

1. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2011. február 2-a'to'1

Konvex ponthalmazok

Definíció. $x, y \in \mathbb{R}^d$ esetén $xy = \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\}$, az xy szakasz.

Definíció. Egy $C \in \mathbb{R}^d$ halmaz konvex, ha minden $x, y \in C$ esetén $xy \subset C$.

1. Feladat. Egy síkbeli nyílt négyzetlaphoz hozzáveszünk kerületi pontokat. Jellemezzük a kerület azon részhalmazait, amik vételével a fenti módon konvex ponthalmazhoz jutunk.

2. Feladat. Egy síkbeli nyílt körlaphoz hozzáveszünk kerületi pontokat. Jellemezzük a kerület azon részhalmazait, amik vételével a fenti módon konvex ponthalmazhoz jutunk.

3. Feladat. Milyen számosságú lehet egy $\mathbb{R}^n$ -beli konvexhalmaz?

4. Feladat. Igazoljuk, hogy a következő $\mathbb{R}^n$ -beli halmazok konvexek:

- (o) üreshalmaz, illetve $\mathbb{R}^n$,
- (i) félterek,
- (ii) gömbök,
- (iii) ellipszoidok,
- (iv) sávok (párhuzamos félterek közé eső pontok halmaza),
- (v) paralelepipedonok.

Definíció. $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy norma, ha

- (i) $\|x\| \geq 0$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = 0$,
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszögegyenlőtlenség).

5. Feladat. Legyen $\|\cdot\|$ egy tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$ -en. Igazoljuk, hogy a következő halmazok konvexek:

- (i) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{R}_+$ esetén $\{x : \|x - x_0\| \leq r\}$,
- (ii) $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\| \leq t\}$

Definíció. $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_+$ és $\mathcal{S}_{++}$ a $\mathbb{R}^{n \times n}$ térből rendre a szimmetrikus, szimmetrikus és pozitív szemidefinit, illetve szimmetrikus és pozitív definit elemek halmaza. Az M mátrix pozitív szemidefinitiségének jele $M \succeq 0$. Az M mátrix pozitív definitiségének jele $M \succ 0$. Általában $N \preceq M$, azt jelenti, hogy $0 \preceq M - N$.

6. Feladat. $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_+$ és $\mathcal{S}_{++}$ konvex.

★ ★ ★

Definíció. $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ esetén az

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N$$

kifejezés — ahol α_i -k valós számok — a pontjaink/vektoraink lineáris kombinációja. Az α_i számok a lineáris kombináció együtthatói.

Definíció. $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N$$

lineáris kombinációt pontjaink konvex kombinációjának nevezzük, ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1$ és együtthatóink nem-negatívak.

7. Feladat. Legyen $D \subset \mathbb{R}^d$. Igazoljuk, hogy a következők ekvivalensek:

- (i) D konvex (az eredeti definíció szerint bármely KÉT pontjával együtt, azok konvex kombinációit is tartalmazza),
- (ii) D zárt a konvex kombináció képzésre, azaz ha $p_1, p_2, \dots, p_N \in D$ és q a $\{p_i\}_{i=1}^N$ pontok konvex kombinációja, akkor $q \in D$ is teljesül,
- (iii) Minden e egyenesre $D \cap e$ konvex (egy egyenes egy részhalmaza konvex, ha üres, vagy intervallum, vagy félegyenes, vagy a teljes egyenes).

8. Feladat. Legyen $D \subset \mathbb{R}^d$ egy zárt halmaz. Igazoljuk, hogy a következők ekvivalensek:

- (i) D konvex,
- (ii) D zárt a felzáró pont képzésre, azaz ha $p_1, p_2 \in D$ és q a $p_1 p_2$ szakasz felzáró pontja ($q = \frac{p_1 + p_2}{2}$), akkor $q \in D$ is teljesül,
- (iii) D előáll mint zárt félterek metszete,
- (iv) D előáll mint nyílt félterek metszete.
- (v) D előáll mint félterek metszete.

9. Feladat. Legyen $C \subset \mathbb{R}^d$ konvex halmaz, illetve $\{C_i\}_{i \in I}$ konvex halmazok. Ekkor a következő halmazok is konvexek:

- (i) $\bigcap_{i \in I} C_i$,
- (ii) $C_1 + C_2 = \{x + y : x \in C_1, y \in C_2\}$

- (iii) $\lambda C = \{\lambda x : x \in C\}$, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, C^{cl} ,
- (iv) C^{int} ,
- (v) $C^{\text{rel-int}}$,
- (vi) $\pi_A(C)$, ahol π_A egy A affin altérre történő vetítés,
- (vii) $f(C)$, illetve $f^{-1}(C)$, ahol $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ affin leképezés.

10. Feladat. $f_{a,b}(x) = a + bx + x^2$ Konvex-e a $\{(a,b) | f_{a,b}(0.37) \geq 1\}$ halmaz? Konvex-e a $\{(a,b) | f_{a,b}(x) \geq 1, \text{ ha } x \in [-1, 1]\}$ halmaz?

11. Feladat. Legyen $p_{x_1, \dots, x_m}(t) = x_1 \cos t + x_2 \cos t + \dots + x_m \cos mt$. Konvex-e az $\{x \in \mathbb{R}^m : |p_{x_1, \dots, x_m}(t)| < 1, \text{ ha } |t| \leq \pi/3\}$ halmaz?

12. Feladat. Igazoljuk, hogy konvex az $\{x \in \mathbb{R}^m : x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m \preceq B\}$ halmaz, ahol $A_1, \dots, A_m, B$ szimmetrikus $n \times n$ méretű mátrixok.

★ ★ ★

13. Feladat. Legyen C egy konvex halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben.

- (i) Legyen $z \notin C$. Ekkor van olyan H hipersík, hogy az általa meghatározott Γ^+ és Γ^- két zárt féltérre teljesül $C \subset \Gamma^+$ és $z \in \Gamma^-$.
- (ii) Legyen $z \notin C^{\text{cl}}$. Ekkor van olyan H hipersík, hogy az általa meghatározott Γ^+ és Γ^- két nyílt féltérre teljesül $C \subset \Gamma^+$ és $z \in \Gamma^-$.

14. Feladat. Legyen $R \subset \mathbb{R}^d$, ekkor létezik egyetlen olyan $M = \text{conv}(R)$ halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyre

- (i)_M $M \supset R$,
- (ii)_M M konvex,
- (iii) Minden olyan T halmaz, amely teljesíti az (i)_T és (ii)_T tulajdonságokat tartalmazza M -et.

Definíció. A fenti feladatban definiált M halmazt a R halmaz konvex burkának nevezzük.

15. Feladat. Ha R véges, akkor $\text{conv}(R)$ is kompakt. Sőt a következtetés igaz akkor is, ha R tetszőleges kompakt.

16. Feladat. A következők ekvivalensek:

- (i) P egy véges ponthalmaz konvex burka,
- (ii) P korlátos és véges sok zárt féltér metszete.

Definíció. A fenti módon nyerhető ponthalmazokat poitópoknak nevezzük.

17. Feladat. Milyen sok féltér metszése kellhet n pont konvex burkának előállításához? (Nem szükségszerűen vagyunk 2-dimenzióban.)

18. Feladat. *Milyen sok pont konvex burkaként állhat elő n féltér korlátos metszete? (Nem szükségszerűen vagyunk 2-dimenzióban.)*

★ ★ ★

Definíció. $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N$$

lineáris kombinációt pontjaink affin kombinációjának nevezzük, ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.

Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}^d$ halmazt affin altérnek nevezünk, ha zárt az affin kombináció képzésére.

19. Feladat. *Legyen $R \subset \mathbb{R}^d$, ekkor létezik egyetlen olyan $M = \text{aff}(R)$ halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyre*

(i)_M $M \supset R$,

(ii)_M M affin altér,

(iii) Minden olyan T halmaz, amely teljesíti az (i)_T és (ii)_T tulajdonságokat tartalmazza M -et.

Definíció. A fenti feladatban definiált M halmazt a R halmaz affin burkának nevezzük.

20. Feladat. *Igazoljuk, $\mathcal{S}_+$ affin altér.*

★ ★ ★

Definíció. Egy $L \subset \mathbb{R}^d$ pontthalmazt lineáris altérnek nevezünk, ha zárt a lineáris kombináció képzésre.

21. Feladat. *Legyen $R \subset \mathbb{R}^d$, ekkor létezik egyetlen olyan $M = \text{lin}(R)$ halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyre*

(i)_M $M \supset R$,

(ii)_M M lineáris altér,

(iii) Minden olyan T halmaz, amely teljesíti az (i)_T és (ii)_T tulajdonságokat tartalmazza M -et.

Definíció. A fenti feladatban definiált M halmazt a R halmaz lineáris burkának nevezzük.

22. Feladat. *Igazoljuk, $\mathcal{S}$ lineáris altér.*

★ ★ ★

Definíció. $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N$$

lineáris kombinációt pontjaink kúp kombinációjának nevezzük, ha az α_i együtthatók nem negatívak.

Definíció. Egy $K \subset \mathbb{R}^d$ ponthalmaz kúp, ha zárt a kúp kombináció készítésére.

23. Feladat. Legyen $R \subset \mathbb{R}^d$, ekkor létezik egyetlen olyan $M = \text{cone}(R)$ halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyre

(i)_M $M \supset R$,

(ii)_M M kúp,

(iii) Minden olyan T halmaz, amely teljesíti az (i)_T és (ii)_T tulajdonságokat tartalmazza M -et.

Definíció. A fenti feladatban definiált M halmazt a R halmaz által generált kúpnak nevezzük.

24. Feladat. Az alábbi halmazokról állapítsuk meg, hogy konvexek, affin alterek, kúpok, lineáris alterek-e.

(i) egyenesek,

(ii) hipersíkok,

(iii) félterek.

Legyünk tekintettel a fenti ponthalmazosztályok helyzetére.

25. Feladat. Legyen F egy origón átmenő hipersík által definiált egyik zárt féltér. Igazoljuk, F kúp.

26. Feladat. Igazoljuk, $\mathcal{S}_+$ kúp.

27. Feladat. Igazoljuk, kúpok metszete is kúp.

28. Feladat. Igazoljuk, a következők ekvivalensek:

(i) K egy véges pont/vektorhalmaz által generált kúp.

(ii) K véges sok origón átmenő hipersík által definiált zárt félteték metszete.

Definíció. Egy a fenti módon nyerhető kúpot végesen generált kúpnak nevezzük.

29. Feladat. Igazoljuk, a következők ekvivalensek:

(i) P véges sok zárt féltér metszete,

(ii) P egy politóp és végesen generált kúp összege.