Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Síkgráfok

2018. Előadó: Hajnal Péter

Egy G *gráf* ρ *lerajzolása* egy (ρ_V, ρ_E) leképzés-pár, ahol a következők teljesülnek: $\rho_V : V(G) \to \mathbb{R}^2$ injenktív függvény, azaz a gráf minden csúcsához a sík egy-egy pontját rendeljük úgy, hogy különböző csúcsokhoz különböző pontok tartozzanak. A leképzés értékkészletének pontjaira mint *csúcspontok* hivatkozunk. $\rho_E : E(G) \to \mathcal{J}$, ahol $\mathcal{J}$ a sík folytonos, egyszerű (önmagát át nem metsző) görbéi. erről feltesszük, hogy $e = xy$ esetén a $\rho_E(e)$ görbe a $\rho_V(x)$ és $\rho_V(y)$ csúcspontokat köti össze és más csúcsponton nem is halad át. A leképzés értékkészletének görbéire mint *élgörbék* hivatkozunk. Feltesszük, hogy két élgörbének véges sok közös pontja van. Továbbá ezek a közös pontok vagy közös végpontok, vagy átmetszések.

Emlékeztető. Egy gráf szépen síkrarajzolható, ha lerajzolható úgy, hogy semelyik két élgörbéknek a lehetséges közös végponton kívül nincs más közös pontja.

Egy gráf síkgráf, ha van szép síkrarajzolása.

Nem soká látni fogjuk, hogy minden gráf síkgráf.

1. Tartományok és határaik

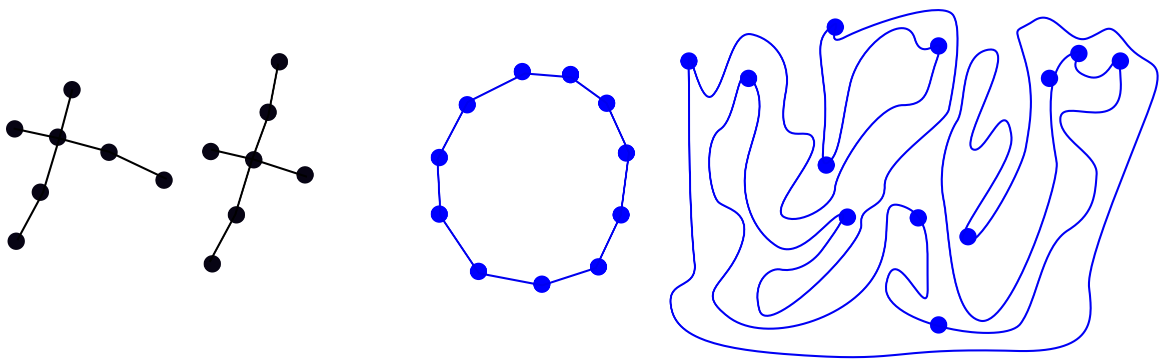
Egy G szépen síkrarajzolt gráf a síkot tartományokra osztja. A tartomány egy szemléletes fogalom pontos definíciója nem nehéz: A sík élgörbék által le nem fedett pontjai között bevezetünk egy relációt: $P \sim Q$, ha van olyan PQ folytonos görbe, amely elkerüli az élgörbéket. Ez egy ekvivalencireláció. Ekvivalenciaosztályai ponthalmazok, a lerajzolás tartományai.

Erről szó volt már a síkgráfok tartomány színezéseinél, ahol bevezettük a duális gráf és lerajzolása fogalmát.

1. Tétel. *Legyen G egy tetszőleges körmentes gráf és λ egy szép lerajzolása. Ekkor egyetlen tartomány van.*

2. Tétel. *Legyen C_n az n pontú (és n élű) körgráf és λ egy szép lerajzolása. Ekkor pontosan két tartomány van: egy korlátos ($\equiv$ belső) és egy nem korlátos ($\equiv$ külső). Továbbá a lerjazolás topológiai értelemben egyértelmű.*

Az egyértelműség rész magyarázatra szorul. Egy $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképzés homeomorfia (topologikus izomorfia, ha bijekció és $h, h^{<-1>}$ is folytonos). Egy ilyen H-ra úgy gondolunk mint a sík egy folytonos deformációjára. Két lerajzolás topologikusan ugyanaz, ga a sík egy alkalmas homeomorfizmusa két lerajzolás megfelelő csúcspontjai és élgörbéi között is megfeleltetést létesít.



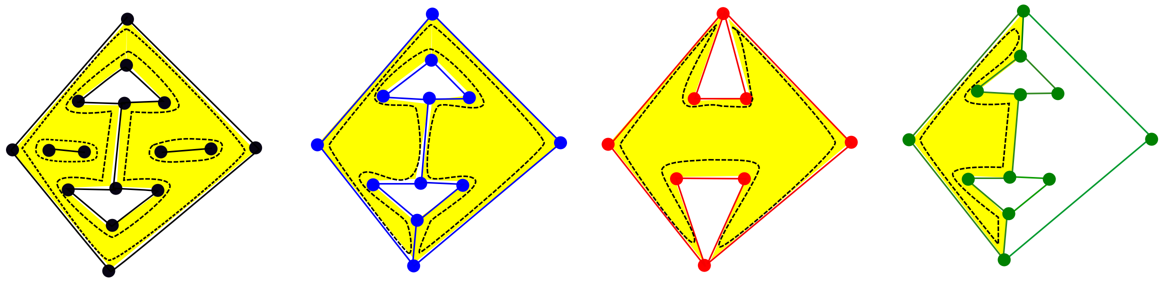
1. ábra. A baloldalon ugyanazon fa két topologikusan nem ekvivalens (miért?) lerajzolását látjuk (fekete ábra). A jobb oldalon ugyanazon kör két topologikusan ekvivalens lerajzolását látjuk (kék ábra). Azonosítsuk a jobb oldali lerajzolás belső tartományát.

A két tétel triviálisnak tűnik. A második tétel neve Jordan—Schönflies-tétel és nem olyan egyszerű mint első látásra tűnik. (Az említett tétel egyértelműség nélküli része a nevezetes Jordan-féle görbe-tétel.) Vigyázni kell a tárgyalással: a pontos tárgyalás nehézkes és nem kombinatorikus. A pongyola tárgyalás veszélyes.

A fenti két tételt elfogadjuk, nem bizonyítjuk.

Definíció. Egy G gráf λ szép lerajzolásában vegyünk egy τ tartományt. Egy e élgörbe a tartomány *határéle*, ha az élgörbe egy pontjának minden környezete belemetsz a tartományba.

A határéleknél fontosabb és nehezebb fogalom a határ fogalma. Szemléletesen a lerajzolást képzeljük el mint egy kerítés rendszer felülnézeti képe. Képzeljük magunkat az egyik tartomány beleséjébe. Menjünk az egyik határélhez, tegyük rá kezünket és járjuk körbe a tartományt. Ezzel egy ZÁRÓDÓ sétát járunk be. Elképzelhető, hogy nem mindegyik határélt érintettük. Ekkor további sétát teszünk egy, még nem érintett határélből kiindulva és ezt tesszük addig amíg az összes határélt bejártuk. A határ formálisan egy séta-halmaz. A határ hossza a séták hosszának összege, nem szükségszerűen azonos a határélek számával. A formális definíció helyett egy példát mutatunk:



2. ábra. Az ábra négy lerajzolást mutat négy színben. Mindegyik esetben kiemeltünk egy sárga τ tartományt és ennek szaggatott vonallal rajzolt határát, kissé elmozgatva a tartomány belsejébe a határtól. A fekete lerajzolás gráfja nem összefüggő, τ határa négy sétából áll. A kék lerajzolás gráfja összefüggő, de tartalmaz elvágó élt. Minden tartomány határa egyetlen séta. τ határában van él és csúcs ismétlődés is. A piros lerajzolás gráfja összefüggő, nincs benne elvágó él, de van benne elvágó pont. Minden határ egyetlen egy vonal, de τ határában van csúcs ismétlődés. A zöld lerajzolás gráfja összefüggő, nincs benne elvágó csúcs, elvágó él. Minden határ egy kör.

Megjegyezzük, hogy egy τ tartomány határélei pontosan a duális gráf τ^* csúcsára illeszkedő e^* élek eredeti megfelelő élei. Az eredeti e elvágoélek e^* hurokéleknek felenek meg a duálisban. Ahogy ezek az e^* hurokélek a duális gráf τ^* csúcsának fokához kettővel járulnak hozzá, úgy az eredeti e él is kettővel járul hozzá a τ tartomány határának hosszához. A τ tartomány határának hossza pontosan a duális τ^* csúcsának foka.

A példában szereplő megállapítások általános észrevételek speciális esetei. Ezeket bizonyítás nélkül mondjuk ki.

Észrevétel. Ha G izoláltcsúcs-nélküli nem összefüggő gráf egy szép lerajzolással, akkor van olyan tartománya, amely határélei között két komponensből is vannak pontok. Ekkor ezen tartomány határa több sétából áll.

Megfordítva, ha G összefüggő egy szép lerajzolással, akkor minden tartományának határa egyetlen séta.

Észrevétel. Ha G egy összefüggő e elvágó élt tartalmazó gráf, akkor azon tartományának határa, amelyhez e határél egy olyan séta, amelyen az e él ismétlódik.

Megfordítva, ha G egy összefüggő elvágó él nélküli gráf, akkor minden tartományának határa egyetlen vonal.

Észrevétel. Ha G egy összefüggő v elvágó csúcsot tartalmazó gráf, akkor van olyan tartománya amely határán a v csúcs ismétlódik.

Megfordítva, ha G egy összefüggő elvágó csúcs nélküli gráf, akkor minden tartományának határa egyetlen kör.

$\star$

Végül megemlítjük hogyan néznek ki a rövid határú tartományok.

- Ha v egy izolált pont, akkor v csúcspontja $G - v$ lerajzolásában egy tartományának belső pontja. Ez a tartomány G lerajzolásában is szerepel és határához v egy 0 hosszú sétát ad, azaz hosszát nem növeli. Ha G nem tartalmaz élt (minden csúcsa izolált), akkor egyetlen tartománya van, amely hossza 0.
- Ha egy tartomány határa egy 1 hosszú séta, akkor az egyetlen hurokél (élgörbéje egy záródó Jordan-görbe)
- Ha egy tartomány határa egy 2 hosszú séta, akkor az vagy egy párhuzamos élpár, vagy egy él oda-vissza bejárása. A második esetben az egész gráf két pont és egy összekötő él által alkotott gráf.

Könnyű látni, hogy páros gráf esetén minden tartomány határa páros hosszú. Igazából egy páros gráfban minden záródó séta páros hosszú.

Összefoglalva kimondhatjuk a következő állítást.

Észrevétel. (i) Ha G egy legalább három pontú, egyszerű, összefüggő gráf, akkor minden tartományának határa legalább 3 hosszú.

(ii) Ha G egy legalább három pontú, egyszerű, összefüggő, páros gráf, akkor minden tartományának határa legalább 4 hosszú.

2. Euler tétele

3. Tétel (Euler tétele). *Legyen G összefüggő, szépen síkrarajzolt gráf (λ a szép lerajzolás). Ekkor*

$$|T(G, \lambda)| + |E(G)| + |V(G)| = 2,$$

ahol $T(G, \lambda)$ a tartományok/országok halmaza.

1. Bizonyítás: (Indukció.) G összefüggő így gondolhatunk rá mint egy feszítőfa, amelyhez további éleket adtunk hozzá (új csúcsok bevezetése nélkül).

A hozzáadott élek h száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

Ha $h = 0$, akkor gráfunk egy fa, azaz $T(G, \lambda) = 1$ és $E(G) = |V(G)| - 1$. Az állítás egyszerű számtan.

Hogy viselkednek paramétereink, ha G felépítése közben egy R feszítő részgráfban két csúcs között behúzunk egy élt (legyen R^+ a bővített gráf). Nyilván

$$|V(R^+)| = |V(R)|, \qquad |E(R^+)| = |E(R)| + 1, \qquad |T(R^+, \rho^+)| = |T(R, \rho)| + 1,$$

ahol ρ a λ szép lerajzolás megszorítása R-re, míg ρ^+ a ρ lerajzolás kiterjesztése a hozzáadott él élgörbéjével. Csak az utolsó egyenlőség szorul magyarázatra: Az új él egyetlen régi tartományon belül halad (szép lerajzolással dolgozunk). A Jordan-tételre való hivatkozással adódik, hogy ezt a tartományt ketté osztja az új élgörbe.

2. Bizonyítás: (Dualizálás.) Legyen G a tételbeli gráf és λ a szép lerajzolása. Tudjuk, hogy bevezethető a G^* duális gráf és ennek egy λ^* lerajzolása. Minden $e \in E(G)$ élnek van egy e^* párja a duális gráfban.

G összefüggő, így van egy T feszítőfája. Legyen

$$F = \{e \in E(G) : e \in E(T)\} = E(T), \qquad F^* = \{e \in E(G) : e^* \not\in E(T)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $|F| + |F^*| = |E(G)|$ és $|F| = |V(G)| - 1$. Belátjuk, hogy F^* egy feszítőfa élhalmaza G^*-ban. Ebből adódik a tétel: Valóban. Ekkor $|F^*| = |V(G^*)| - 1 = |T(G, \lambda)| - 1$ és egyszerű számtan adja a bizonyítandót.

A bizonyítandónk: F^* körmentes és az összes duális csúcsot egy komponensbe fűzi fel.

(1) Tegyük fel, hogy e^* egy kör egy éle F^*-ban. Ez egy szépen lerajzolt kör, azaz felosztja a síkot egy belső és külső tartományra. Az e él egyik végpontja belül, a másik kívül van. Az eredeti csúcsok két (nem üres) osztályba sorolhatók a kör által definiált két tartomány alapján. Ezen két csúcs-osztály között nem haladhat él T-ben, ami ellentmond annak, hogy T a G feszítőfája.

(2) F egy körmentes élhalmaz, azaz a megfelelő élgörbék nem osztják fel a síkot, a duális csúcspontok egy összefüggő tartományba esnek. Tetszőleges kettőt összeköthetünk folytonos görbével amelyek elkerülik az F-beli élek élgörbéit. Ez a folytonos vonal könnyen diszkretizálható egy G^*-beli sétává, ami csak F^* éleit tartalmazza. ■

A tétel egy kicsit eklektikus. Gráfparaméterek és a geometriai/topológia környezettől függő paraméterek összefüggése. A következő következmény csak gráfelméleti paramétereket használ, emiatt sokszor hasznosabb az eredeti Euler-tételnél.

4. Következmény. *Legyen G egyszerű síkgráf, továbbá $|V(G)| \geq 3$. Ekkor*

(i) $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$,

(ii) ha G ráadásul páros gráf, akkor $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

Bizonyítás. (i) Feltehető, hogy G összefüggő és egy λ szép lerajzolása is adott.

Minden tartományra adjuk össze a határának hosszát. Egyrészt az élszám dupláját kapjuk, másrészt $T(G, \lambda)$ darab, legalább 3-as tag összege lesz az eredmény. A kétféle gondolatmenet összevetéséből.

$$2|E(G)| \geq 3|T(G, \lambda)|.$$

Az Euler-tétel háromszorosa szerint

$$3|T(G, \lambda)| = 3|E| - 3|V| + 6.$$

A két egyenlőtlenség együtt adja a bizonyítandót.

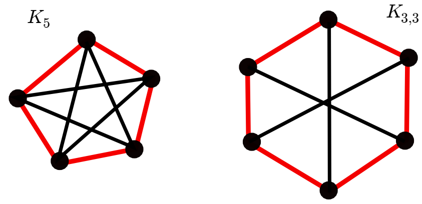
(ii) A fenti gondolatmenet megismételhető azzal a különbsé;ggel, hogy a határok hosszának összegében szereplő tagokról tudjuk, hogy legalább 4-ek. A hiányzó számtant az érdeklődő olvasóra hagyjuk. ■

3. Alappéldák nem síkgráfokra

5. Tétel. *A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok nem síkgráfok.*

Megjegyzés. A $K_{3,3}$ gráf egy másik neve a három-ház-három-kút gráf. Ez onnan ered, hogy a tétel állítása megfogalmazható úgy is, hogy nem tervezhető kilenc út három ház és három kút között (mindegyik háztól mindegyik kúthoz) úgy, hogy az utaknak a közös végpontokon (amennyiben van ilyen) ne legyen közös pontja.

Bizonyítás. A tétel fontos. Két bizonyítást is megemlítünk:
1. Bizonyítás: A $K_{3,3}$ és K_5 gráf alábbi lerajzolásából indulunk ki.



Mindkét lerajzolás kiemel egy-egy gráfelméleti kört (piros színű élek). A bizonyítás alapmegjegyzése: Egy körgráfot lényegében egyféleképpen lehet szépen lerajzolni. Egy lerajzolt kör a síkot belső (korlátos) és külső (nem korlátos) részre osztja. (Lásd Jordan-féle görbetétel, illetve Jordan—Schönflies-tétel.)

Az ábrákon a kör mellett további élek szerepelnek (ezekre mint hidak hivatkozunk). Ezeket viszonyíthatjuk a kör lerajzolásához: lehetnek külsők és belsők. A két szerep (külső/belső) szimmetrikus. így feltehető, hogy többségük belül halad.

Tegyük fel, hogy a kör szép lerajzolása a két gráf teljes szép lerajzolásává terjeszthető ki. Ezek után a két gráfot külön kezeljük:

$K_{3,3}$: Feltevésünk szerint belül (ami topologikusan azonos egy körvonal belsejével) legalább két híd van, amik keresztezik egymást és átmetszés nélkül lerajzolhatók. Ez lehetetlen.

K_5: Feltevésünk szerint belül legalább három híd van. Bárhogy választjuk is ki a belülre kerülő három élt, lesz közöttük kettő, ami az előző esethez hasonlóan nem fut össze és keresztezi egymást. Ez lehetetlen.

2. Bizonyítás: (Euler tételére hivatkozó bizonyítás.) Az Euler tétel után szereplő következmény (i) része adja, hogy K_5 nem síkgráf: Valóban K_5 nem teljesíti a $|E| \leq 3|V| - 6$ feltételt ($|E| = 10$ és $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$).

A következmény (ii) része adja, hogy $K_{3,3}$ nem síkgráf: Valóban $K_{3,3}$ páros gráf és nem teljesíti a $|E| \leq 2|V| - 4$ feltételt ($|E| = 9$ és $2|V| - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$). ■

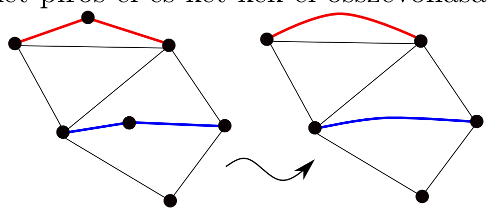
4. Részgráfok, topológikus részgráfok, minorok

Definíció. Legyen G egy gráf, $e = xy \in E$ egy éle.

Ekkor $G - e$ (vagy más jelöléssel $G \backslash e$) azt a gráfot jelöli, amit G-ből az e él elhagyásával kapunk.

Definíció. Legyen e és f a G gráf két éle, amely egy x másodfokú csúcsban fut össze. Az e és f élek összevonásával kapott gráfot úgy kapjuk G-ből, hogy elhagyjuk az $e = ux$, $f = vx$ éleket és x csúcsot, továbbá hozzáadunk egy új uv élet.

Példa. Az alábbi ábra két piros él és két kék él összevonását mutatja:

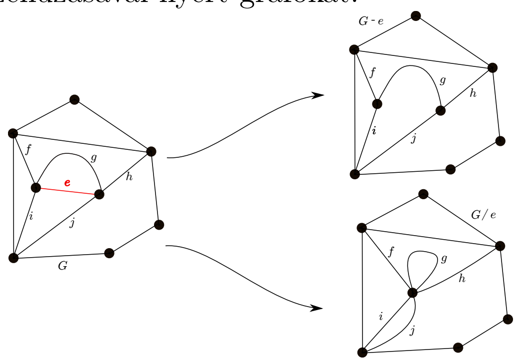


Az e és f élek összevonásával kapott gráf jelölése legyen $G(e \wr f)$.

Definíció. Jelölje G/e az e él összehúzásával/kontrakciójával nyert gráfot, mely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- $V(G/e) = (V(G) - \{x, y\} \dot{\cup} \{[e]\}$,
- $E(G/e) = E(G) \backslash \{e\}$,
- $I(G/e)$ természetesen adódik: Amely él eddig x-re vagy y-ra illeszkedett, az most az x és y csúcsokat reprezentáló új ($[e]$) csúcsra illeszkedik. A többi illeszkedés marad.

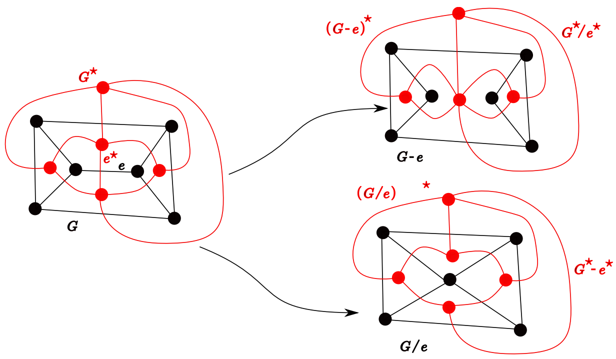
Példa. Az alábbi ábrán egy G gráfbeli e (piros) élt emelünk ki, majd megmutatjuk az e elhagyása és e összehúzásával nyert gráfokat.



Megjegyzés. Ha a fent említett e él hurokél, akkor $G/e = G - e$.

Emlékeztető. Legyen G egy síkrarajzolt gráf. Ekkor a G gráf duálisán azt a G^* gráfot értjük, melynek csúcsai G tartományai, élei pedig megfelelnek G éleinek úgy, hogy az e él e^* párja azon két tartományt reprezentáló csúcsokat köti össze, melyek e két oldalán szerepelnek (így speciálisan szomszédosak).

Példa. A következő két ábra a fent ismertetett két operációt, az élelhagyást, illetve az élösszehúzást illusztrálja a G gráfon, illetve annak G^* duálisán.



Az ábra azt sugallja, hogy $(G-e)^* = G^*/e^*$ és $(G/e)^* = G^* - e^*$.

6. Állítás. *(i)* $(G-e)^* = G^*/e^*$,

(ii) $(G/e)^* = G^* - e^*$.

Az érdeklődő hallgató számára a fenti állítás bizonyítása egy lehetséges feladat.

Definíció. Legyen G egy gráf.

a) Ha a G gráfból az R gráf él- illetve csúcselhagyásoperációk segítségével megkapható, akkor R-et a G gráf részgráfjának nevezzük. Jelölésben: $R \subseteq G$.

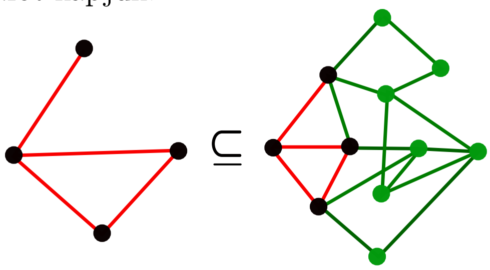
b) Ha a G gráfból az M gráf él- illetve csúcselhagyás és élösszehúzás operációk alkalmazásával megkapható, akkor a G gráfban H minorként szerepel (H a G minorja). Jelölésben: $M \preceq G$.

c) Ha a G gráfból a T gráf élek összevonásával és él- illetve csúcselhagyás operációkkal nyerhető, akkor T a G gráf topologikus részgráfja. Jelölés: $T \leq G$.

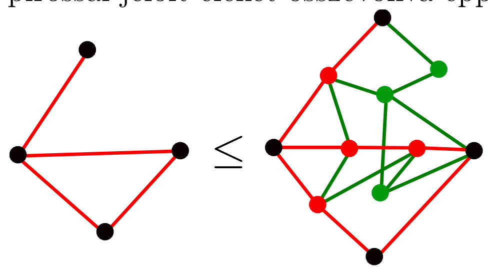
$\star$

Megjegyzés. $G(e \wr e') \simeq G/e \simeq G/e'$.

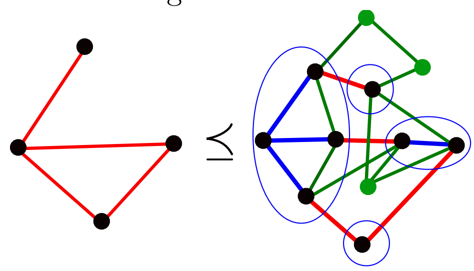
Példa. A R piros gráf a G gráf részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva éppen az R gráfot kapjuk.



Példa. A T piros gráf a G gráf topologikus részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva, a pirossal jelölt éleket összevonva éppen a T gráfot kapjuk.

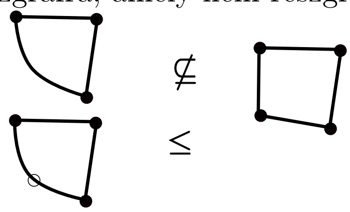


Példa. Az M piros gráf a G gráf minorja, hiszen ha a zölddel jelölt éleket elhagyjuk, a kijelölt klaszterekben szereplő kék feszítőfa éleit éleit összehúzzuk, akkor éppen az M gráfhoz jutunk. (A klaszterek zsugorodnak össze M csúcsaivá.)



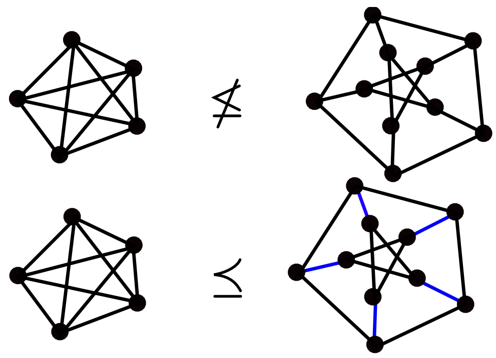
Észrevétel. Egy részgráf topologikus részgráf is egyben. Egy topologikus részgráf minor is egyben. Formálisan, ha G, R gráfok, akkor $G \supseteq R \Rightarrow G \geq R \Rightarrow G \succeq R$. Visszafelé viszont egyik állítás sem érvényes (lásd alábbi példák).

Példa. Példa topologikus részgráfra, amely nem részgráf:



C_4-ből C_3 bármely két összefutó e és e' élek összevonásával megkapható, vagyis C_3 C_4 topologikus részgráfja. C_4-nek több csúcsa van mint C_3-nak. Részgráfság esetén alkalmazni kellene a csúcselhagyás operációt, ami bármilyen végrehajtás esetén egy kételú gráfhoz vezetne. Tehát C_3 nem részgráfja C_4-nek.

Példa. Példa minorra, amely nem topologikus részgráf.



A Petersen-gráfból K_5 a kék színnel jelölt élek összehúzásával adódik, tehát K_5 a Petersen-gráfban minor. K_5 nem topologikus részgráfja a Petersen-gráfnak, hiszen a Petersen- gráf minden csúcsának fokszáma 3, K_5 csúcsainak fokszáma viszont 4. Két másodfokú csúcsba futó él összevonásával, csúcs- illetve élelhagyás-operációval viszont nem lehet fokszámot növelni.

Észrevétel. Ha G síkgráf, $R \subseteq G; T \preceq G; M \preceq G$ teljesül, akkor R, T, M is síkgráf.

5. Kuratowski és Wagner tételei

7. Következmény. *Ha G síkgráf, akkor K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet részgráf G-ben, K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet topologikus részgráf G-ben, illetve K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet minor G-ben.*

Ha K_5 vagy $K_{3,3}$ minden élére egy új csúcsot helyezünk, akkor ugyancsak nem síkgráfhoz jutunk, de részgráfként már nem találjuk a K_5, $K_{3,3}$ gráfokat. Azok csak topologikus részgráfként, illetve minorként lesznek G-ben. Azaz az első állítás nem megfordítható. Az utolsó két állítás viszont megfordítható.

8. Tétel. *A következő három állítás ekvivalens:*

(i) *A G gráf síkgráf.*

(ii) *A G gráfnak nem topologikus részgráfja a K_5 és $K_{3,3}$ gráf ($G \not\succeq K_5; K_{3,3}$).*

(iii) *A G gráfban nincs K_5 és $K_{3,3}$ minor* ($G \not\succeq K_5; K_{3,3}$).

A fenti hármas ekvivalencia két független eredmény összegzése: (i)⇔(ii) a Kuratowski-tétel, míg (i)⇔(iii) a Wagner-tétel.

6. A Wagner-tétel bizonyításának fontosabb részei

Wagner-tételét indirekten bizonyítjuk. tegyük fel, hogy van G ellenpélda rá. Azaz G nem síkgráf és nincs benne sem K_5, sem $K_{3,3}$ minor. Ekkor van olyan G ellenpélda is, ami minimális ($|V| + |E|$ a lehető legkisebb). így G minden „csonkítása” elveszti ellenpélda mivoltát. Ez a csonkított rész egy minor, így ez csak úgy lehat, ha az már síkgráf. A bizonyítás hátralévő része „ellentmondás-vadászat”.

9. Lemma. *G 3-szorosan összefüggő egyszerű gráf.*

10. Lemma. *Ha H 3-szorosan összefüggő és $|V(H)| > 4$, akkor alkalmas e élére G/e is 3-szorosan összefüggő.*

A két lemma bizonyítása is csak egy technikai kitérő a Wagner-tétel indoklásában. A következő fejezetre hagyjuk.

11. Következmény. *Legyen G egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan $xy \in E(G)$ él, melyre a $G - \{x, y\}$ gráf kétszeresen összefüggő.*

Következmény bizonyítása: A lemmában szereplő e él megfelelő, hiszen $G - \{x, y\} = (G/e) - [e]$ kétszeresen összefüggő lesz. ■

Legyen e a Lemma és a Következmény közös éle. G/e nem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort (minorjaik G-nek is minorjai), háromszorosan összefüggő, így az indukciós feltevés alapján G/e szépen lerajzolható. Ebben a lerajzolásban ott van a $G - \{x, y\}$ gráf lerajzolása és a kontrahált élt reprezentáló $[e]$ csúcs is. A $G - \{x, y\}$ gráf kétszeresen összefüggő, így lerajzolásának minden tartományát egy kör határolja. Azt is amely belsejében ott van az $[e]$ csúcs. Legyen C ezen tartomány határoló körgráf.

Legyen $P = N(x) \cap V(C)$, $K = N(y) \cap V(C)$, ahol $N(x)/N(y)$ az x/y csúcs szomszédainak halmaza. P elemeire mint piros, K elemeire mint kék csúcsok hivatkozunk. Fontos látni, hogy $P \cap K \neq \emptyset$ eset is előfordulhat, azaz a két szín nem két kizáró kategória.

A következő két fogalom és egy főlemma segítségével juthatunk el a bizonyítás befejezéséhez.

Definíció. Egy kört C kört u és v csúcsa ($u, v \in V(C)$) két zárt ívre bontja, mégpedig az $[u, v]^\frown$ és $[v, u]^\frown$ ívre. A két ív a két uv út csúcshalmaza. Körünk szépen lerajzolt a síkra, így az ívek megkülönböztethetők: a jelölésben az első csúcsból indulva, óramutató járása szerint haladva jutunk el a második csúcshoz. A két ív (csúcshalmaz) metszete az $\{u, v\}$ csúcsok. $(u, v)^\frown$ legyen $[u, v]^\frown - \{u, v\}$.

Definíció. Legyen A és B a C kör csúcshalmazának két részhalmaza. Azt mondjuk, hogy A és B szeparálható, ha megadhatóak olyan $u, v \in V(C)$ csúcsok, melyekre $A \subseteq [u, v]^\frown$ és $B \subseteq [v, u]^\frown$, vagyis létezik olyan felbontása a körnek, hogy A az egyik ív, B a másik ív csúcsainak részhalmaza.

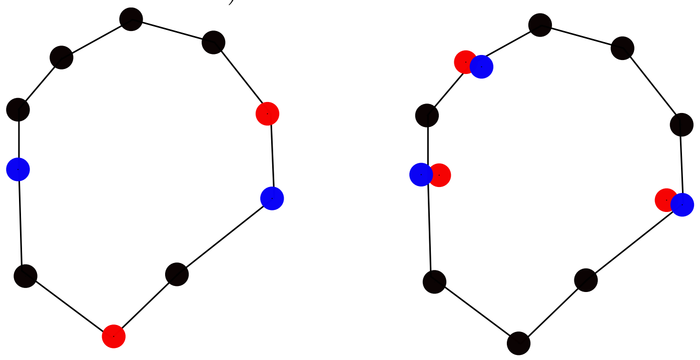
Megjegyezzük, hogy a két ív zárt, így végpontjaik közösek. A definíció megengedi, hogy nem-diszjunkt ponthalmazok is szeparálhatók legyenek. A következő kombinatorikus lemma a szeparálhatóság akadályait írja le.

12. Tétel (Főlemma). *Legyen C egy kör és A és B a kör két véges részhalmaza. A és B pontosan akkor nem szeparálható, ha a következő két lehetőség valamelyike teljesül.*

(i) *Létezik olyan $a, a' \in A$ és $b, b' \in B$ négy különböző csúcs, melyek a körön felváltva helyezkednek el, azaz az $(a, a')^{\frown}$ ív b és b' közül pontosan egyet tartalmazzon.*

(ii) $A = B$ *és* $|A| = |B| = 3$.

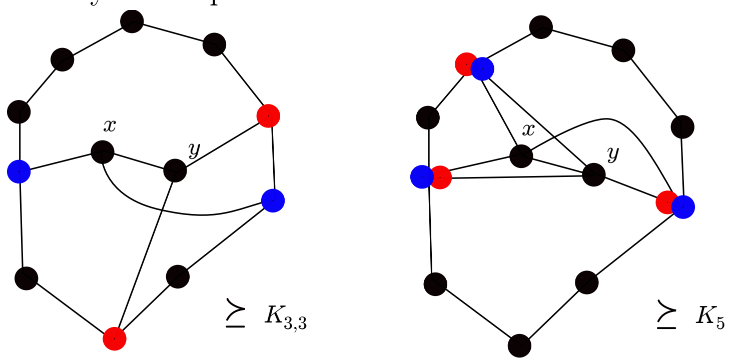
A szeparálhatóságot megakadályozó konfigurációk a következő ábrán láthatók (A és B a piros/kék színekkel kódolt).



A lemma egyszerű eset analízissel ellenőrizhető. Ezt az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

A Wagner-tétel bizonyítása már egyszerűen adódik:

1. eset: P és K nem szeparálhatóak a C kör mentén. A főlemma alapján az (i) vagy (ii) akadályok valamelyike fellép.

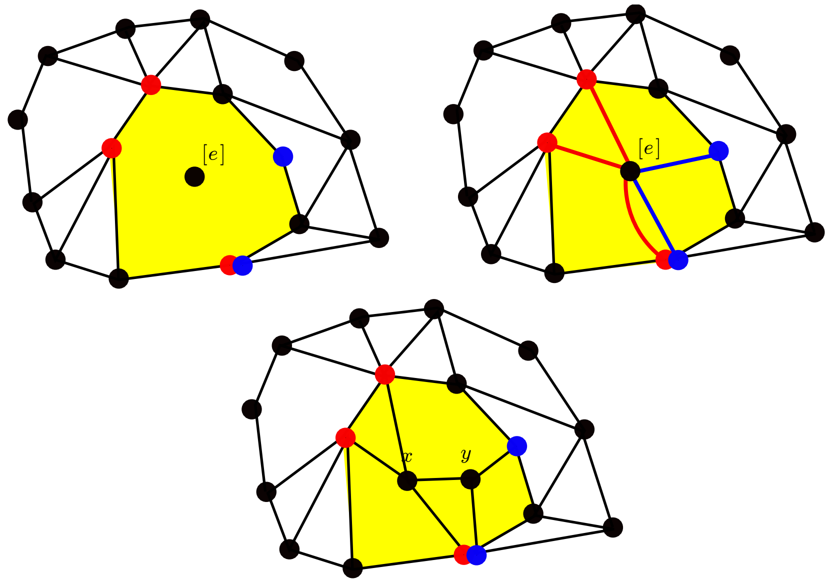


Látható, hogy az (i) esetben $K_{3,3}$, az (ii) esetben K_5 jelenik meg minorként, ami ellentmondás, hiszen G-ről feltettük, hogy nincs benne K_5 illetve $K_{3,3}$ minor.

2. eset: P és K nem szeparálhatóak a C kör mentén.

A P halmaz és a K halmaz pontjai ott vannak a C kör éleinek görbéjén (amely élgörbék egy Jordan-görbévé olvadnak össze). Ábrázoljuk a $G - \{x, y\}$ megfelelő tartományát és az $[e]$ csúcsot, ahol $[e]$ az összehúzott e élt reprezentáló csúcs pontja.

Az $[e]$ csúcsból kiinduló élek egy része eredetileg x-ből indult és P valamelyik eleméhez ment, másik részük eredetileg y-ból indult és K valamelyik eleméhez ment. Mivel P és K szeparált, ezért ezen éleknek megfelelő élgörbék megrajzolhatók átmetszés nélkül úgy, hogy az $[e]$-t reprezentáló csúcs körül a kiinduló görbék között egy blokkban legyenek a P-hez és egy blokkban legyenek a K-hez menő görbék.



G/e ezen lerajzolásából G egy szép lerajzolása már könnyedén előállítható, ha a kontrakciót „visszavonjuk”. ■

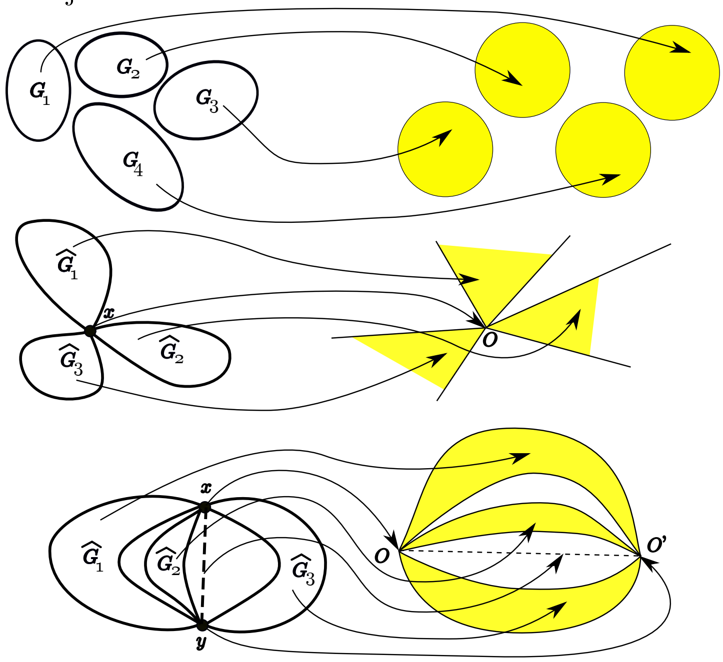
7. A Wagner-tétel bizonyításának technikai részletei

13. Lemma. *Ha Wagner-tételt tudjuk háromszorosan összefüggő gráfokra, akkor a tétel igaz.*

Bizonyítás. $|V|$-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk a Wagner-tételt. $|V| \leq 4$ esetben minden gráf szépen lerajzolható a síkra. Az indukciós lépeshez eseteket különböztetünk meg az összefüggőség foka szerint.
1. eset: *A G gráf nem összefüggő.* Ha G nem összefüggő, akkor jelölje $G_1, G_2, \ldots$ a gráfunk komponenseit. Egyik komponens sem tartalmazhat K_5 és $K_{3,3}$ minort, mindegyik komponens csúcsszáma kisebb mint G-é. így az indukciós feltevés alapján mindegyik komponens szépen síkra rajzolható. Vegyünk fel komponensszámnyi diszjunkt egységkörlapot. Az egyes komponensek lerajzolásai lekicsinyíthetők (amennyiben szükséges) úgy, hogy az egyes körlapokba berajzolható legyen. így G egy lerajzolásához jutunk.
2. eset: *A G gráf összefüggő, de nem 2-szeresen összefüggő.* Ekkor létezik $x \in V(G)$ elvágó csúcs, melyre $G - \{x\}$ több komponensre esik szét: $G_1, G_2, G_3, \ldots$ Mindegyik komponenshez adjuk hozzá az x csúcsot (a komponenshez vezető élekkel). Az így kapott gráfok legyenek $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2, \ldots$. Ezek mind G részgráfjai. Ezért egyik sem tartalmazhat K_5 és $K_{3,3}$ minort, mindegyik csúcsszáma kisebb mint G-é. így az indukciós feltevés alapján mindegyik $\widehat{G}_i$ szépen síkra rajzolható. $\widehat{G}_i$ szép lerajzolása módosítható úgy, hogy az x csúcsot realizáló P_x pont a nem korlátos tartomány határán legyen

(például gömbre vetítéssel, majd a gömbrerajzolás alkalmas P_x környéki felvágásával). Ez a lerajzolás deformálható úgy, hogy egy szögtartományban legyen, ahol P_x a szögtartomány O csúcsába kerül.

Legyen ℓ a $\widehat{G}_i$ gráfok száma. Vegyünk fel ℓ szögtartományt, amelyek diszjunktak kivéve közös csúcsukat, O-t. A fenti lerajzolásokat külön szögtartományba illesztve ezek G egy szép lerajzolásává állnak össze.



3. eset: *A G gráf 2-szeresen összefüggő, de nem 3-szorosan összefüggő.* Ekkor létezik $x, y \in V(G)$ elvágó csúcspár, melyre $G - \{x, y\}$ több komponensre esik szét: $G_1, G_2, \ldots$ Mindegyik komponenshez adjuk hozzá az x és y csúcsot a komponenshez vezető élekkel. Az így kapott gráfok legyenek $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2, \ldots$. Ezek mind G részgráfjai. Definíciójuk miatt egyikben sem lesz x és y szomszédos. (G_i bővítésénél csak az x, y-ból a komponenshez vezető éleket adtuk hozzá.)

Legyen $\widehat{G}_1^+, \widehat{G}_2^+, \ldots$ azok a gráfok, amiket $\widehat{G}_i$-ből úgy kapunk, hogy x-et és y-t összekötjük. Ezek már nem szükségszerűen részgráfok G-ben. DE minorok! Ezért egyik sem tartalmazhat K_5 és $K_{3,3}$ minort, mindegyik csúcsszáma kisebb mint G-é. így az indukciós feltevés alapján mindegyik $\widehat{G}_i^+$ szépen síkra rajzolható. $\widehat{G}_i^+$ szép lerajzolása módosítható úgy, hogy az $e = xy$ élt realizáló $\mathcal{G}_e$ élgörbe a nem korlátos tartomány határán legyen (például gömbre vetítéssel, majd a gömbrerajzolás alkalmas $\mathcal{G}_e$ felezőpontjának környékén történő felvágásával). Ez a lerajzolás deformálható úgy, hogy $\mathcal{G}_e$ egyenes OO'szakasz legyen (O reprezentálja az x és O' az y csúcsot), míg a lerajzolás többi része egy OO' feletti „holdacskába" essen.

Legyen ℓ a $\widehat{G}_i$ gráfok száma. Vegyünk fel ℓ holdacskát, amelyek diszjunktak kivéve közös csúcsaikat, O, O'-t és elkerülik az OO' szakaszt. A $\widehat{G}_i^+$ fenti lerajzolásában ott van $\widehat{G}_i$ lerajzolása is, amit az i-edik holdacskában elhelyezhetünk (x-et O, y-t O' reprezentálja). Ha szükséges, akkor az összeragasztott lerajzolásokhoz hozzávesszük az OO' szakaszt is az xy él reprezentálására. így G egy szép lerajzolásához jutunk. ■

14. Lemma. *Legyen G egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan $e \in E(G)$ él, melyre a G/e gráf 3-szorosan összefüggő.*

Bizonyítás. A lemma bizonyítását nem végeztük el. ■

8. További kapcsolódó tételek

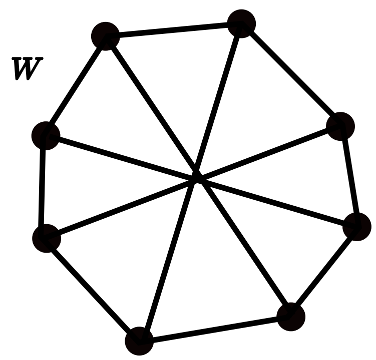
Végezetül néhány tétel kimondása következik bizonyítás nélkül.

15. Tétel (Fáry-tétel). *Ha G egyszerű síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbéje szakasz legyen.*

16. Tétel (Tutte-tétel). *Ha G egyszerű, 3-szorosan összefüggő síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbe egyenes szakasz, továbbá minden korlátos tartománya konvex sokszög.*

17. Tétel (Steinitz-tétel). *Egy G gráf pontosan akkor egy konvex poliéder élgráfja, ha 3- szorosan összefüggő egyszerű gráf.*

18. Tétel (Wagner struktúratétele). *A G gráf pontosan akkor nem tartalmaz K_5 minort, ha felépíthető síkgráfokból és W Wagner-gráfból (lásd alább) legfeljebb három pontú klikk menti összeragasztásokkal és csúcs- illetve élelhagyásokkal.*



19. Következmény (Wagner színezési tétele). *Ha a G gráf tartalmaz K_5 minort, akkor a kromatikus száma legfeljebb 4.*

A Wagner-tétel alapján átírhatjuk a négy-szín-tételt: Ha a G gráf nem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort, akkor G kromatikus száma legfeljebb 4. Wagner színezési tétele azt mondja, hogy a négy-szín-tétel ezen alakjában elég csak K_5-t minorként kizárni. Ez az élesítés nagyon fontos.

Bizonyítása a struktúratétel után, a négy-szín-tételre vonatkozó hivatkozással egyszerű: A síkgráfok és a Wagner-gráf 4-színezhető, a klikkek menti ragasztás nem növeli meg a kromatikus számot. Azaz az élsítés nem sokkal nehezebb mint a négy-szín-tétel.

Sejtés (Hadwiger-sejtés). Ha a G gráf nem tartalmaz K_{k+1} minort, akkor G kromatikus száma legfeljebb k.

Illetve egy ekvivalens megfogalmazása:

Sejtés (Hadwiger-sejtés). Ha a G gráf nem k-színezhető, akkor tartalmaz K_{k+1} minort.

BSc-s tanulmányainkból tudjuk, hogy a minorság helyett részgráfsággal dolgozva a megfelelő állítás „nagyon hamis". Nem annyira nyilvánvaló, hogy topologikus részgráfsággal dolgozva is (nagyon) hamis állításhoz jutunk (ezt láthatjuk, ha az interneten a 'Hajós-conjecture'-re keresünk).

A minorokat használó Hadwiger-sejtés $k = 2$ esetet triviális. A $k = 3$ esete egyszerű. A $k = 4$ eset igaz (Wagner színezési tétele), a négy-szín-tétellel ekvivalens (ahogy vázoltuk). Ahogy k nő a sejtés nehezedik (miért?). Ennek ellenére a $k = 5$ eset (a négy-szín-tétel élesítése) bizonyított. A bizonyítása a négy-szín-tételre hivatkozik, de így is nagyon bonyolult.