

Optimization Methods practice session, for Master students

Exercises: SAMPLE Midterm exam

Lecturer: Peter Hajnal

2026

The problem set will consist of 3 problems. The following list is a sample of the types of problems you can expect.

1. Exercise. *Two straight rivers meet at a confluence point T and continue flowing. A cowboy lives in the acute-angled region defined by the two river segments before the confluence. The cowboy decides to water his horse at both rivers before returning home. How should he choose his path if he wants to travel the shortest possible distance?*

2. Exercise. *Is the function $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ convex on the half-plane $\{(x, y) : y > 0\}$?*

3. Exercise. *Is the function $f(x) = -\ln(\sum_{i=1}^n e^{x_i})$ concave, convex, or neither?*

4. Exercise. *Let $C \in \mathcal{S}^n$ be a fixed matrix. Prove that the set $\{X \in \mathcal{S}^n : \text{Tr}(CX) \geq 1\}$ is convex (where Tr denotes the trace).*

5. Exercise. *Show that the function $f(X) = \lambda_{\max}(X)$ (the largest eigenvalue) is a convex function on the set \mathcal{S}^n .*

6. Exercise. *Consider the standard simplex in \mathbb{R}^n : $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i \leq 1, x_i \geq 0\}$.*

(i) How many vertices does the simplex have, and what are their coordinates?

(ii) Determine the center and the radius r of the largest sphere that can be inscribed in the simplex for $n = 2$.

(iii) As $n \rightarrow \infty$, what happens to the volume of the simplex? Justify your answer!

7. Exercise. *Consider a sphere of radius R in \mathbb{R}^n , centered at the origin.*

(i) Inscribe an n -dimensional cube of maximum edge length inside the sphere. What is the edge length of the cube as a function of R ?

(ii) Determine the ratio of the volumes of the cube and the sphere for $n = 2$ and $n = 3$.

(iii) Determine the ratio in the general n -dimensional case as well.

8. Exercise. *Consider the following primal problem:*

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & -x_1 \log x_1 - x_2 \log x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 = 1, \\ & x_1 + 2x_2 = 1.5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Write down the dual optimization problem.

A feladatsorban 3 feladat lesz. Az alábbi feladatsor egy minta arra, hogy milyen feladatokra számíthatnak.

9. Exercise. *Két egyenes folyó találkozik egy T torkolati pontban, majd folyik tovább. Egy cowboy a torkolat előtti két egyenes folyószakasz által meghatározott hegyesszögű tartományban lakik. A cowboy otthon elhatározza, hogy mindkét folyóban megitatja a lovát, majd hazatér.*

Hogyan válassza meg az pályáját, ha minél rövidebb utat akar megtenni?

10. Exercise. *Konvex-e az $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ függvény az $\{(x, y) : y > 0\}$ félsíkon?*

11. Exercise. *Az $f(x) = -\ln(\sum_{i=1}^n e^{x_i})$ függvény konkáv-e, konvex-e, esetleg egyik sem?*

12. Exercise. *Legyen $C \in \mathcal{S}^n$ fix mátrix. Igazoljuk, hogy a $\{X \in \mathcal{S}^n : \text{Tr}(CX) \geq 1\}$ halmaz konvex (ahol Tr a nyomot jelöli).*

13. Exercise. *Mutassuk meg, hogy az $f(X) = \lambda_{\max}(X)$ függvény (a legnagyobb sajátérték) konvex függvény az \mathcal{S}^n halmazon.*

14. Exercise. *Tekintsük az \mathbb{R}^n -beli standard szimplexet: $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i \leq 1, x_i \geq 0\}$.*

(i) Hány csúcsa van a szimplexnek, és mik a koordinátái?

(ii) Határozzuk meg a szimplexbe írható legnagyobb r sugarú gömb középpontját és sugarát $n = 2$ esetén.

(iii) Ha $n \rightarrow \infty$, mi történik a szimplex térfogatával? Indokoljuk!

15. Exercise. *Vegyünk egy R sugarú gömböt \mathbb{R}^n -ben, melynek középpontja az origó.*

(i) Írjunk a gömb belsejébe egy maximális élhosszúságú n -dimenziós kockát. Mekkora a kocka oldalhossza R függvényében?

(ii) Határozzuk meg a kocka és a gömb térfogatának arányát $n = 2$ és $n = 3$ esetén.

(iii) Határosszul meg az arányt az általános dimenzióban is.

16. Exercise. *Vegyük a következő primál problémát:*

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & -x_1 \log x_1 - x_2 \log x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 = 1, \\ & x_1 + 2x_2 = 1.5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Írjuk fel a duális optimalizálási feladatot.