

Feladatsor: Geometria $\mathbb{R}^d$ -ben

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

1. hét —

1. Lineáris alterek

Definíció. $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ esetén az

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N$$

kifejezés — ahol α_i -k valós számok — a pontjaink/vektoraink lineáris kombinációja. Az α_i számok a lineáris kombináció együtthatói. A lineáris kombináció triviális, ha minden együtthatója 0.

Definíció. $x, y \in \mathbb{R}^d$ esetén $\ell(xy) = \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in \mathbb{R}\}$, az x -et és y -t összekötő egyenes.

1. Feladat. Legyen $A \subset \mathbb{R}^d$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) A zárt a lineáris kombináció képzésére.

(ii) $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0) \in A$, továbbá A bármely két elemével együtt azok összekötő egyenesét is tartalmazza.

Definíció. Egy $L \subset \mathbb{R}^d$ ponthalmazt lineáris altérnek nevezünk, ha a fenti feladat valamelyik/mindegyik feltételét teljesíti.

2. Feladat. Igazoljuk, hogy lineáris alterek metszete lineáris altér.

3. Feladat. Legyen $R \subset \mathbb{R}^d$, ekkor létezik egyetlen olyan $M = \text{lin}(R)$ halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyre

(i)_M $M \supset R$,

(ii)_M M lineáris altér,

(iii) Minden olyan T halmaz, amely teljesíti az (i)_T és (ii)_T tulajdonságokat tartalmazza M -et.

Definíció. A fenti feladatban definiált M halmazt a R halmaz lineáris burkának nevezzük.

Definíció. Legyen $\mathcal{M}_n$ az $n \times n$ mátrixok tere. $\mathcal{M}_n \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. Ha $\mathbb{R}^{n^2}$ elmeeire mint mátrixok gondolunk, akkor ezt a $\mathbb{R}^{n \times n}$ jelöléssel hangsúlyozzuk. $\mathcal{S}_n$ legyen a szimmetrikus $n \times n$ méretű mátrixok halmaza $\mathbb{R}^{n \times n}$ -ben,

4. Feladat. Igazoljuk, $\mathcal{S}_n$ lineáris altér. Állapítsuk meg $\mathcal{M}_n$ és $\mathcal{S}_n$ dimenzióját.

2. Affin alterek

Definíció. $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N$$

lineáris kombinációt pontjaink affin kombinációjának nevezzük, ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1$.

Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}^d$ halmazt affin altérnek nevezünk, ha zárt az affin kombináció képzésére.

5. Feladat. *A következők ekvivalensek*

(i) A affin altér,

(ii) A bármely két különböző pontja esetén, azok összekötő egyenesét is tartalmazza.

6. Feladat. Legyen $R \subset \mathbb{R}^d$, ekkor létezik egyetlen olyan $M = \text{aff}(R)$ halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyre

(i)_M $M \supset R$,

(ii)_M M affin altér,

(iii) Minden olyan T halmaz, amely teljesíti az (i)_T és (ii)_T tulajdonságokat tartalmazza M -et.

Definíció. A fenti feladatban definiált M halmazt a R halmaz affin burkának nevezzük.

7. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden lineáris altér affin altér. Adjunk példát a fordított irányú következtetés hamisságára.*

3. Konvex ponthalmazok

Definíció. $x, y \in \mathbb{R}^d$ esetén $xy = \{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\}$, az xy szakasz.

Definíció. Egy $C \subset \mathbb{R}^d$ halmaz konvex, ha minden $x, y \in C$ esetén $xy \subset C$.

8. Feladat. Legyen $R \subset \mathbb{R}^1$. R akkor és csak akkor konvex, ha üres, intervallum, félegyenes vagy a teljes egyenes.

9. Feladat. Igazoljuk, hogy $D \subset \mathbb{R}^d$ akkor és csak akkor konvex, ha minden ℓ egyenesre $D \cap \ell$ konvex.

10. Feladat. Egy síkbeli nyílt négyszetlaphoz hozzáveszünk kerületi pontokat. Jellemezzük a kerület azon részhalmazait, amik vételével a fenti módon konvex ponthalmazhoz jutunk.

11. Feladat. Egy síkbeli nyílt körlaphoz hozzáveszünk kerületi pontokat. Jellemezzük a kerület azon részhalmazait, amik vételével a fenti módon konvex ponthalmazhoz jutunk.

12. Feladat. Milyen számosságú lehet egy $\mathbb{R}^n$ -beli konvex halmaz?

13. Feladat. Igazoljuk, hogy a következő $\mathbb{R}^n$ -beli halmazok konvexek:

- (o) üreshalmaz, illetve $\mathbb{R}^n$,
- (i) félterek,
- (ii) gömbök,
- (iii) ellipszoidok,
- (iv) sávok (párhuzamos félterek közé eső pontok halmaza),
- (v) paralelepipedonok.

Definíció. $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy norma, ha

- (i) $\|x\| \geq 0$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = 0$,
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög-egyenlőtlenség).

14. Feladat. Legyen $\|\cdot\|$ egy tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$ -en. Igazoljuk, hogy a következő halmazok konvexek:

- (i) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{R}_+$ esetén $\{x : \|x - x_0\| \leq r\}$,
- (ii) $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\| \leq t\}$

Definíció. $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_+$ és $\mathcal{S}_{++}$ a $\mathbb{R}^{n \times n}$ térből rendre a szimmetrikus, szimmetrikus és pozitív szemidefinit, illetve szimmetrikus és pozitív definit elemek halmaza. Az M mátrix pozitív szemidefinitiségének jele $M \succeq 0$. Az M mátrix pozitív definitiségének jele $M \succ 0$. Általában $N \preceq M$, azt jelenti, hogy $0 \preceq M - N$.

15. Feladat. Minden affin altér konvex halmaz. Adjunk példát arra, hogy a fordított irányú következtetés hamis.

16. Feladat. $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_+$ és $\mathcal{S}_{++}$ konvex. Halmazink közül melyek affin alterek, melyek lineáris alterek?

★ ★ ★

Definíció. $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N$$

lineáris kombinációt pontjaink konvex kombinációjának nevezzük, ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ és együtthatóink nem-negatívak.

17. Feladat. Legyen $D \subset \mathbb{R}^d$. Igazoljuk, hogy a következők ekvivalensek:

- (i) D konvex (az eredeti definíció szerint bármely KÉT pontjával együtt, azok konvex kombinációit is tartalmazza),

- (ii) D zárt a konvex kombináció képzésre, azaz ha $p_1, p_2, \dots, p_N \in D$ és q a $\{p_i\}_{i=1}^N$ pontok konvex kombinációja, akkor $q \in D$ is teljesül,
- (iii) Minden e egyenesre $D \cap e$ konvex.

18. Feladat. Legyen $Z \subset \mathbb{R}^d$ egy zárt halmaz. Igazoljuk, hogy a következők ekvivalensek:

- (i) Z konvex,
- (ii) Z zárt a felzõpontosításra, azaz ha $p_1, p_2 \in Z$ és q a $p_1 p_2$ szakasz felzõpontja ($q = \frac{p_1 + p_2}{2}$), akkor $q \in Z$ is teljesül,
- (iii) Z elõáll mint zárt félterek metszete,
- (iv) Z elõáll mint nyílt félterek metszete.
- (v) Z elõáll mint félterek metszete.

19. Feladat. Legyen $Z \subset \mathbb{R}^d$ egy korlátos zárt halmaz. Legyen H egy nyílt féltér, ami tartalmazza Z -t. Ekkor található olyan H_0 zárt féltér, ami része H -nak és továbbra is tartalmazza Z -t. Igaz-e az állítás a korlátosság feltétele nélkül?

★ ★ ★

Definíció. Legyen $R \subset \mathbb{R}^d$. Legyen $R^{cl} = cl(R)$ az R halmaz lezártja. Legyen $R^{int} = int(R)$ az R halmaz belső pontjainak halmaza. Legyen $R^{relint} = relint(R)$ az $R \subset aff(R)$ halmaz belső pontjainak halmaza, R relatív belső pontjai.

20. Feladat. Legyen C egy konvex halmaz. Igazoljuk:

- (i) $cl(C) = cl(relint(C))$,
- (ii) $relint(C) = relint(cl(C))$.

21. Feladat. Legyen C és $\tilde{C}$ két nem üres konvex halmaz. Ekkor a következők ekvivalensek:

- (i) $relint(C) = relint(\tilde{C})$,
- (ii) $cl(C) = cl(\tilde{C})$,
- (iii) $relint(C) \subset \tilde{C} \subset cl(C)$.

22. Feladat. Legyen $C \subset \mathbb{R}^d$ konvex halmaz, illetve $\{C_i\}_{i \in I}$ konvex halmazok. Ekkor a következő halmazok is konvexek:

- (i) $\bigcap_{i \in I} C_i$,
- (ii) $C_1 + C_2 = \{x + y : x \in C_1, y \in C_2\}$
- (iii) $\lambda C = \{\lambda x : x \in C\}$, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén,
- (iv) C^{cl} ,

(v) C^{int} ,

(vi) $C^{rel-int}$,

(vii) $\pi_A(C)$, ahol π_A egy A affin altérre történő vetítés,

(viii) $f(C)$, illetve $f^{-1}(C)$, ahol $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ affin leképezés.

23. Feladat. Legyen $f_{a,b}(x) = a + bx + x^2$. Konvex-e a $\{(a,b) | f_{a,b}(0.37) \geq 1\}$ halmaz? Konvex-e a $\{(a,b) | f_{a,b}(x) \geq 1, \text{ ha } x \in [-1, 1]\}$ halmaz?

24. Feladat. Legyen $p_{x_1, \dots, x_m}(t) = x_1 \cos t + x_2 \cos 2t + \dots + x_m \cos mt$. Konvex-e az $\{x \in \mathbb{R}^m : |p_{x_1, \dots, x_m}(t)| < 1, \text{ ha } |t| \leq \pi/3\}$ halmaz?

25. Feladat. Igazoljuk, hogy az $\{x \in \mathbb{R}^m : x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m \preceq B\}$ halmaz konvex, ahol $A_1, \dots, A_m, B \in \mathcal{S}_n$.

★ ★ ★

26. Feladat. Legyen C egy konvex halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben.

(i) Legyen $z \notin C$. Ekkor van olyan H hipersík, hogy az általa meghatározott Γ^+ és Γ^- két zárt féltérre teljesül $C \subset \Gamma^+$ és $z \in \Gamma^-$.

(ii) Legyen $z \notin C^{\text{cl}}$. Ekkor van olyan H hipersík, hogy az általa meghatározott Γ^+ és Γ^- két nyílt féltérre teljesül $C \subset \Gamma^+$ és $z \in \Gamma^-$.

27. Feladat. Legyen $R \subset \mathbb{R}^d$, ekkor létezik egyetlen olyan $M = \text{conv}(R)$ halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyre

(i)_M $M \supset R$,

(ii)_M M konvex,

(iii) Minden olyan T halmaz, amely teljesíti az (i)_T és (ii)_T tulajdonságokat tartalmazza M -et.

Definíció. A fenti feladatban definiált M halmazt a R halmaz konvex burkának nevezzük.

28. Feladat. Ha R kompakt, akkor $\text{conv}(R)$ is kompakt.

4. Konvex kúpok

Definíció. $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_N x_N$$

lineáris kombinációt pontjaink kúp kombinációjának nevezzük, ha az α_i együtthatók nem negatívak.

Definíció. Egy $K \subset \mathbb{R}^d$ pontthalmaz kúp, ha zárt a kúp kombináció készésére.

29. Feladat. Legyen $R \subset \mathbb{R}^d$, ekkor létezik egyetlen olyan $M = \text{cone}(R)$ halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyre

(i)_M $M \supset R$,

(ii)_M M kúp,

(iii) Minden olyan T halmaz, amely teljesíti az (i)_T és (ii)_T tulajdonságokat tartalmazza M -et.

Definíció. A fenti feladatban definiált M halmazt a R halmaz által generált kúpnek nevezzük.

30. Feladat. Az alábbi halmazokról állapítsuk meg, hogy konvexek, affín alterek, kúpok, lineáris alterek-e.

(i) egyenesek,

(ii) hipersíkok,

(iii) félterek.

Legyünk tekintettel a fenti pontthalmazosztályok helyzetére.

31. Feladat. Legyen F egy origón átmenő hipersík által definiált egyik zárt féltér. Igazoljuk, F kúp.

32. Feladat. Igazoljuk, egy affín altér akkor és csak akkor kúp, ha lineáris altér is egyben.

33. Feladat. Igazoljuk, hogy $T = \{x : x_i \geq 0 \text{ minden } i \text{ esetén}\}$ kúp. Kúp-e $\{x : x_i > 0 \text{ minden } i \text{ esetén}\}$?

Igazoljuk, $\mathcal{S}_+$ kúp. Kúp-e $\mathcal{S}_{++}$?

34. Feladat. Igazoljuk, hogy $\text{int}(\mathcal{S}_+) = \mathcal{S}_{++}$.

Definíció. Legyen $h \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_d]$ egy homogén polinom. h hiperbolikus az $e \in \mathbb{R}^d$ vektorra, ha $h(e) > 0$ és $\tilde{h}_{x_0}(t) = h(x_0 - te)$ polinomnak minden $x_0 \in \mathbb{R}^d$ esetén az összes gyöke valós.

Legyen $H_e(h) = \{x_0 : h_{x_0}(t) \text{ összes gyöke pozitív}\}$.

35. Feladat. Legyen $h(x) = x_1 x_2 \dots x_d$. Ekkor $h(x)$ egy hiperbolikus polinom az $e = (1, 1, \dots, 1)$ vektorra. Határozzuk meg a $e(h)$ halmazt.

36. Feladat. Legyen $h(X) = \det(X)$, $X \in \mathcal{S}_n$ polinom. Ekkor $h(X)$ egy hiperbolikus polinom az $e = I$ vektorra. Határozzuk meg $H_I(\det)$ halmazt.

37. Feladat. Legyen h egy hiperbolikus polinom. Ekkor H_e egy konvex kúp belseje.

38. Feladat. Igazoljuk, kúpok metszete is kúp.

39. Feladat. Igazoljuk, a következők ekvivalensek:

(i) K egy véges pont/vektorhalmaz által generált kúp.

(ii) K véges sok origón átmenő hipersík által definiált zárt félterek metszete.

Definíció. Egy a fenti módon nyerhető kúpot végesen generált kúpnek nevezzük.

40. Feladat. Igazoljuk, a következők ekvivalensek:

(i) P véges sok zárt féltér metszete,

(ii) P egy politóp és végesen generált kúp összege.

5. Poliéderek, politópok

Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$\mathcal{P} = \{x : Ax \succeq b\}$$

alakú ponthalmazt poliédernek nevezzük. Azaz a poliéder egy véges sok lineáris egyenlőtlenséget tartalmazó rendszer megoldáshalmaza.

41. Feladat. Írjuk fel a kocka, tetraéder, oktaéder $\mathbb{R}^3$ -beli ponthalmazokat, mint egy egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza. A testjeink alakját, elhelyezkedését mi választhatjuk meg.

Legyen k a felíráshoz használt egyenlőtlenségek száma. Mi lesz k minimális értéke?

Írjuk fel a fenti testek 4-dimenziós változatát is.

42. Feladat. Oldjuk meg az előző feladatot d dimenzióban.

43. Feladat. Legyen $P \subset \mathbb{R}^d$ egy poliéder.

(i) Legyen π_A egy A affin altérre való vetítés. Ekkor $\pi_A(P)$ is poliéder.

(ii) Legyen $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ egy affin leképezés. Ekkor $\alpha(P)$ is poliéder.

(iii) Legyen $\alpha : \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^d$ egy affin leképezés. Ekkor $\alpha^{-1}(P)$ is poliéder.

44. Feladat. Legyen O_d a d -dimenziós oktaéder. Egy előző feladatban megállapítottuk, hány féltér metszeteként állítható elő O_d .

Keressünk $e > d$ dimenziót és $\hat{O} \subset \mathbb{R}^e$ poliédert, amely

(i) $3d$ féltér metszete,

(ii) O_d előáll mint $\hat{O}$ vetülete.

45. Feladat. Igazoljuk, hogy a poliéderek zárt és konvex halmazok.

46. Feladat. Igazoljuk, hogy egy zárt konvex halmaz, akkor és csak akkor nem korlátos, ha tartalmaz félegyenest.

47. Feladat. Igazoljuk, ha egy $\mathcal{P}$ zárt konvex halmaz nem korlátos, akkor minden pontjából indul ki $\mathcal{P}$ -ben haladó félegyenest.

48. Feladat. Igazoljuk, ha egy $\mathcal{P}$ zárt konvex halmaz tartalmaz egy v irányvektorú félegyenest, akkor minden pontjára igaz, hogy az abból induló v irányvektorú félegyenest $\mathcal{P}$ -be esik.

Definíció. Egy $\mathcal{P}$ poliéder politóp, ha korlátos.

49. Feladat. A következők ekvivalensek:

(i) P egy véges ponthalmaz konvex burka,

(ii) P politóp (korlátos és véges sok zárt féltér metszete).

50. Feladat. Milyen sok féltér metszése kellhet n pont konvex burkának előállításához? (Nem szükségszerűen vagyunk 2-dimenzióban.)

51. Feladat. Milyen sok pont konvex burkaként állhat elő n féltér korlátos metszete? (Nem szükségszerűen vagyunk 2-dimenzióban.)

52. Feladat. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$. Igazoljuk, ha a nem-üres $\mathcal{P} = \{x : Ax \succeq b\}$ poliéder politóp, akkor $k > n$.

Azaz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ esetén a nem-üres $\mathcal{P} = \{x : Ax \succeq b\}$ poliéder szükségszerűen nem-korlátos.

Definíció. $H = \{x : nx = \alpha\}$ hipersík a $\mathcal{P}$ poliéder támasz-hipersíkja, ha $H \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ és $\mathcal{P} \subset H_{\leq} = \{x : nx \leq \alpha\}$.

Vigyázat: A fenti definíció érzékeny a hipersíkot leíró egyenletre. $H' : -nx = -\alpha$ ugyanazt a ponthalmazt definiálja, de $H'_{\leq} = \{x : -nx \leq -\alpha\}$ teljesen más mint korábban.

53. Feladat. Legyen $\mathcal{P}$ egy poliéder, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Igazoljuk, hogy a következők ekvivalensek:

(i) Van $x_0 \in \mathcal{P}$ -n áthaladó támasz-hipersík.

(ii) x_0 tetszőleges környezetében van $\mathcal{P}$ -beli és $\mathcal{P}$ -n kívüli pont is.

Definíció. Az előző feladatban leírt pontok a poliéder határpontjai, halmazuk jelölése $\partial\mathcal{P}$.

Definíció. Legyen $x \in \partial\mathcal{P}$. Ekkor

$$C_x = \{n : \text{van olyan } \alpha, \text{ hogy } nx = \alpha \text{ támaszhipersík legyen}\}.$$

54. Feladat. $x \in \partial\mathcal{P}$ esetén C_x egy kúp.

55. Feladat. Legyen $\mathcal{P}$ egy poliéder, $x \in \mathcal{P}$. A következők ekvivalensek:

(i) Van olyan támaszhipersík, ami $\mathcal{P}$ -ből csak az x pontot tartalmazza.

(ii) $x \in \partial\mathcal{P}$ és C_x -nek van belső pontja.

(iii) Ha egy $\mathcal{P}$ -be eső ab szakasz tartalmazza x -et, akkor $a = b = x$ szükségszerű.

(iv) x nem írható fel mint más $\mathcal{P}$ -beli pontok konvex kombinációja.

Definíció. A fenti tulajdonságú x pontok $\mathcal{P}$ extrémális pontjai/csúcsai. Ezen pontok halmazának jelölése $\text{ext } \mathcal{P}$.

56. Feladat. Legyen P egy zárt, korlátos halmaz. Ekkor $\text{ext } P$ nem üres.

57. Feladat. Legyen P egy zárt, korlátos konvex halmaz. Ekkor $P = \text{conv}(\{P : P \in \text{ext } \mathcal{P}\})$.

58. Feladat. Legyen P egy zárt, korlátos konvex halmaz. P akkor és csak politóp, ha $\text{ext } P$ egy véges halmaz.