

3. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2011. február 24-étől

1. Feladat. Definiáljuk egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvény konvexitását. (Azaz vegyük elő intuíciónkat.)

Definíció. Legyen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy tetszőleges függvény. Legyen $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a következő függvény

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \text{dom } f \\ \infty, & \text{különben} \end{cases}$$

2. Feladat. Igazoljuk, hogy f akkor és csak akkor konvex, ha $\hat{f}$ konvex.

Konvex konjugált

Definíció. $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ esetén f^* az f függvény (konvex/Fenchel/Legendre—Fenchel) konjugáltja

$$f^*(y) = \sup\{y^T \cdot x - f(x) : x \in \text{dom } f\}$$

A fenti definícióban nem írtuk le f^* értelmezési tartományát. Két lehetőség van $\text{dom } f^* = \mathbb{R}^n$, de f^* felvehet ∞ értéket is vagy $\text{dom } f^* = \{y : \{y^T \cdot x - f(x) : x \in \text{dom } f\} \text{ felülről korlátos}\}$

3. Feladat. Számoljuk ki a következő függvények konjugáltját:

(i) $f(x) = a^T \cdot x + b,$

(ii) $f(x) = |x|,$

(iii) $f(x) = x \log x,$

(iv) $f(x) = \alpha e^{\beta x}.$

4. Feladat. Legyen $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$. Ekkor $f^*(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n g_i^*(y_i)$.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges f esetén f^* konvex függvény.

6. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor

(i) $f^{**} \leq f,$

(ii) $f \leq f^{**},$

Így konvex f függvényekre $f = f^{**}$. Ha f nem szükségszerűen konvex, akkor

$$(iii) \ f^* = f^{***}.$$

Definíció. Legyen $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges norma. Ennek duálisa

$$\|y\|^* = \sup\{|x^T y| : \|x\| \leq 1\}.$$

7. Feladat. *Igazoljuk, hogy $\|\cdot\|_p^* = \|\cdot\|_q$, ahol $1/p + 1/q = 1$.*

8. Feladat. *Legyen $f(x) = \|x\|$. Számoljuk ki a konvex konjugáltját.*