

2. Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2011. február 16-ától

Konvex függvények

Definíció. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, ha $\text{dom}(f) := D \subset \mathbb{R}^n$ konvex és tetszőleges $x, y \in \text{dom}(f)$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Definíció. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Ekkor f gráfja/grafikonja

$$\text{gr}(f) = \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\}.$$

- Ekkor f epigráfja

$$\{(x, y) : x \in D, y \geq f(x)\}.$$

1. Feladat. Legyen $f(x) = x^2$, a konvex függvények alappéldája. A következő halmazok közül melyek konvexek? $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \geq 1\}$, $\{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x, y) | y \geq f(x)\}$. Az igen válaszok alapján sejtünk meg általános szabályokat és igazoljuk is azokat (amennyiben sejtésünk helyes).

2. Feladat. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^d$. Igazoljuk, hogy a következők ekvivalensek:

- (i) f konvex,
- (ii) $\text{epi}(f)$ konvex halmaz,
- (iii) $f|_\ell$ konvex minden ℓ egyenesre.

3. Feladat. Igazoljuk, hogy konvex f függvényre

$$\{x : f(x) \leq \alpha\} \text{ konvex ponthalmaz minden } \alpha \text{ valós számra.}$$

Ekvivalens-e ez a tulajdonság a konvexitással?

Definíció. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. f differenciálható, ha van olyan $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény, hogy

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f^T(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \text{ minden } x_0 \in D \text{ esetén.}$$

4. Feladat. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex. A következők ekvivalensek:

- (i) f konvex,

(ii) $f \geq f(x) = f(x_0) + \nabla f^T(x - x_0)$, minden $x_0 \in D$ esetén

(iii) $f(x) = \max\{\ell(x) : \ell \in \mathcal{L}\}$, ahol $\mathcal{L}$ affine $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmaza.

Definíció. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. f kétszeresen differenciálható, ha minden $x \in \text{dom}(f)$ esetén ∇^2 létezik.

5. Feladat. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kétszeresen differenciálható, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt konvex halmaz. Ekkor f akkor és csak akkor konvex, ha minden $x \in \text{dom}(f)$ esetén $\nabla^2 \succeq 0$.

6. Feladat. Legyen $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Számoljuk ki $f''(x)$ -et. Konvex-e f ?

7. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^n$ a

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + c$$

hozzárendeléssel adott, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Számoljuk ki ∇f -et és $\nabla^2 f$ -et.

8. Feladat. Igazoljuk, hogy a következő függvények konvexek:

(i) $f(x) = ax + b$, $D = \mathbb{R}$,

(ii) $f(x) = a^T x + b$, $D = \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$,

(iii) $f(x) = e^{ax}$, $D = \mathbb{R}$,

(iv) $f(x) = x^\alpha$, $D = \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$,

(v) $f(x) = x^\beta$, $D = \mathbb{R}$, $\beta \in [1, \infty)$,

(vi) $f(x) = x \log x$, $D = \mathbb{R}_{>0}$,

(vii) $f(x) = \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$, $D = \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$

(viii) $f(x) = \|x\|_\infty = \max\{|x_k| : k = 1, 2, \dots, n\}$, $D = \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$,

(ix) $f(X) = \text{tr}(A^T X) + b$, $D = \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$,

(x) $f(X) = \sqrt{\lambda_{\max}(X^T X)}$, $D = \mathbb{R}^{n \times m}$,

(xi) $f(X) = \log \det X$, $X \in \mathbb{S}_{++}^n$,

(xii) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$, $D = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$,

(xiii) $f(x) = \log(\sum_{k=1}^n \exp x_k)$, $D = \mathbb{R}^n$,

(xiv) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$, $D = \mathbb{R}^2 \cap \{y : y > 0\}$,

(xv) $x \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen $f_k(x)$ az x vektor koordinátái közül a k legnagyobb összege,

(xvi) $f(x) = \max\{a_1^T x + b_1, a_2^T x + b_2, \dots, a_N^T x + b_M\}$.

Definíció. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény — ahol $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz — *konkáv*, ha $-f$ konvex.

9. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő függvények konkávok:*

- (i) $f(x) = ax + b$, $D = \mathbb{R}$,
- (ii) $f(x) = x^\alpha$, $D = \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha \in (0, 1)$,
- (iii) $f(x) = \log x$, $D = \mathbb{R}_{>0}$,
- (iv) $f(x) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$, $x \in \mathbb{R}_{>0}^n$.

10. Feladat. *A következő operációk megőrzik a konvexitást:*

- (i) *Nemnegatív számmal való szorzás, azaz ha f konvex, $\lambda \geq 0$, akkor λf is konvex.*
- (ii) *Összegzés, azaz ha f_1 és f_2 konvex, akkor $f_1 + f_2$ is az.*
- (iii) *$f(x, y_0)$ konvex minden $y_0 \in A$ esetén, $w(y_0) \geq 0$ minden $y_0 \in A$ esetén. Ekkor*

$$\int_A w(y) f(x, y) dy$$

is konvex, amennyiben az integrál létezik.

- (iv) *Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $b \in \mathbb{R}^n$, akkor legyen*

$$g(x) = f(Ax + b),$$

afol $\text{dom}(g) = \{x : Ax + b \in \text{dom}(f)\}$. Ekkor g is konvex.

- (v) *Legyen f_1 és f_2 is konvex. Ekkor $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ is konvex.*
- (vi) *Legyenek f_i ($i \in I$) konvex halmazok, ahol $I \subset \mathbb{R}^k$ konvex halmaz. Ekkor $f(x) = \sup\{f_i(x) : i \in I\}$ is konvex függvény.*

11. Feladat. (i) *Legyen f_1 és f_2 is konvex. Ekkor állíthatjuk-e, hogy $f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$ is konvex?*

- (ii) *Legyen $f(x, y)$ konvex. Ekkor $f(x) = \inf\{f(x, y) : y\}$ is konvex függvény.*

Definíció. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ f alúlról féligfolytonos, ha minden $x, \{x_i\}_{i=0}^\infty \in D$ esetén, ha $x_i \rightarrow x$ ($i \rightarrow \infty$), akkor

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k).$$

12. Feladat. *A következők ekvivalensek:*

- (i) *Az $\{x \in : f(x) \leq a\}$ színhalmazok zártak minden $a \in \mathbb{R}$ esetén,*
- (ii) *f alúlról féligfolytonos,*
- (iii) *$\text{epi}(f)$ zárt.*