

4. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2011. március 3-ától

Kvázikonvex függvények

Definíció. $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ esetén az f függvény kvázikonvex, ha $\text{dom } f = D$ konvex és minden α valós számra

$$S_\alpha = \{x \in \text{dom } f : f(x) \leq \alpha\}$$

konvex halmaz.

f kvázikonkáv függvény, ha $-f$ kvázikonvex.

1. Feladat. Igazoljuk, hogy minden konvex függvény kvázikonvex. Igaz-e az állítás megfordítása? (Igenlő válaszunkat bizonyítsuk, nemleges válaszunkat példával támasszuk alá.)

2. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi függvények, konvexek, konkávok, kvázikonvexek vagy kvázikonkávok:

(i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lceil x \rceil$.

(ii) $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log x$.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.

(iv) $f : \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.

(v) $f : \text{dom } f(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$, ahol $\text{dom } f = \{x : c^T x + d > 0\}$.

(vi) Legyen $a \neq b \in \mathbb{R}^n$. Legyen $\mathcal{D} = \{x : |x - a| < |x - b|\} \subset \mathbb{R}^n$. $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{|x-a|}{|x-b|}$.

(vii) $X \in \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{rk } X$.

(viii) $X \in \mathcal{S}_+^n \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{rk } X$.

(ix) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max\{i : x_i \neq 0\}$ ($\max \emptyset = 0$).

(x) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |\{i : x_i \neq 0\}|$.

(xi) $f : \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |\{i : x_i \neq 0\}|$.

Definíció. Legyen f egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.

f $\vee$ -unimodális, ha van olyan $m \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, hogy f monoton csökkenő $(-\infty, m)$ -en és monoton növekvő (m, ∞) -en. Továbbá, ha m véges, akkor m egy minimum helye f -nek.

f $\wedge$ -unimodális, ha van olyan $m \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, hogy f monoton növekvő $(-\infty, m)$ -en és monoton csökkenő (m, ∞) -en. Továbbá, ha m véges, akkor m egy maximum helye f -nek.

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, akkor és csak akkor kvázikonvex, ha $\vee$ -unimodális. Továbbá egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, akkor és csak akkor kvázikonkáv, ha $\wedge$ -unimodális.*

4. Feladat (Kvázikonvex Jensen-egyenlőtlenség). *Igazoljuk, hogy egy f kvázikonvex függvényre teljesül, hogy minden $x, y \in \text{dom } f$ és $\theta \in [0, 1]$ esetén*

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

Igazoljuk, ha $\text{dom } f$ konvex, akkor a fenti állítás megfordítható.

Találjuk ki és igazoljuk a kvázikonkáv függvényekre vonatkozó Jensen-egyenlőtlenséget.

5. Feladat. *Igazoljuk, hogy f akkor és csak akkor kvázikonvex, ha minden ℓ egyenesre $f|_\ell$ kvázikonvex.*

6. Feladat. *Legyen f egy differenciálható függvény (speciálisan $\text{dom } f$ nyílt halmaz). Tegyük fel, hogy $\text{dom } f$ konvex. Igazoljuk, f akkor és csak akkor kvázikonvex, ha minden $x, y \in \text{dom } f$ -re teljesül, hogy*

$$f(y) \leq f(x) \text{ esetén } (\nabla f)^T(y - x) \leq 0.$$