Optimization Methods practice session, for Master students

Exercises: SAMPLE 2nd Midterm exam

Lecturer: Peter Hajnal 2026

The test will consist of 3 problems. The following problems provide a sample of the types of problems you can expect.

1. Exercise. *Determine the minimum of the function* $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$ *under the conditions* $x + y \leq 1$ *and* $x, y \geq 0$ *by writing down the KKT conditions!*

2. Exercise. *Given a base set* $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ *and its subsets* $E_1, E_2, \dots, E_m$*. We are looking for a subset* L *of* U *that intersects all sets* E_i *and has a minimal number of elements.*

Let us formulate the problem described above as an IP problem. Our solution must include what our variables represent and what the equations/inequalities describe.

Write down the LP relaxation of the IP problem.

Dualize the LP relaxation.

What is the combinatorial interpretation of the dual problem?

3. Exercise. *Consider the polytope (a bounded polyhedron, i.e., a bounded intersection of finite number of closed half-spaces) whose vertices are those vectors in* $\mathbb{R}^3$ *whose three coordinates are* 1, 2, *and* 3. *That is, our polytope is the convex hull of the vectors described above.*

How many vertices does it have?

Let's describe this polyhedron as an intersection of half-spaces. How many half-spaces do we need to intersect?

If we have time, let's write about the generalization to higher dimensions.

A feladatsorban 3 feladat lesz. Az alábbi feladatok mintát adnak arra, hogy milyen feladatokra számíthatnak.

4. Exercise. *Határozza meg az* $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$ *függvény minimumát az* $x + y \leq 1$ *és* $x, y \geq 0$ *feltételek mellett a KKT-feltételek felírásával!*

5. Exercise. *Adott egy* $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *alaphalmaz* $E_1, E_2, \ldots, E_m$ *részhalmazai. Keresünk olyan* L *részhalmazát* U*-nak, amely az összes* E_i *halmazt metszi és elemszáma minimális.*

A fenti szavakkal leírt problémát fogalmazzuk meg mint IP feladat. Megoldásunk tartalmazza, hogy változóink mit jelentenek és az egyenletek/egyenlőtlenségek mit írnak le.

Írjuk fel az IP feladat LP relaxációját.

Dualizáljuk az LP relaxációt.

Mi a duális feladat kombinatorikus jelentése?

6. Exercise. *Vegyük azt a politópot (korlátos poliéder, azaz véges sok zárt féltér korlátos metszete), amely csúcsai* $\mathbb{R}^3$ *azon vektorai, amely három koordinátája* 1, 2 *és* 3*. Azaz politópunk az előzőleg leírt vektorok konvex burka.*

Hány csúcsa van?

Írjuk le ezt a poliédert mint félterek metszete. Hány féltért kell metszenünk?

Ha van időnk, akkor írjunk a magasabb dimenziós általánosításon.