HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

6. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter

2010. március 9.

Alap összefüggések az optimalizálási paraméterek között

Emlékeztető. $\tau(\mathcal{H}), \tau^*(\mathcal{H}), \nu(\mathcal{H}), \nu^*(\mathcal{H})$.

Példa. Legyen $\mathcal{H} = \binom{V}{k}$. $\nu(\mathcal{H}) = \lfloor\frac{|V|}{k}\rfloor$, $\tau(\mathcal{H}) = |V| - (k-1)$. Egy tört-lefogást kapunk, ha minden csúcsnak $1/k$ súlyt adunk. Egy tört párosítást kapunk, ha minden élnek $1/\binom{|V|-1}{k-1}$ súlyt adunk. A fenti két tört-méret megegyezik, így optimális: $\nu^*(\mathcal{H}) = \tau^*(\mathcal{H}) = |V|/k$.

A fenti példában τ és ν között nagy különbség van. Bizonyos értelemben példánk közel extremális.

Észrevétel. Legyen $\mathcal{M}$ egy nem bővíthető párosítás. Ekkor $\cup_{E\in\mathcal{M}}E$ egy lefogó halmaz. Ha $\mathcal{H}$ egy k-uniform halmazrendszere és $\mathcal{M}$ egy optimális párosítás, akkor kapjuk, hogy $\tau(\mathcal{H}) \leq k\cdot\nu(\mathcal{H})$.

Példa. Legyen $\mathcal{H}$ egy k paraméterű projektív sík. (Aki nem ismeri ugorja át ezt a példát.) Ez egy $k+1$-uniform halmazrendszer, amiben nincs két független él, azaz $\nu(\mathcal{H}) = 1$. $\tau(\mathcal{H}) = k+1$, hiszen bármelyik egyenes/él ponthalmaza lefogó halmaz, míg k pont legfeljebb $k\cdot(k+1)$ élt/egyenest foghat le. A csúcsok uniform $1/(k+1)$-es súlyozása tört-lefogás. Az élek uniform $1/(k+1)$-es súlyozása tört-párosítás. A közös méret optimális: $\nu^*(\mathcal{H}) = \tau^*(\mathcal{H}) = |V|/k$.

A fenti két példában az optimális tört-lefogás és tört-párosítások minden csúcsnak/élnak ugyanazt a súlyt adja. Ez általában működik, ha a közös súlyt megfelelően választjuk. Lefogásnál a „szűk keresztmetszet” a legkisebb él. A párosításnál a „szűk keresztmetszet” a legnagyobb fokú csúcs. Ez a gondolatmenet vezet el az alábbi paraméterek bevezetéséhez és lemmához.

Definíció. $\mathcal{H}$ halmazrendszer esetén legyen $s(\mathcal{H})$ a legkisebb él mérete és $\Delta(\mathcal{H})$ a legnagyobb fokszám $\mathcal{H}$-ban.

1. Lemma. *(i)*

$$\frac{|\mathcal{H}|}{\Delta(\mathcal{H})} \leq \nu^*(\mathcal{H}),$$

(ii)

$$\tau^*(\mathcal{H}) \leq \frac{|V|}{s(\mathcal{H})}.$$

Ezen egyszerű gondolatmenetnek két következményt említünk meg.

2. Következmény. *Ha $\mathcal{H}$ egy k-uniform, d-reguláris halmazrendszer, akkor*

$$\tau^*(\mathcal{H}) = \frac{|V|}{s(\mathcal{H})} = \frac{|\mathcal{H}|}{\Delta(\mathcal{H})} = \nu^*(\mathcal{H}).$$

Bizonyítás. Az első és utolsó egyenlőtlenség bal oldala nem nagyobb mint a jobb oldala. Ha ezt a középső egyenlóségről is belátjuk, akkor az állítás adódik abból, hogy az egyenlőségsorozat kezdő és befejező eleme egyenlő.

A középső egyenlőség

$$k|\mathcal{H}| = \sum_{E \in \mathcal{H}} |E| = \sum_{v \in V} d(v) = d \cdot |V|$$

alapján nyilvánvaló. ■

3. Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer, legyen $Aut(\mathcal{H})$ automorfizmus-csoportja (csúcsainak azon permutációi áltla alkotott csoport, amelyek megtartják az élséget/nem élséget).*

(i) Ha $Aut(\mathcal{H})$ tranzitíven hat a csúcsokon, akkor $\tau^*(\mathcal{H}) = \frac{|V|}{s(\mathcal{H})}$.

(ii) Ha $Aut(\mathcal{H})$ tranzitíven hat az éleken, akkor $\nu^*(\mathcal{H}) = \frac{|\mathcal{H}|}{\Delta(\mathcal{H})}$.

Bizonyítás. (i): Legyen $(w_v))v \in V$ egy otpimális tört-lefogás. Legyen

$$\widetilde{w}_v = \frac{\sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})} w_{\varphi^{-1}v}}{|\mathrm{Aut}(\mathcal{H})|}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $\widetilde{w}$ mérete ugyanaz mint w-é, azaz optimális. Továbbá minden komponense ugyanaz (Aut($\mathcal{H}$) bámely eleme változatlan hagyja). Így a közös komponensértéke legalább $\frac{1}{s(\mathcal{H})}$, mérete (amiről tudjuk, hogy $\tau^*(\mathcal{H})$) legalább $\frac{|V|}{s(\mathcal{H})}$. A másik irányú egyenlőtlenséget tudva az állítás adódik.

(ii) teljesen hasonlóan bizonyítható. ■

Mohó lefogási algoritmus

$\tau(\mathcal{H})$ meghatározása helyett megelégedhetünk egy „elég kicsi" lefogó halmazt. A mohó algoritmus tervezési filozófia könnyen alkalmazható:

Mohó lefogó algoritmus:

- Kiindulás: Legyen $\mathcal{H}_{\text{aktuális}} = \mathcal{H}$, $L = \emptyset$, $M = V$.
- Amíg $\mathcal{H}_{\text{aktuális}}$-nak van éle ismételjük a következő fázist:
  - Kiválasztás: Legyen v a $\mathcal{H}_{\text{aktuális}}$ egy legnagyobb fokú csúcsa. $L := L \cup \{v\}$,
  - Csonkítás: $\mathcal{H}_{\text{aktuális}}$-ből hagyjuk el a v-t tartalmazó éleket.
- Output: a leálláskor (amikor $\mathcal{H}_{\text{aktuális}}$ „kiürül") az L halmaz értéke.

Az, hogy a fenti algoritmus egy lefogó ponthalmazt számol ki az nyilvánvaló: L mindig pontosan $\mathcal{H}_{\text{aktuális}}$-beli éleket nem fogja le.

Definíció. Legyen $\tau_{\text{mohó}}(\mathcal{H})$ a fenti algoritmus által kiszámolt lefogó ponthalmaz mérete.

Megjegyezzük, hogy a fenti definíció nem teljesen pontos. Az eljárás egy ponton választ egy legnagyobb fokú pontot. Lehet, hogy több ilyen van. Aktuális halmazrendszerünk lehet reguláris is, amikor bármelyik pontot vehetjük. Úgy nevezett nem determinisztikus eljárással van dolgunk. Az otuput mérete függhet a futás során meghozott döntéseinktől. Ha a fenti jelölést használjuk egy egyenlőtlenségben, akkor az alatt azt értjük, hogy az állításunk igaz minden futás során kiszámolt lefogó ponthalmaz méretére.

A fenti nagyon egyszerű algoritmus analízise nem olyan egyszerű.

4. Tétel (Lovász László).

$$\frac{\tau_{moh\acute{o}}}{\tau(\mathcal{H})} \leq \frac{\tau_{moh\acute{o}}}{\tau^*(\mathcal{H})} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\Delta(\mathcal{H})} \leq 1 + \ln \Delta(\mathcal{H}).$$

Bizonyítás. Legyen ℓ a fázisok száma, azaz a végső L mérete, azaz $\tau_{\text{mohó}}$.

Legyen $\mathcal{H}_1$ az eredeti halamzrendszer és legyen $\mathcal{H}_{i+1}$ az i-edik fázisban, a csonkítás után kapott halmazrendszer. Tegyük fel, hogy ezen csonkítás során d_i élt hagytunk el. Azaz $\Delta(\mathcal{H}) = d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_\ell \geq 1$, $\mathcal{H}_{i+1}$-et $\mathcal{H}_i$-ből kapjuk d_i él elhagyásával $|\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i+1}| = d_i$ és $\mathcal{H}_{\ell+1} = \emptyset$.

Ekkor

$$\begin{aligned}
\tau_{\text{mohó}}(\mathcal{H}) =& \ell = \sum_{i=1}^{\ell} 1 = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{|\mathcal{H}_i - \mathcal{H}_{i+1}|}{d_i} = \\
=& |\mathcal{H}_1| \cdot \frac{1}{d_1} + \sum_{i=2}^{\ell} |\mathcal{H}_i| \cdot \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i-1}} \right) \\
=& \frac{|\mathcal{H}_1|}{d_1} + \sum_{i=2}^{\ell} \frac{|\mathcal{H}_i|}{d_i} \cdot \frac{d_{i-1} - d_i}{d_{i-1}} \leq \\
=& \tau^*(\mathcal{H}) + \sum_{i=2}^{\ell} \tau^*(\mathcal{H}) \cdot \left(\frac{1}{d_{i-1}} + \frac{1}{d_{i-1} - 1} + \frac{1}{d_{i-1} - 2} + \ldots + \frac{1}{d_i + 1} \right).
\end{aligned}$$

Hiszen mindegyik $\frac{|\mathcal{H}_i|}{d_i}$ mennyiség felülről becsülhető $\nu^*(\mathcal{H})$-val (a $\mathcal{H}_i$-beli élek $1/d_i$ súlyozása, a többi él 0 súlyozása a $\mathcal{H}$ halmazrendszer egy tört-párosítása). Továbbá

$$\frac{d_{i-1} - d_i}{d_{i-1}} = \frac{1}{d_{i-1}} + \frac{1}{d_{i-1}} + \frac{1}{d_{i-1}} + \ldots + \frac{1}{d_{i-1}} \leq \frac{1}{d_{i-1}} + \frac{1}{d_{i-1} - 1} + \frac{1}{d_{i-1} - 2} + \ldots + \frac{1}{d_i + 1}.$$

A bizonyított egynlőtlenségláncolát rendezés után a bizonyítandót adja ($d_1 = \Delta(\mathcal{H})$ és $d_\ell \geq 1$). ■

τ-kritikus halmazrendszerek

Egy észrevétellel kezdünk. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer és E egy éle. Ekkor $\tau(\mathcal{H}) \geq \tau(\mathcal{H} - E) \geq \tau(\mathcal{H}) - 1$.

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszert akkor nevezünk τ-kritikusnak, ha bármely élét elhagyva a τ paraméter értéke változik/csökken/eggyel csökken.

Vegyük észre, hogy egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer mindig tartalmaz olyan $\mathcal{K}$ részt, amely

- $\tau(\mathcal{K}) = \tau(\mathcal{H})$,
- $\mathcal{K}$ τ-kritikus.

Ehhez csak addig kell éleket elhagyni, amíg τ változtatása nélkül lehetséges.

Példa. C_{2k+1}, a páratlan hosszú körgráfok τ-kritikusak: $\tau(C_{2k+1}) = k+1$ és minden e élére $\tau(C_{2k+1} - e) = k$.

A τ-kritikus gráfok elméletében az alábbi tétel fontos kiindulás.

5. Tétel. *Legyen G páros gráf. G akkor és csak akkor τ-kritikus gráf, ha minden komponense két összekötött pontból vagy egy izolált pontból áll.*

A tétel egyik iránya nyilvánvaló. Ha a gráf minden nem egy pontú komponense egy összekötött csúcspár, akkor τ paramétere ezen komponensek (azaz az élek) száma. Élelhagyás a τ paramétert csökkenti. A másik irány távolról sem egyszerű. Ezt mutatja, hogy Kőnig alábbi alapvető fontosságú tétele egyszerű következménye.

6. Következmény (Kőnig-tétel). *Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

Bizonyítás. (A következményé.) Legyen K egy τ-kritikus részgráfja G-nek. Ekkor

$$\tau(G) \geq \nu(G) \geq \nu(K) = \tau(K) = \tau(G).$$

Valóban: Csak az utolsó előtti és utolsó egyenlőség szorul magyarázatra. Az utolsó előtti egyenlőség nyilvánvaló abból, hogy tételünk leírja K struktúráját. Az utolsó egyenlőség pedig a τ-kritikus részgráfság definíciója miatt nyilvánvaló.

Az egyenlőtlenségsorozat kezdete és vége megegyezik, így végig egyenlőséggel teljesül. Ebből adódik az állítás. ∎

Bizonyítás. (A tételé.) Indirekten bizonyítunk. Ha G struktúrája nem a leírt, akkor van két összefutó éle: $e = uv$ és $f = uw$.

Legyen $t+1 = \tau(G)$. Tudjuk, hogy $G-e$-ben és $G-f$-ben is van t elemű lefogó ponthalmaz: L_e és L_f. L_e nem foghatja le e-t és L_f nem foghatja le f-et (G teljes lefogásához $t+1$ pont kell). Így $u \notin L_e, L_f$ és emiatt $v \in L_f, w \in L_e$. Legyen $\widetilde{L}$ egy ponthalmaz, amit L_e és L_f-ből rakunk össze. Halmazunkat két rész adja ki az alábbi módon:

- $L_e \cap L_f$,
- $\{u\} \cup (L_e \Delta L_f)$ ponthalmaz eloszlását nézzük meg G két színosztálya között. Valamelyik színosztályba kevesebb eleme esik (könnyű látni, hogy teljes elemszáma páratlan). Ez a kisebb rész alkotja $\widetilde{L}$ második összetevőjét.

Két dolgot kell meggondolnunk:

a) $|\widetilde{L}| \leq t$,

b) $\widetilde{L}$ lefogja G-t.

Mindkettő egyszerűen meggondolható. Együtt ellentmondanak feltételeinknek és így bizonyítják a tételt. $\blacksquare$