H}.$$

$(S, \mathcal{H})$ matroid, ha teljesíti az (i), (ii) és (iii) feltételeket.

4. Feladat. * *Legyen $(S, \mathcal{H})$ egy matroid. Ekkor minden w súlyfüggvényre a mohó algoritmus outputja egy legsúlyosabb $\mathcal{H}$ -beli elem.*

5. Feladat. *Legyen $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ és $k \in \mathbb{N}$. Legyen $\mathcal{M} = \{J \subset S : |J| \leq k\}$. Ekkor $(S, \mathcal{M})$ egy matroid.*

6. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy G gráf esetén $S = E(G)$ és $\mathcal{M} = \{R : R \text{ körmentes}\}$ egy matroid.*

7. Feladat. Legyen $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ és $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ egy vektorhalmaz. Legyen $\mathcal{M} = \{J : \{v_j | j \in J\} \text{ lineárisan független}\}$. Ekkor $(S, \mathcal{M})$ egy matroid.

8. Feladat. Legyen G egy gráf, $S = E(G)$, $\mathcal{M} = \{M \subset E(G) : M \text{ párosítás}\}$. $(S, \mathcal{M})$ matroid-e?

9. Feladat. Legyen G egy gráf, $S = V(G)$,

$$\mathcal{M} = \{R \subset V(G) : \text{alkalmas } M \text{ párosítás lefedi } R\text{-et}\}.$$

Ekkor $(S, \mathcal{M})$ matroid.

Megjegyzés. A továbbiakban $(S, \mathcal{M})$ mindig egy matroidot jelöl. A feladatokban ezen jelölés megjelenése a „Legyen $(S, \mathcal{M})$ egy matroid” feltételt jelenti.

A lineáris algebrai példa után talán nem meglepő, ha $\mathcal{M}$ -beli halmazokat független halmazoknak nevezzük. Ha R nem független, akkor függő.

10. Feladat. $(S, \mathcal{M})$ esetén legyen $R \subset S$. Ekkor a következők ekvivalensek:

- (i) B az X halmaz egy maximális elemszámú független részhalmaza,
- (ii) B az X halmaz egy nem bővíthető független részhalmaza (azaz X minden olyan részhalmaza, ami szigorúan bővebb X -nél már nem független).

Definíció. A fenti feladatban szereplő B az X halmaz bázisa.

A fenti feladat állításának lényege a bázis mohó módon megkapható: minden független részhalmaz maximális elemszámú függetlenné egészíthető ki.

Definíció. $(S, \mathcal{M})$ esetén legyen $r : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{N}$ az a függvény, ami minden R részhalmazához bázisainak közös elemszámát rendeli. Ez a matroidunk rang-függvénye.

11. Feladat. Igazoljuk, ha $R \subset \tilde{R}, \hat{R}$ és $r(R) = r(\tilde{R}) = r(\hat{R})$, akkor $r(R) = r(\tilde{R} \cup \hat{R})$.

12. Feladat. Igazoljuk, hogy egy matroid rangfüggvénye monoton és szubmoduláris. Azaz

$$(Ri) \quad A \subset B \text{ esetén } r(A) \leq r(B),$$

$$(Rii) \quad \text{Tetszőleges } A, B \text{ esetén } r(A) + r(B) \geq r(A \cap B) + r(A \cup B).$$

13. Feladat. $(S, \mathcal{M})$ esetén igazoljuk, hogy az alaphalmaz minden R részhalmazához tartozik egy $\bar{R}$ részhalmaz, amely tartalmazza R -et, rangja ugyanaz mint R -é és ezen tulajdonságokra nézve maximális halmaz.

14. Feladat. * Legyen $r : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{N}$ egy függvény, amelyre

$$(Ro) \quad r(\emptyset) = 0, \quad r(\{s\}) \leq 1 \text{ minden } s \in S \text{ esetén.}$$

Továbbá teljesíti (Ri) és (Rii) tulajdonságokat.

Igazoljuk, hogy ekkor létezik pontosan egy olyan matroid, amelynek rang-függvénye r .

Definíció. $(S, \mathcal{M})$ esetén az alaphalmaz egy C részhalmaza kör, ha minimális függő halmaz. Azaz függő, de tetszőleges valódi részhalmaza már független.

15. Feladat. $(S, \mathcal{M})$ esetén legyen C, C' két különböző kör egy e közös elememl. Ekkor

(Cii) $(C \cup C') - \{e\}$ tartalmaz kört.

16. Feladat. * Legyen $\mathcal{C}$ egyhalmazrendszer S felett, amelyre

(Co) $\emptyset \notin \mathcal{C}$,

(Ci) $\mathcal{C}$ semelyik két különböző eleme közt nincs tartalmazás.

Továbbá $\mathcal{C}$ teljesíti (Cii) tulajdonságot.

Igazoljuk, hogy ekkor létezik pontosan egy olyan matroid, amelynek köreinek halmazrendszere $\mathcal{C}$.