

1. Konvex függvények

Definíció. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, ha $\text{dom}(f) := D \subset \mathbb{R}^n$ konvex és tetszőleges $x, y \in \text{dom}(f)$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Ha $\lambda \in (0, 1)$ esetén szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex.

1. Feladat. Legyen f egy konvex függvény. Igazoljuk, hogy ha x_0 egy lokális minimumhelye f -nek, akkor globális minimumhelye is egyben.

Ha f szigorúan konvex, akkor minimumhelye (amennyiben létezik) egyértelmű.

2. Feladat. Minden nyílt halmazon értelmezett konvex függvény folytonos. Igaz marad-e az állítás, ha nem tesszük fel az értelmezési tartomány nyíltságát?

3. Feladat. Legyen $f : D(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ egy konvex függvény, ahol D nyílt halmaz. Ekkor minden $x_0 \in D$ pontban f -nek létezik bal oldali és jobb oldali deriváltja. Továbbá f megszámlálhatóan végtelen pont kivételével differenciálható.

4. Feladat (Jensen-egyenlőtlenség, diszkrét forma). Igazoljuk, hogy egy f konvex függvényre teljesül, hogy minden $x_1, x_2, \dots, x_N \in \text{dom} f$ esetén

$$f\left(\sum_{i=1}^N \theta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \theta_i f(x_i),$$

ahol a θ_i számok egy konvex kombináció együtthatói, azaz $\theta_i \in [0, 1]$ és $\sum \theta_i = 1$.

Igazoljuk, ha $\text{dom} f$ konvex, akkor a fenti állítás megfordítható.

5. Feladat (Jensen-egyenlőtlenség, folytonos forma). Legyen X egy valószínűségi számítási változó, amely értékét $\text{dom} f$ -ből veszi, ahol f egy konvex függvény. Ekkor

$$f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X).$$

Definíció. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Ekkor f gráfja/grafikonja

$$\text{gr}(f) = \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- Ekkor f epigráfja

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) : x \in D, y \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

6. Feladat. Legyen $f(x) = x^2$, a konvex függvények alappéldája. A következő halmazok közül melyek konvexek? $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \geq 1\}$, $\{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x, y) | y \geq f(x)\}$. Az igen válaszok alapján sejtünk meg általános szabályokat és igazoljuk is azokat (amennyiben sejtésünk helyes).

7. Feladat. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^d$. Igazoljuk, hogy a következő ekvivalensek:

- (i) f konvex,
- (ii) $\text{epi}(f)$ konvex halmaz,
- (iii) $f|_\ell : \ell \cap D \rightarrow \mathbb{R}$ konvex minden ℓ egyenesre.

8. Feladat. Igazoljuk, hogy konvex f függvényre

$$\{x : f(x) \leq \alpha\} \text{ konvex ponthalmaz minden } \alpha \text{ valós számra.}$$

Ekvivalens-e ez a tulajdonság a konvexitással?

Definíció. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f differenciálható, ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, továbbá van olyan $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény (gradiens függvény), hogy

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f|_{x_0}^T (x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \text{ minden } x_0 \in D \text{ esetén.}$$

9. Feladat. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható. A következők ekvivalensek:

- (i) f konvex,
- (ii) $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f|_{x_0}^T (x - x_0)$, minden $x_0 \in D$ esetén
- (iii) $f(x) = \max\{\ell(x) : \ell \in \mathcal{A} \text{ és } \ell(x) \leq f(x)\}$, ahol $\mathcal{A}$ affin $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmaza.

Definíció. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f kétszeresen differenciálható, ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, továbbá minden $x \in \text{dom}(f)$ esetén ∇^2 (Hesse-mátrix) létezik.

10. Feladat. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kétszeresen differenciálható, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt konvex halmaz. Ekkor f akkor és csak akkor konvex, ha minden $x \in \text{dom}(f)$ esetén $\nabla^2 \succeq 0$.

11. Feladat. Legyen $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Számoljuk ki $f''(x)$ -et. Konvex-e f ?

12. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^n$ a

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + c$$

hozzárendeléssel adott, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Számoljuk ki ∇f -et és $\nabla^2 f$ -et.

13. Feladat. Igazoljuk, hogy a következő függvények konvexek:

- (i) $f(x) = ax + b$, $D = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- (ii) $f(x) = a^T x + b$, $D = \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$,

- (iii) $f(x) = e^{ax}$, $D = \mathbb{R}$,
- (iv) $f(x) = x^\alpha$, $D = \mathbb{R}_{++}$, $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$,
- (v) $f(x) = x^\beta$, $D = \mathbb{R}$, $\beta \in [1, \infty)$,
- (vi) $f(x) = x \log x$, $D = \mathbb{R}_{>0}$,
- (vii) $f(x) = \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$, $D = \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$
- (viii) $f(x) = \|x\|_\infty = \max\{|x_k| : k = 1, 2, \dots, n\}$, $D = \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$,
- (ix) $f(X) = \text{tr}(A^T X) + b$, $D = \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$,
- (x) $f(X) = \sqrt{\lambda_{\max}(X^T X)}$, $D = \mathbb{R}^{n \times m}$,
- (xi) $f(X) = \log \det X$, $X \in \mathbb{S}_{++}^n (\subset \mathbb{R}^{n \times n})$,
- (xii) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$, $D = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$,
- (xiii) $f(x) = \log(\sum_{k=1}^n \exp x_k)$, $D = \mathbb{R}^n$,
- (xiv) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$, $D = \mathbb{R}^2 \cap \{y : y > 0\}$,
- (xv) $x \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen $f_k(x)$ az x vektor koordinátái közül a k legnagyobb összege,
- (xvi) $f(x) = \max\{a_1^T x + b_1, a_2^T x + b_2, \dots, a_N^T x + b_M\}$.

Definíció. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény — ahol $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz — *konkáv*, ha $-f$ konvex.

14. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő függvények konkávok:*

- (i) $f(x) = ax + b$, $D = \mathbb{R}$,
- (ii) $f(x) = x^\alpha$, $D = \mathbb{R}_{++}$, $\alpha \in (0, 1)$,
- (iii) $f(x) = \log x$, $D = \mathbb{R}_{++}$,
- (iv) $f(x) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$, $x \in \mathbb{R}_{++}^n$.

15. Feladat. *A következő operációk megőrzik a konvexitást:*

- (i) *Nemnegatív számmal való szorzás, azaz ha f konvex, $\lambda \geq 0$, akkor λf is konvex.*
- (ii) *Összegzés, azaz ha f_1 és f_2 konvex, akkor $f_1 + f_2$ is az.*
- (iii) *$f(x, y_0)$ konvex minden $y_0 \in A$ esetén, $w(y_0) \geq 0$ minden $y_0 \in A$ esetén. Ekkor*

$$\int_A w(y) f(x, y) dy$$

is konvex, amennyiben az integrál létezik.

(iv) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $b \in \mathbb{R}^n$, akkor legyen

$$g(x) = f(Ax + b),$$

ahol $\text{dom}(g) = \{x : Ax + b \in \text{dom}(f)\}$. Ekkor g is konvex.

(v) Legyen f_1 és f_2 is konvex. Ekkor $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ is konvex.

(vi) Legyenek f_i ($i \in I$) konvex függvények, ahol $I \subset \mathbb{R}^k$ konvex halmaz. Ekkor $f(x) = \sup\{f_i(x) : i \in I\}$ is konvex függvény.

16. Feladat. (i) Legyen f_1 és f_2 is konvex. Ekkor állíthatjuk-e, hogy $f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$ is konvex?

(ii) Legyen $f(x, y)$ konvex. Ekkor $f(x) = \inf\{f(x, y) : y\}$ is konvex függvény.

Definíció. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ f alúlról féligfolytonos, ha minden $x, \{x_i\}_{i=0}^\infty \in D$ esetén, ha $x_i \rightarrow x$ ($i \rightarrow \infty$), akkor

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k).$$

17. Feladat. A következők ekvivalensek:

(i) Az $\{x \in : f(x) \leq a\}$ színhalmazok zártak minden $a \in \mathbb{R}$ esetén,

(ii) f alúlról féligfolytonos,

(iii) $\text{epi}(f)$ zárt.

2. Kvázikonvex függvények

Definíció. $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ esetén az f függvény kvázikonvex, ha $\text{dom} f = D$ konvex és minden α valós számra

$$S_\alpha = \{x \in \text{dom} f : f(x) \leq \alpha\}$$

konvex halmaz.

f kvázikonkáv függvény, ha $-f$ kvázikonvex.

18. Feladat. Igazoljuk, hogy minden konvex függvény kvázikonvex. Igaz-e az állítás megfordítása? (Igenlő válaszunkat bizonyítsuk, nemleges válaszunkat példával támasszuk alá.)

19. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi függvények, konvexek, konkávok, kvázikonvexek vagy kvázikonkávok:

(i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lceil x \rceil$.

(ii) $f : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log x$.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.

(iv) $f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.

- (v) $f : \text{dom} f (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$, ahol $\text{dom} f = \{x : c^T x + d > 0\}$.
- (vi) Legyen $a \neq b \in \mathbb{R}^n$. Legyen $\mathcal{D} = \{x : |x - a| < |x - b|\} \subset \mathbb{R}^n$. $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x \mapsto \frac{|x-a|}{|x-b|}$.
- (vii) $X \in \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{rk } X$.
- (viii) $X \in \mathcal{S}_+^n \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{rk } X$.
- (ix) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max\{i : x_i \neq 0\}$ ($\max \emptyset = 0$).
- (x) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |\{i : x_i \neq 0\}|$.
- (xi) $f : \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |\{i : x_i \neq 0\}|$.

Definíció. Legyen f egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.

f $\vee$ -unimodális, ha van olyan $m \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, hogy f monoton csökkenő $(-\infty, m)$ -en és monoton növekvő (m, ∞) -en. Továbbá, ha m véges, akkor m egy minimum helye f -nek.

f $\wedge$ -unimodális, ha van olyan $m \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, hogy f monoton növekvő $(-\infty, m)$ -en és monoton csökkenő (m, ∞) -en. Továbbá, ha m véges, akkor m egy maximum helye f -nek.

20. Feladat. Igazoljuk, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, akkor és csak akkor kvázikonvex, ha $\vee$ -unimodális. Továbbá egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, akkor és csak akkor kvázikonkáv, ha $\wedge$ -unimodális.

21. Feladat (Kvázikonvex Jensen-egyenlőtlenség). Igazoljuk, hogy egy f kvázikonvex függvényre teljesül, hogy minden $x, y \in \text{dom} f$ és $\theta \in [0, 1]$ esetén

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

Igazoljuk, ha $\text{dom} f$ konvex, akkor a fenti állítás megfordítható.

Találjuk ki és igazoljuk a kvázikonkáv függvényekre vonatkozó Jensen-egyenlőtlenséget.

22. Feladat. Igazoljuk, hogy f akkor és csak akkor kvázikonvex, ha minden ℓ egyenesre $f|_\ell$ kvázikonvex.

23. Feladat. Legyen f egy differenciálható függvény (speciálisan $\text{dom} f$ nyílt halmaz). Tegyük fel, hogy $\text{dom} f$ konvex. Igazoljuk, f akkor és csak akkor kvázikonvex, ha minden $x, y \in \text{dom} f$ -re teljesül, hogy

$$f(y) \leq f(x) \text{ esetén } (\nabla f)|_x^T (y - x) \leq 0.$$